

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO REVELADO POR PROFESSORES DA EDUCAÇÃO INFANTIL DO ANOS INICIAIS NO TEMA DE MEDIDA DE COMPRIMENTO E SUA ESTIMATIVA¹

Milena Soldá Plicastro²

Alessandra Rodrigues de Almeida³

Miguel Ribeiro⁴

Resumo: A prática docente deverá contribuir para o desenvolvimento de discussões matemáticas significativas com os alunos, sendo para isso essencial um conhecimento matemático (especializado) do professor. Esta especialização é considerada na perspectiva da conceitualização do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK). Articulando-se pesquisa, formação e prática, configura-se um dos contextos ideais para melhor entender a natureza desse conhecimento (e posteriormente melhorar a formação facultada). Neste texto discute-se alguns aspectos do conhecimento especializado revelado por professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais no âmbito das medidas de comprimento e da estimativa dessas medidas.

Palavras Chave: Conhecimento Especializado; MTSK; Geometria; Medidas; Anos Iniciais;

KINDERGARTEN AND PRIMARY TEACHERS' SPECIALIZED KNOWLEDGE ABOUT THE LENGTH MEASUREMENT AND ITS ESTIMATIVE¹

Abstract: Teachers' practice should contribute to the development of meaningful mathematical discussions with students and, thus, it is essential to associate teachers' (specialized) knowledge to his/her mathematical practice. Such specialization is considered in the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) conceptualization. Articulating research, teachers' education and practices is one of the ideal contexts to better understand the nature of such knowledge (and subsequently, improve the provided education). In this paper we discuss some aspects of primary teachers' specialized knowledge revealed about length measurement and estimative.

Keywords: Specialized Knowledge; MTSK; Geometry; Measurement; Kindergarten and primary teachers;

¹Uma versão preliminar deste texto foi apresentada no VII Congresso Internacional de Ensino de Matemática (CIEN) – ULBRA – Canoas – RS – Out - 2017

²Doutoranda do Programa de Pós-Graduação da Faculdade da UNICAMP. E-mail: mitapolicastro2gmail.com

³Doutora pelo Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática (PECIM) da Unicamp. Professora da Faculdade de Educação da Pontifícia Universidade Católica de Campinas (PUC-Campinas). E-mail: alessandraalmeida628@gmail.com

⁴Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Huelva (Espanha). Professor da Faculdade de Educação da UNICAMP. E-mail: cmribas78@gmail.com

Introdução

As pesquisas com foco nos temas de Geometria e de Grandezas e Medidas, revelam preocupações dos pesquisadores em Educação Matemática centradas, essencialmente, em dimensões relacionadas com o tipo de organização do trabalho em sala de aula ou nas abordagens metodológicas adotadas. Essa organização do trabalho em sala de aula tem como foco essencial o trabalho de grupo e discussões nas salas de aula da Educação Básica⁵ ou os recursos utilizados na prática pedagógica, tais como, materiais manipulativos, tecnologias e jogos⁶. Quando o foco dessas pesquisas são as abordagens metodológicas adotadas, estas centram-se primordialmente na resolução de problemas, investigação e argumentação⁷. Um aspecto importante que se salienta quando efetuamos uma revisão da literatura das pesquisas que têm, de algum modo, relação com os temas de Geometria e de Grandezas e Medidas é o fato de tais investigações se focarem principalmente nos alunos e nas suas ações, interações e respostas em determinado contexto ou associadas a uma tarefa específica, deixando à margem o professor, o seu conhecimento e prática.

Assim, ao pensarmos em formas de contribuir para a melhoria das aprendizagens, e resultados matemáticos dos alunos (que consideramos como o objetivo último da pesquisa em Educação Matemática), os tipos de focos considerados nos estudos como os que referimos acabam por não considerar o elemento que a pesquisa mostra ser o fator (de entre os que se podem controlar) que maior impacto possui nas aprendizagens dos alunos e

⁵ FIGUEIREDO, A. P. N. B.; BELLEMAIN, P. M. B.; TELES, R. A. DE M. Grandeza Volume: um estudo exploratório sobre como alunos do ensino médio lidam com situações de comparação. *BOLEMA*, v. 28, p. 1172-1192, 2014.

⁶ RODRIGUES, A. D.; BELLEMAIN, P. M. B. A comparação de áreas de figuras planas em diferentes ambientes: papel e lápis, materiais manipulativos e no *apprenti géomètre 2*. *Em Teia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 7, n. 3, p. 1-25, 2016.

⁷ FRIPP, A. Enseñanza de la geometría en la escuela primaria: Cómo entrelaza el maestro, en sus prácticas, la matemática, el contexto y sus alumnos. *Cuadernos de Investigación Educativa*, v. 3, n. 18, p. 55-63, 2012.

SANNI, R. Teaching geometry in schools: an investigative rather than instructive process. *Pythagoras*, n. 65, p. 39-44, 2007.

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

que se refere ao conhecimento do professor⁸. Este conhecimento do professor que ensina matemática é considerado especializado incluindo essa especialização dimensões do domínio do conhecimento do conteúdo (matemática) e do domínio do conhecimento didático-pedagógico⁹. Desta forma esse conhecimento do professor expande substancialmente as generalidades apontadas por Shulman¹⁰ ou Tardif¹¹, tendo uma preocupação concreta com o processo de ensino e aprendizagem da matemática e com a prática do professor para efetivar essa aprendizagem com e para a compreensão. Considerando, assim, as especificidades desse conhecimento do professor, assumimos a conceitualização do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*¹² – MTSK¹³.

Tendo por objetivo a melhoria da prática do professor torna-se essencial obter um mais amplo entendimento relativamente à natureza e conteúdo do conhecimento do professor sendo, portanto, essencial identificar

⁸ BALL, D.; HILL, H. H.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, n. Fall, p. 14–46, 2005.

GROSSMAN, P. L. Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation. *Nea policy brief*, 2010.

HILL, H. C.; ROWAN, B.; BALL, D. Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, v. 42(2), p. 371–406, 2005.

NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. How large are teacher effects?. Educational evaluation and policy analysis. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 6, n. 3, p. 237–257, 2004.

⁹ FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 4º ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. p. 53–84.

¹⁰ SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 4, p. 4–14, 1986.

¹¹ TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. 15. ed. Petrópolis – RJ Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática.: Vozes, 2002.

¹² Optamos por manter a nomenclatura em Inglês pois esta é uma conceitualização do conhecimento professor reconhecida internacionalmente e a tradução desvirtuaria não apenas o sentido, mas essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa (Veja-se figura 1)

¹³ CARRILLO, J. *et al.* Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In: CERME 8, 2013, Ankara. *Anais...* Ankara: Middle East Technical University, 2013. p. 2985–2994.

as áreas mais críticas em termos das aprendizagens dos alunos, assumindo essa identificação como um ponto de partida para as compreensões a respeito do conhecimento do professor e de chegada dos processos de desenvolvimento desse conhecimento especializado do professor.

Dentre os diversos temas matemáticos incluídos nos documentos oficiais que se referem aos Anos Iniciais¹⁴ um dos matematicamente críticos refere-se à Medida. Esta criticidade poderá estar associada ao pouco investimento na formação de professores, tanto inicial quanto continuada, nesse contexto (Geometria e Medida), mas também à ideia de que o trabalho no tema de Medida está essencialmente (e exclusivamente) associado à indicação de um valor numérico que indique o resultado da medição e à manipulação de signos, sem atribuição de efetivo sentido e significado ao que é medir.

Nos documentos oficiais que norteiam a elaboração dos currículos escolares¹⁵, o trabalho com o tema Medidas está indicado desde a Educação Infantil e sugere-se sua abordagem em diferentes situações cotidianas. Já no que concerne aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, as medidas estão presentes desde o 1º ano, no entanto, apenas a partir do 3º ano é proposta a construção formal da noção de o que é medir¹⁶.

Assumindo explicitamente a centralidade do papel do professor e do seu conhecimento na e para a melhoria das aprendizagens (conhecimento, capacidades, competências e habilidades) matemáticas dos alunos e dos respectivos resultados acadêmicos, consideramos fundamental ampliar e aprofundar o entendimento que detemos relativamente ao conhecimento do professor no âmbito do tema Medida – considerando as especificidades desse conhecimento. Com esse fito, e em um contexto de formação continuada, desenvolvemos uma pesquisa que busca obter elementos desse

¹⁴ BRASIL, S. DE E. F. *PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais): Ensino Fundamental – Bases Legais*. Brasília: Ministério da Educação / Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1997. v. 1. BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Terceira Versão ed. Brasília-DF: Ministério da Educação, 2017.

¹⁵ Vide rodapé 14

¹⁶ BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Terceira Versão ed. [S.l.]: MEC, 2017

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

conhecimento do professor por forma a contribuir para a melhoria da formação facultada. Assim, uma das questões sobre a qual nos debruçamos refere-se a:

Que conhecimento especializado revelam professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais que participam de uma formação continuada sobre os temas de Medida de comprimento e estimativa ao resolverem e discutirem uma tarefa com objetivo explícito de promover o desenvolvimento desse conhecimento especializado?

Algumas dimensões teóricas

As aprendizagens e resultados dos alunos são impactados diretamente pelo conhecimento dos professores¹⁷. Nesse sentido, entendemos como sendo essencial promover uma discussão sobre o conteúdo desse conhecimento, de modo a se conceitualizarem formas de contribuir para a melhoria da prática do professor, por via da melhoria da formação docente (tipo, focos, natureza e objetivos), o que apenas será possível se a pesquisa considerar essa melhoria efetivamente como um fim último, assumindo aqui o foco nas especificidades do conhecimento do professor um lugar de destaque.

Diante das várias conceitualizações do conhecimento do professor que ensina matemática que têm vindo a ser desenvolvidas e que não ficam ao nível das generalidades, considerando, assim as especificidades desse conhecimento no processo de ensino e aprendizagem da matemática (ver por

¹⁷ NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. How large are teacher effects?. Educational evaluation and policy analysis. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, v. 26, n. 3, p. 237–257, 2004.

BALL, D.; HILL, H. H.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, n. Fall, p. 14–46, 2005.

HILL, H. C.; ROWAN, B.; BALL, D. Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, v. 42(2), p. 371–406, 2005.

GROSSMAN, P. L. Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation. *Nea policy brief*, 2010.

exemplo, Mathematics Knowledge for Teaching¹⁸; Knowledge Quartet¹⁹; Mathematics Teachers' Specialized Knowledge²⁰, assumimos, no contexto desta pesquisa, a conceitualização do Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK²¹.

O MTSK (Figura 1) aborda diferentes aspectos e dimensões do conhecimento do professor apresentando-se, por um lado, como uma lente teórica que possibilita modelar o conhecimento nuclear do conhecimento profissional do professor que ensina matemática²². Por outro lado, apresenta-se como uma potente ferramenta metodológica e analítica para investigar as distintas práticas do professor que ensina matemática a partir das dimensões do seu conhecimento matemático e pedagógico²³. Note-se que estas dimensões correspondem a um aprofundamento das especificidades do conhecimento do professor em diversos temas e conteúdos matemáticos, mas não são consideradas em um sentido restritivo e limitador, e sim como um refinamento da lente teórica e encaradas como um ponto essencial para conceitualizar tarefas para a formação de professores²⁴.

¹⁸ BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, p. 389–407, 2008.

¹⁹ ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 8, p. 255–281, 2005.

²⁰ CARRILLO, J. *et al.* Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In: CERME 8, 2013, Ankara. *Anais...* Ankara: Middle East Technical University, 2013. p. 2985–2994.

²¹ Idem nota de rodapé 20

²² Idem nota de rodapé 20.

²³ FLORES, E.; ESCUDERO, D. I.; AGUILAR, A. Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias, del MTSK. In: XVII SIMPÓSIO DA SOCIEDADE ESPANHOLA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013, Bilbao - Espanha. *Anais...* Bilbao - Espanha: [s.n.], 2013. p. 275–282.

²⁴ RIBEIRO, M. Tareas para alumnos y tareas para la formación: discutiendo el conocimiento especializado del profesor y del formador de profesores de matemáticas. In: XX JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2016, Chile. *Anais...* Chile: [s.n.], 2016.

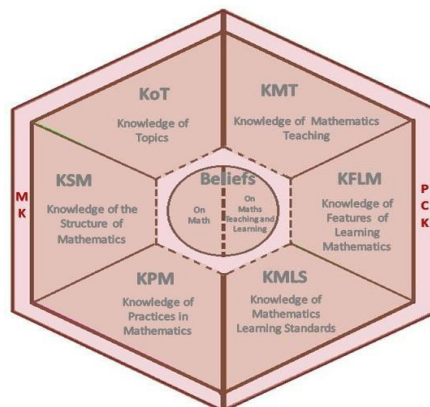
Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

Figura 1 – Domínios do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*



Fonte: CARRILLO *et al.*, (2013, p. 2989)

Em cada um dos dois grandes domínios (conhecimento do conteúdo – MK – e conhecimento pedagógico do conteúdo – PCK), são considerados três subdomínios, atendendo, cada um, às especificidades do conhecimento do professor de/que ensina matemática. A separação em subdomínios deve ser entendida de modo operacional e, nesse sentido, faz-se necessário que sejam assumidas e evidenciadas suas inter-relações, tendo sempre como pano de fundo a matemática e o seu ensino e aprendizagem, e assumindo a prática do professor como um elemento central como a exteriorização dos diferentes subdomínios desse conhecimento especializado.

No contexto desta investigação, focamos nossa atenção no que se refere aos subdomínios do MK buscando evidências das especificidades deste conhecimento relativamente ao tema de Medidas de comprimento e de estimativas dessas medidas.

Ao professor cumprirá um conhecimento matemático simultaneamente amplo e profundo e relacionado com o fazer matemático de modo a proporcionar aos alunos o entendimento do que fazem, de como fazem e porque o fazem a cada momento, tendo sempre como perspectiva as futuras aprendizagens e sustentado nas anteriores. Tal conhecimento matemático

deve ser complementar – e, nesse sentido, mais amplo e mais profundo – ao que se espera que seja o conhecimento dos alunos (o que os alunos aprendem), bem como se relacionar aos fundamentos matemáticos, procedimentos “tradicionais” e alternativos ou às distintas formas de representação dos diferentes tópicos.

Dessa forma, uma das dimensões desse conhecimento inclui, entre outros, um conhecimento matemático associado aos conceitos que sustentem o entender o que se faz, como se faz, porque se faz de determinada forma, os diferentes tipos de registro de representação e as características de um determinado resultado, permitindo também conhecer múltiplas possíveis definições para um mesmo conceito (*Knowledge of Topics* – KoT)²⁵. No âmbito das Medidas, consideramos, por exemplo, que o conhecimento associado à definição de medida (o que é medir?), aos procedimentos de medida e a atribuição de significado aos motivos matemáticos que podem sustentar o uso de determinados instrumentos de medida não *standard* de modo *standard*²⁶, estão relacionados com as dimensões do conhecimento no subdomínio do KoT.

De modo complementar a esta dimensão, considera-se um subdomínio do conhecimento do professor que inclui um conhecimento matemático amplo e profundo sobre cada um dos temas, assumindo uma perspectiva da sua integração ao longo da escolaridade, bem como suas relações com estruturas mais amplas ou mesmo com outras estruturas consideradas auxiliares ao pensamento matemático. Tal conhecimento permite entender a matemática elementar de um ponto de vista superior e vice-versa²⁷ possibilitando uma sua posterior discussão com os seus alunos (*Knowledge of the Structure of Mathematics* – KSM). Nesta dimensão considera-se, por

²⁵ De modo similar à nomenclatura da conceitualização do conhecimento do professor assumimos também aqui a nomenclatura em inglês, associada à mesma justificação anteriormente apresentada.

²⁶ RIBEIRO, M. *et al.* Intertwining noticing and knowledge in video analysis of self practice: the case of Carla. In: CERME 9, 2017, Dublin. *Anais...* Dublin: [s.n.], 2017. p. a aparecer.

²⁷ KLEIN, F. *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis*. 3ª ed. New York: Macmillan., 1932. v. 1.

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

exemplo, o conhecimento do professor relativamente às conexões entre o que é medir a área e a atribuição de sentido e significado aos procedimentos intuitivos, informais e formais algébricos associados²⁸ ou sobre as necessárias conexões entre as ideias centrais das noções de medida no entendimento de um dos sentidos da divisão²⁹, ou o conhecimento que sustenta as conexões entre o considerar a fração enquanto medida³⁰ e a atribuição de significado à divisão de quantidades representadas em forma de fração.

Ainda incluído nas dimensões do MK, consideram-se os aspectos associado às formas de fazer matemática. Dentre essas formas, inclui-se um conhecimento das diferentes maneiras de demonstrar, dos critérios a estabelecer para que uma generalização seja válida, do significado de definição ou do conhecimento da sintaxe matemática, incluindo também os conhecimentos de diferentes estratégias de resolução de problemas ou de modelagem matemática (*Knowledge of Practices in Mathematics – KPM*). Como elementos desta dimensão do conhecimento especializado do professor no âmbito das Medidas incluem-se, por exemplo, o conhecimento relativo ao uso de uma linguagem formal e matematicamente válida para representação das quantidades a serem medidas, ou ainda, a noção de transitividade na medida, que pode ser compreendida como a associação entre o uso inicial de uma unidade não *standard* para, em seguida, associá-la a uma unidade *standard*. (Note-se que um conhecimento relativo à multiplicidade de sentidos da expressão “transitividade” requer um conhecimento das conexões múltiplas envolvidas e que este é parte do KSM).

²⁸ RIBEIRO, M.; JAKOBSEN, A.; MELLONE, M. Secondary prospective teachers' interpretative knowledge on a measurement situation. In: INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 2018, [S.l.: s.n.], 2018. p. a aparecer.

²⁹ São três os sentidos associados à divisão: partilha, medida e razão. Enquanto medida, a divisão está associada à noção de comparação entre duas quantidades, de modo a se verificar quantas vezes uma das quantidades é iterada até que se complete a outra quantidade.

³⁰ São cinco os sentidos associados às frações: parte-todo, quociente, razão, operador e medida.

Quando situados no contexto das medidas torna-se essencial um mais amplo entendimento relativamente ao que se entende por medir, por forma que se possa entender melhor também o conteúdo das diferentes dimensões do conhecimento do professor. Com efeito, Caraça³¹ refere que medir pode ser definido como “comparar duas grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc.”. Para Clements e Stephan³², medir é atribuir um número a quantidades contínuas, considerando que o processo cognitivo das crianças, no tocante à medida, se dá primeiro pela associação da palavra à quantidade que a representa para, então, ao compararem dois objetos e notarem suas semelhanças e diferenças, associarem o número à quantidade.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC³³, destaca como expectativa para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental que os alunos reconheçam a medida como a comparação de uma grandeza com uma unidade e a expressão numérica do resultado, determinando diferentes medidas sem o recurso a fórmulas³⁴. É proposta a utilização de unidades não convencionais para se estabelecer as comparações e, conseqüentemente, as medições, visando dar “sentido à ação de medir, evitando a ênfase em procedimentos de transformação de unidades convencionais”³⁵.

³¹ CARAÇA, B. DE J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa/Portugal: Bertrand (Irmãos), 1963. p.29

³² CLEMENTS, D. H.; STEPHAN, M. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*. New Jersey: LEA: D.H. Clements, J. Sarama, & A-M Di Biase, 2004. p. 299–317.

³³ BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Terceira Versão ed. [S.l.]: MEC, 2017.

³⁴ Uma das habilidades presentes já no currículo do 1º ano destaca a seguinte habilidade associada às Grandezas e Medidas:

“Comparar comprimentos, capacidades ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos, entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano.” (BRASIL, 2017, p. 237).

No 2º ano, encontramos a seguinte habilidade: “Estimar, medir e comparar comprimentos de lados de salas (incluindo contorno) e de polígonos, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas (metro, centímetro e milímetro) e instrumentos adequados” (BRASIL, 2017, p.241).

³⁵ BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Terceira Versão ed. Brasília-DF: Ministério da Educação, 2017. p. 229

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

Para explicar os aspectos envolvidos na atividade matemática de medir unidimensionalmente, Clements e Stephan¹⁶, partem da ideia de medir comprimentos e apresentam seis princípios que caracterizam e descrevem os procedimentos associados: *partição do objeto*; *unidade de iteração*; *transitividade*; *conservação*; *acumulação da distância*; *relação com um valor numérico*.

A *partição* está relacionada à atividade mental de dividir o objeto em unidades menores e de mesmo comprimento – considerando o caso particular de a unidade ser menor que o objeto a medir. A *unidade de iteração* configura-se como a habilidade de pensar num comprimento como referência para ‘cobrir’ todo o comprimento do objeto, num processo que garante que as extremidades final e inicial dessa referência coincidam no processo de iteração, sem que se deixem espaços entre duas unidades subsequentes ou que se sobreponham unidades adjacentes. A *transitividade* se configura como processo de se obter, por meio de estimativa ou dedução, uma relação de igualdade ou desigualdade (superior ou inferior) de uma grandeza e estendê-la a outros dois ou mais objetos. A *conservação* é a compreensão de que, caso o objeto cujo comprimento será medido sofra algum tipo de movimento (translação ou rotação), tal comprimento permanecerá o mesmo. A *acumulação da distância* é entendimento de que, enquanto se itera uma unidade ao longo do comprimento de um objeto e se realiza a contagem da iteração, as palavras numéricas significam o espaço coberto por todas as unidades contadas até aquele ponto. Para a compreensão da *relação da medida com um valor numérico* é necessário que o indivíduo reorganize sua compreensão de contagem de quantidades discretas para quantidade contínuas. Note-se que essa compreensão poderá/deverá iniciar-se desde a Educação Infantil de maneira gradual e está associada ao entendimento de que, embora utilizando unidades de iteração de comprimentos distintos (mas um mesmo em cada iteração), ao se medir o mesmo comprimento, a

contagem da iteração deverá ser distinta, mas o comprimento medido será o mesmo.

Por outro lado, embora a atividade de medir esteja associada ao estabelecimento de uma relação com um valor numérico, o valor da medida está relacionado com a capacidade de efetuar estimativas que mais se aproximem da ordem de grandeza do que se mede com o que se mede. A noção de se efetuar estimativas é encontrada, nos documentos oficiais, em sua maior parte associada ao contexto de Números e Operações – associando-se à noção de *estimar uma quantidade* ou *estimar o resultado de uma conta*³⁶ – restringindo o entendimento dos alunos relativamente ao que é efetivamente estimar e, em última instância do que é medir. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) não se encontra de forma explícita a palavra estimar ou qualquer flexão dela originada, no texto do Bloco de Conteúdos Grandezas e Medidas. Já na BNCC, a palavra “estimar” ou flexões dela originadas, são encontradas pontualmente na unidade temática Grandezas e Medidas nos currículos associados ao 2º, 3º e 4º anos em que se propõe, por meio das habilidades – que não sofrem modificações substanciais no modo como estão formuladas para o 2º, 3º e 4º ano – “Estimar, medir e comparar comprimentos” ou “Estimar medir e comparar capacidade e massa”³⁷.

Dentre as várias estratégias de ensino de estimativa de medidas referidas na literatura internacional – estratégia de unidade de iteração e estratégia de estimativa por referência³⁸; decomposição – recomposição³⁹, procedimento e prática de adivinhação-verificação, com procedimento de *feedback*, modelo

³⁶ BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Terceira Versão ed. [S.l.]: MEC, 2017.

BRASIL, S. DE E. F. *PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais): Ensino Fundamental – Bases Legais*. Brasília: Ministério da Educação / Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1997. v. 1.

³⁷ Vide nota de rodapé 34, p.245

³⁸ CRITES, T. W. Strategies for estimating discrete quantities. *The Arithmetic Teacher*, v. 41(2), p. 106–108, 1993.

LANG, F. K. What is a “good guess” anyway? Estimation in early childhood. *Teaching Children Mathematics*, v. 7, n. 8, p. 462–466, 2001.

JORAM, E. et al. Children’s use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 36, n. 1, p. 4–23, 2005.

³⁹ CRITES, T. W. Strategies for estimating discrete quantities. *The Arithmetic Teacher*, v. 41(2), p. 106–108, 1993.

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

de fluxograma e modelo de estratégia de combinação⁴⁰-, basicamente todas envolvem o indivíduo que está estimando num processo de medição física sem ferramentas, mas com conhecimento sobre os princípios de medição²². No que se refere às estimativas de medida de comprimento, destacamos a estratégia de estimativa por referência⁴¹, especialmente porque, os indivíduos que se utilizam desta estratégia para medir comprimentos, possuem regras mentais ou regras conceituais às quais usam como recurso para a estimativa “mental” de comprimento, projetando uma imagem em objetos presentes ou imaginários⁴².

No contexto desta investigação, iremos assumir a noção de estimativa de medida de comprimento em concordância com a definição dada por Pizarro, Gorgorió e Albarracín⁴³ que consideram que estimar é "atribuir perceptivamente um valor ou um intervalo de valores e uma unidade correspondente a uma quantidade de magnitude discreta ou contínua, por meio de conhecimento prévio ou por comparação não direta com algum objeto auxiliar"⁴³.

Contexto e método

A investigação aqui apresentada forma parte de um projeto mais amplo com foco no conhecimento especializado e práticas do professor que ensina Geometria na Educação Infantil e nos Anos Iniciais. Em particular, aqui consideramos como contexto um curso de extensão ofertado no primeiro

⁴⁰ JORAM, E. *et al.* Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 36, n. 1, p. 4–23, 2005.

⁴¹ JORAM, E. *et al.* Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 36, n. 1, p. 4–23, 2005.

SARAMA, J.; CLEMENTS, D. H. *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: [s.n.], 2009.

⁴² SARAMA, J.; CLEMENTS, D. H. *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: [s.n.], 2009.

⁴³ PIZZARRO, N.; GORGORIÓ, N.; ALBARRACÍN, L. Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. In: INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XVIII (SEIEM), 2014, Salamanca. Espanha. *Anais...* Salamanca. Espanha.: M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega, 2014. p. 523–532.

semestre de 2017 na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) que tinha como um dos seus objetivos promover o desenvolvimento do conhecimento especializado dos professores participantes no âmbito da Medida e da estimativa.

Neste curso (40 horas presenciais) partimos de situações da prática de sala de aula para discutir, de forma imbrincada, conteúdos de Geometria, as formas de abordagens com as diferentes turmas e o conhecimento especializado do professor associado a esses conteúdos. Os formandos eram professores da Educação Infantil (09), dos Anos Iniciais (01), dos anos Finais (01) do Ensino Fundamental e um estudante do Curso de Física. Todos os encontros foram gravados (áudio e vídeo, sem captar os rostos dos participantes) e essas gravações foram analisadas de forma independente pelos autores deste texto, tendo por foco a identificação do que se consideram situações matematicamente críticas⁴⁴. Por uma questão de ética, aqui atribuiremos nomes fictícios aos professores (Ana, Daniela, Elvira, Ernani, Joana, Jussara, Kelly, Luana, Pedro e Raissa).

As tarefas implementadas neste contexto de formação foram conceitualizadas partindo da assunção que se o conhecimento matemático do professor é especializado e, portanto, de uma natureza complementar ao conhecimento dos alunos. Nesse sentido, as tarefas para a formação de professores têm, necessariamente, de deter uma natureza particular⁴⁵ de modo a promover o desenvolvimento desse conhecimento especializado.

⁴⁴ RIBEIRO, C. M.; CARRILLO, J.; MONTEIRO, R. We reach what we know, but do we know what we teach? The practical “distinction” between squares and rectangles in a primary school class. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ELEMENTARY MATHS TEACHING (SEMT 09), 2009, Prague, Czech Republic: Charles University, Faculty of Education. *Anais...* Prague, Czech Republic: Charles University, Faculty of Education.: [s.n.], 2009. p. 204–212.

⁴⁵ RIBEIRO, M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Give sense to students’ productions: a particular task in teacher education. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL SYMPOSIUM, ELEMENTARY MATHEMATICS TEACHING (SEMT), 2013, Prague: Charles University. *Anais...* Prague: Charles University: [s.n.], 2013. p. 273 – 281.

RIBEIRO, M. Tareas para alumnos y tareas para la formación: discutiendo el conocimiento especializado del profesor y del formador de profesores de matemáticas. In: XX JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2016, Chile. *Anais...* Chile: [s.n.], 2016.

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

Assim, estas tarefas consideram, pelo menos duas partes⁴⁶: uma, discutindo questões que se espera os alunos possam resolver (Parte I) e outra, que busca discutir e promover o desenvolvimento das especificidades do conhecimento do professor (Parte II). Neste texto discutimos as respostas que os participantes do curso (12 professores) deram aos dois primeiros itens da Parte I (que era composta por cinco itens) e aos quatro itens da Parte II, de uma das tarefas implementadas no curso, e que tinha como foco de atenção o conhecimento especializado dos participantes relativamente à noção de medir, à noção de estimativa e às medidas de comprimento.

Figura 2 – A tarefa

<p>Parte I</p> <p>Responda às seguintes questões:</p> <ul style="list-style-type: none">a) O que significa medir?b) Como medir?
<p>Parte II</p> <p>1. Observe a tira de madeira que está em cima da mesa.</p> <p>Estime o valor do seu comprimento;</p> <p>Considerando o elástico, estime o valor do comprimento da tira e explique de que modo pensaste;</p> <p>Usando o elástico, meça e registre o comprimento da tira;</p> <p>Usando o elástico, e a medida obtida, registre em uma folha de papel uma representação do comprimento da tira. Discuta com os teus colegas os resultados obtidos.</p>

Fonte: arquivo autores

Os professores resolveram a tarefa em grupos (quatro elementos cada grupo). A primeira parte da tarefa foi projetada, mas apenas depois de os participantes responderem à alínea a), foi projetada a alínea b).

⁴⁶ Algumas tarefas específicas possuem três partes, mas esta discussão da natureza, objetivos e focos das tarefas para a formação será efetuada em um outro lugar.

Para resolverem a segunda parte da tarefa, primeiramente foi entregue uma tira de madeira para cada grupo e solicitado que os professores não tocassem nela e dessem uma resposta para a primeira questão. Depois de essa resposta ter sido registrada, foram distribuídos os elásticos de borracha. Na tarefa foi proposto que fizessem a estimativa do comprimento da tira, considerando, para tal, o elástico como uma unidade de medida (necessariamente ainda sem se “aproximarem” da tira). Somente após essas etapas os participantes puderam efetivamente medir. Depois das discussões nos grupos e da produção dos registros escritos (resolução dos problemas propostos), toda a turma se reuniu para uma discussão coletiva, mediada pelo formador.

No contexto desta investigação focamo-nos nas produções dos participantes e na discussão coletiva (gravada em áudio e vídeo) relativamente aos dois itens apresentados da Parte I da tarefa e nos quatro itens da Parte II.

Os procedimentos iniciais de análise foram os mesmos para as duas partes da tarefa: inicialmente foram transcritas todas as respostas dos participantes e dos grupos, com a identificação, usando pseudônimos, de quem respondia e posteriormente estas respostas foram agrupadas considerando as suas semelhanças ou diferenças em termos das dimensões do conhecimento especializado revelado. Nesse sentido os agrupamentos foram formados considerando a lente teórica do MTSK e os seus subdomínios do MK relativamente a medir e estimar. Dada a necessidade de múltiplas fontes quando se busca aprofundar o entendimento do conteúdo do conhecimento do professor⁴⁷, de forma a complementar essa análise, foram analisados os vídeos e identificados episódios significativos⁴⁸ associados às

⁴⁷RIBEIRO, M. Das generalidades às especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática: metodologias na conceitualização (entender e desenvolver) do conhecimento interpretativo. In: 38ª REUNIÃO NACIONAL DA ANPED, 2017, [S.l: s.n.], 2018.

⁴⁸RIBEIRO, C. M.; CARRILLO, J. C.; MONTEIRO, R. Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 15, n. 1, p. 93–121, 2012.

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

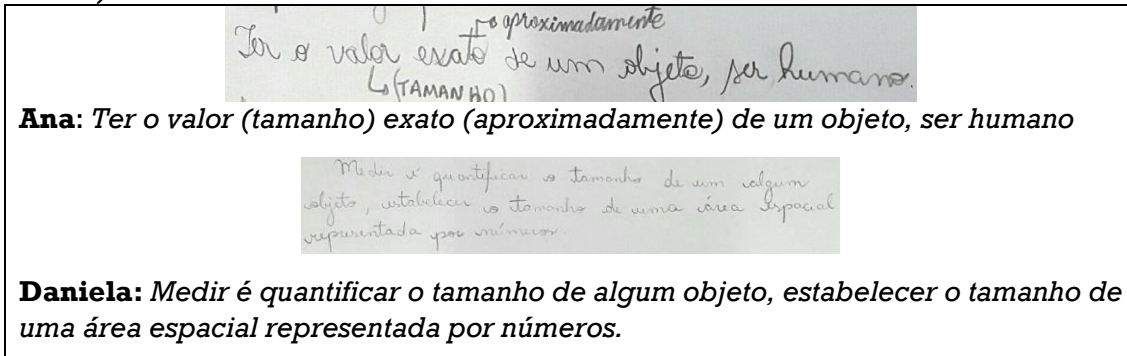
produções dos participantes. Esses episódios foram transcritos sendo complementados pela gravação áudio.

Na análise e discussão que seguirá, apresentamos, por questão de limitação do espaço, apenas as imagens de algumas das produções e comentários coletados, tanto dos registros escritos, quanto dos episódios.

Análise e discussão

A primeira questão da primeira parte da tarefa, (*O que significa medir?*), associa-se ao objetivo de aceder, explorar e discutir o conhecimento do professor relativamente ao que corresponde medir ou, em outros termos, compreender as dimensões do conhecimento especializado dos participantes relacionadas à definição de medida (KoT). Ao apresentarem suas respostas (registros escritos) sete dos 12 formandos associaram o significado de medir à atribuição de um valor ou a quantificar algo, o que pode estar associado à noção de relacionar a medida com um valor numérico⁴⁹ embora tal associação seja apenas uma característica advinda do procedimento de medição, e não do significado de o que é medir.

Figura 3: Respostas ao primeiro da primeira questão da Parte I – (*O que significa medir?*)



The figure shows two handwritten responses in Portuguese. The first response, by Ana, says: 'Ter o valor exato de um objeto, ser humano.' with 'e aproximadamente' written above and '(TAMANHO)' written below. The second response, by Daniela, says: 'Medir é quantificar os tamanhos de um algum objeto, estabelecer os tamanhos de uma área espacial representada por números.'

Ana: Ter o valor (tamanho) exato (aproximadamente) de um objeto, ser humano

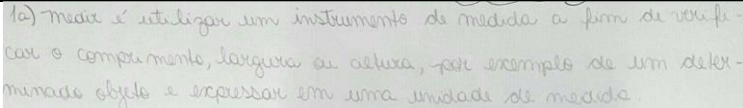
Daniela: Medir é quantificar o tamanho de algum objeto, estabelecer o tamanho de uma área espacial representada por números.

Fonte: arquivo dos autores

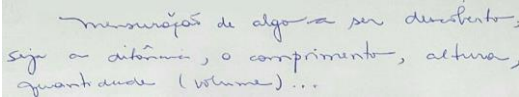
⁴⁹ CLEMENTS, D. H.; STEPHAN, M. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*. New Jersey: LEA: D.H. Clements, J. Sarama, & A-M Di Biase, 2004. p. 299–317.

Ainda de modo complementar é importante ressaltar a necessidade de sete dos participantes recorrerem a algum tipo de exemplo para definir o que é medir (o ser humano, a área) e que dois dos participantes associaram a definição de medir ao uso de um instrumento de medida, não estabelecendo uma distinção entre o que é medir e o que se mede (KoT – procedimento; KPM – definir).

Figura 4: Resposta ao primeiro item da primeira questão da Parte I – (O que significa medir?)



Pedro: Medir é utilizar um instrumento de medida a fim de verificar o comprimento, largura ou altura, por exemplo de um determinado objeto e expressar em uma unidade de medida.



Elvira: Mensuração de algo a ser descoberto, seja a distância, o comprimento, altura, quantidade (volume)

Fonte: arquivo dos autores

Destacamos que dois dos participantes forneceram respostas associando a noção de medir à necessidade de se estabelecer uma referência, embora na resposta escrita, não tenha ficado evidente que a referência seria a unidade de iteração⁵⁰, incluído no KoT, e tampouco que esta serviria para se efetuar uma comparação⁵¹, o que se associa ao KPM do professor.

⁵⁰ CLEMENTS, D. H.; STEPHAN, M. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*. New Jersey: LEA: D.H. Clements, J. Sarama, & A-M Di Biase, 2004. p. 299–317.

⁵¹ CARAÇA, B. DE J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa/Portugal: Bertrand (Irmãos), 1963.

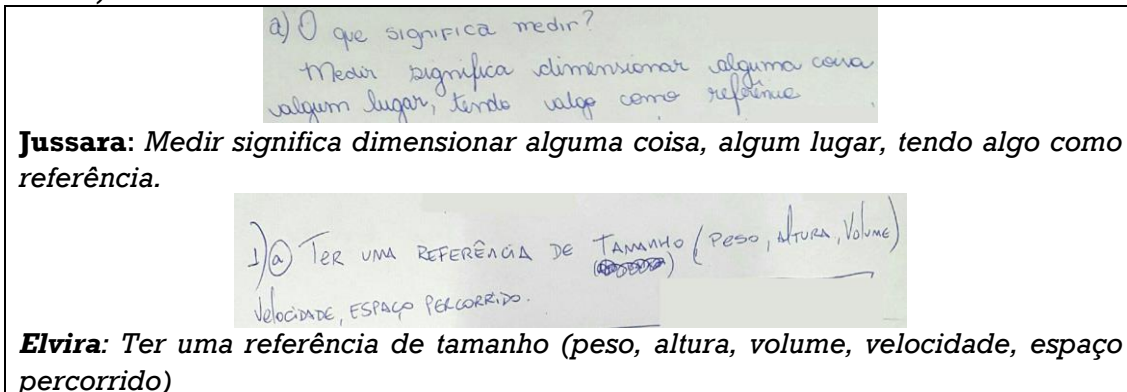
Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

Figura 5: Resposta ao primeiro item da primeira questão da Parte I – (O que significa medir?)



a) O que significa medir?
Medir significa dimensionar alguma coisa
algum lugar, tendo algo como referência

Jussara: Medir significa dimensionar alguma coisa, algum lugar, tendo algo como referência.

1) a) TER UMA REFERÊNCIA DE TAMANHO (PESO, ALTURA, VOLUME)
VELOCIDADE, ESPAÇO PERCORRIDO.

Elvira: Ter uma referência de tamanho (peso, altura, volume, velocidade, espaço percorrido)

Fonte: arquivo dos autores

O momento coletivo permitiu discutir o conhecimento dos formandos relativamente à unidade de iteração e à sua noção associada ao efetuar uma comparação com a grandeza a ser medida.

Formador: O que significa ter uma referência?

Elvira: Ter uma referência para poder fazer uma comparação

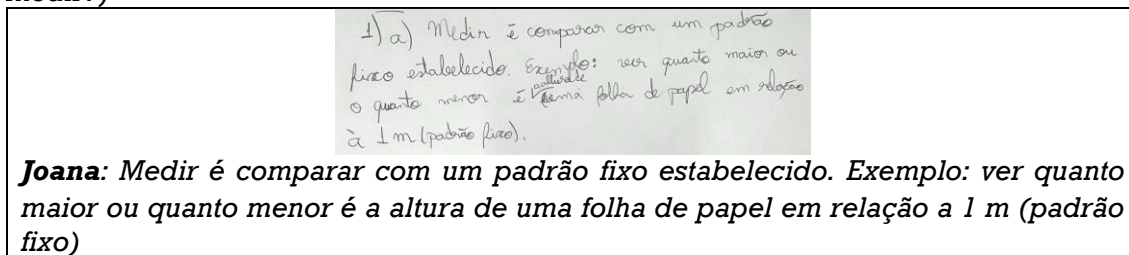
Ernani: É uma unidade de medida

Elvira: É, então, aí você cria uma unidade de medida, né, com essa referência?

Outra questão importante a ser destacada é o fato de que a única resposta que associa explicitamente a noção de que medir é comparar, o faz buscando apoiar tal atividade na premissa de que, para medir, é necessário comparar com um padrão fixo. Esta percepção pode estar vinculada à noção de que ao se medir, é necessário utilizar uma unidade de medida *standard usada de forma standard*⁵²

⁵² Vide nota de rodapé 26.

Figura 6: Resposta ao primeiro item da primeira questão da Parte I – (O que significa medir?)



Fonte: arquivo dos autores

De fato, durante a dinamização da discussão coletiva, ficou evidente que a noção de comparação com um padrão fixo estava associada ao uso de uma unidade de medida *standard* (KoT):

Formador: Por que é que vocês falaram em comparar? Por que é que medir é comparar?

Joana: Porque é, por exemplo, quando a gente fala: tal coisa tem 5 metros. Eu estou comparando com o metro.

Luana: Estou comparando com alguma coisa que eu conheço que possa ter essa medida.

Joana: Ou você fala, sei lá, eu tenho meio metro. Porque eu sei, eu conheço mais ou menos a distância de um metro e eu estou falando que é metade desta distância, em comparação com a unidade. Que é o que ela falou, mais ou menos, do valor de referência (referindo-se à resposta dada por **Elvira** apresentada no diálogo anterior).

A segunda questão da primeira parte da tarefa (“Como medir”) tinha como objetivo aceder ao conhecimento do professor relativamente aos procedimentos de medição (KoT). Em particular buscava aceder e discutir esse conhecimento relativamente aos procedimentos associados a medir (o que compreendem e como compreendem) e de que formas esse procedimento é caracterizado como uma atividade pautada por princípios matemáticos⁵³ que estão presentes em outros contextos (matemáticos), não necessariamente relacionados ao tópico de Grandezas e Medidas, como é o caso da transitividade – que corresponde a um princípio essencial na construção da argumentação lógica para uma demonstração (KPM).

⁵³ CLEMENTS, D. H.; STEPHAN, M. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*. New Jersey: LEA: D.H. Clements, J. Sarama, & A-M Di Biase, 2004. p. 299–317.

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

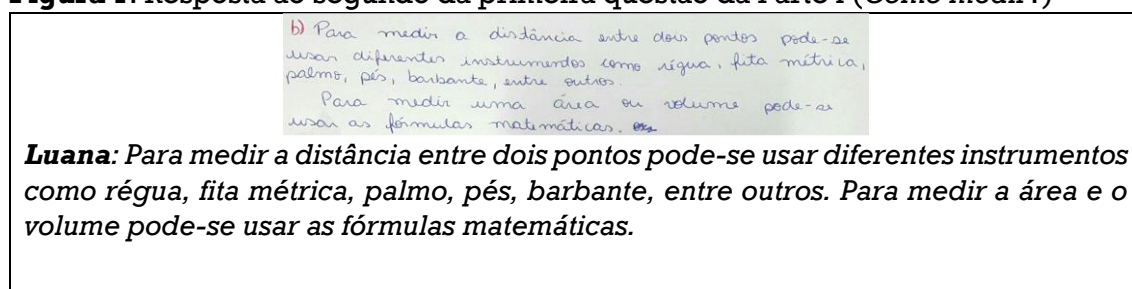
| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

Além disso, considera-se que as noções associadas ao “*como medir*” representam um papel central no entendimento, por exemplo, do sentido de número (enquanto quantidade ou enquanto medida); de operação (divisão como medida); da construção do conjunto numérico dos racionais (construção da noção de quantidades contínuas); de que o princípio de conservação é importante e está presente também em outros contextos como as transformações geométricas – rotação e translação (KSM).

Nesse sentido, quando foram solicitados a discutirem sobre procedimento de medir (como se mede), nove dos 12 professores forneceram como resposta a utilização de um instrumento de medição (régua, fita métrica, palmo, pés).

Figura 7: Resposta ao segundo da primeira questão da Parte I (*Como medir?*)

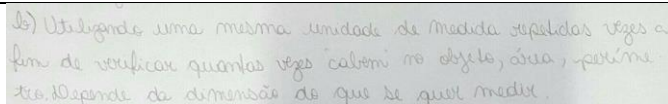


Fonte: arquivo dos autores

Apenas dois dos participantes forneceram respostas fazendo referência ao procedimento de medição enquanto um processo associado à partição do objeto a ser medido (KoT). Em particular uma dessas respostas apontou a iteração da unidade de referência associada à contabilização da quantidade de vezes que esta unidade foi iterada. No entanto, nesta resposta não é referida a necessidade de que tal iteração ocorra sem que sejam deixados espaços entre duas unidades subsequentes ou que se sobreponham unidades adjacentes⁵⁴.

⁵⁴CLEMENTS, D. H.; STEPHAN, M. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*. New Jersey: LEA: D.H. Clements, J. Sarama, & A-M Di Biase, 2004. p. 299–317.

Figura 8: Resposta ao segundo da primeira questão da Parte I (Como medir?)

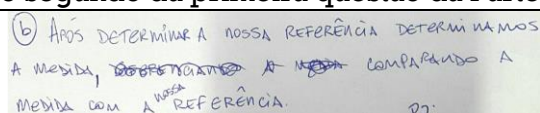


Pedro: Utilizando uma mesma unidade de medida repetidas vezes a fim de verificar quantas vezes cabem no objeto, área, perímetro. Depende da dimensão do que se quer medir

Fonte: arquivo dos autores

Quatro professores referiram-se à noção de comparação para responder à questão relativa ao procedimento de medição, o que significa corresponder a definição (o que é) com o procedimento de medir (como faz) (KoT).

Figura 9: Resposta ao segundo da primeira questão da Parte I (Como medir?)



Elvira: Após determinar nossa referência, determinamos a medida comparando a medida com a nossa referência.

Fonte: arquivo dos autores

Durante a discussão coletiva, um dos professores manifestou sua dificuldade em diferenciar as noções implícitas nas questões “a” e “b” relativamente às diferenças entre “o que é medir” e “como se mede”:

Joana: Eu tive muita dificuldade de diferenciar a (questão) “a” e a (questão) “b” porque elas são muito parecidas para mim. Eu respondi: o que significa medir? Comparar. Aí, na (questão) b: como medir? Eu respondi: comparando!

Mesmo não tendo associado a ideia de procedimento de medida com o uso de algum instrumento de medição, esta resposta revela um conhecimento associado à diferenciação da definição de medida (KPM) do procedimento de medir (KoT). Estas são evidências da necessidade de se desenvolver a dimensão do conhecimento especializado em que se encontram associados os significados, definições e procedimentos de medidas. Em quatro outras respostas os participantes consideraram a necessidade de se estabelecer uma referência no procedimento do como medir, o que, de fato, pode estar associado à noção de se estipular uma

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

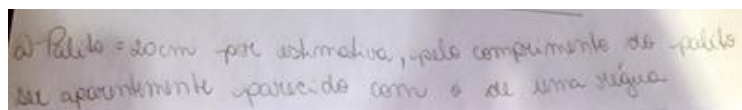
| Miguel Ribeiro

unidade de iteração⁵⁵, ou seja, ao conhecimento que detêm sobre os princípios que pautam a atividade de medir (KoT e KPM).

Nenhum dos participantes considerou o fato de só se poderem medir grandezas de uma mesma natureza⁵⁶, isto é, caso se queira medir, por exemplo, o comprimento de um objeto utilizando como referência um objeto tridimensional, é possível estabelecer, ao menos, três unidades de iteração, desde que sejam todas de mesma natureza – comprimento, no caso (KoT – no procedimento de medir e KSM – no que concerne às conexões). Esta noção acabou sendo discutida com o grande grupo, a partir das intervenções do formador.

Para a segunda parte da tarefa cada um dos grupos recebeu uma tira de madeira (palito) e foram convidados a responder a primeira questão (*Observe a tira de madeira que está em cima da mesa. Estime o valor do seu comprimento*). Ao serem solicitados a estimar o comprimento da tira de madeira todos os professores optaram por utilizar uma parte do corpo ou objeto simultaneamente como instrumento e unidade de medida. No entanto, sentiram a necessidade de fazer referência à uma unidade *standard*, submúltiplo do metro (o centímetro):

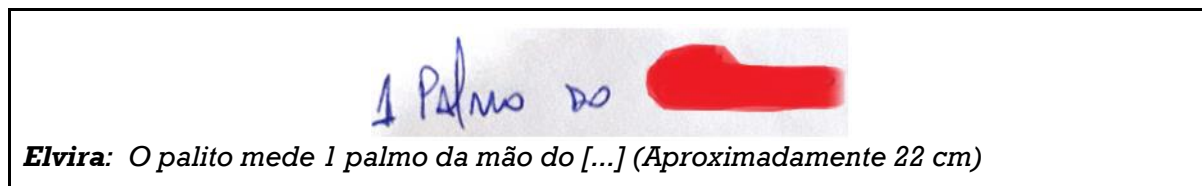
Figura 10: respostas ao primeiro da primeira questão da Parte II – (“*Estime o valor do seu comprimento*”)



Jussara: Palito = 20 cm por estimativa, pelo comprimento do palito ser aparentemente parecido com o de uma régua

⁵⁵ CLEMENTS, D. H.; STEPHAN, M. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*. New Jersey: LEA: D.H. Clements, J. Sarama, & A-M Di Biase, 2004. p. 299–317.

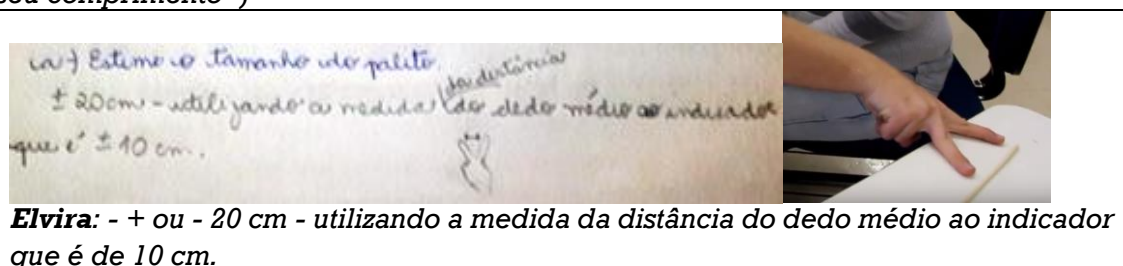
⁵⁶ CARAÇA, B. DE J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa/Portugal: Bertrand (Irmãos), 1963.



Fonte: arquivos dos autores

Embora tenham sido solicitados a realizar uma estimativa, alguns grupos recorreram a uma medição direta (KoT), sem se atentarem para o fato de que, desse modo, não estavam realizando uma estimativa⁵⁷.

Figura 11: Resposta ao primeiro da primeira questão da Parte II – (“Estime o valor do seu comprimento”)



Fonte: arquivo dos autores

Esta primeira questão associa-se ao objetivo de aceder, explorar e discutir o conhecimento e entendimento dos participantes associado à estimativa (“o que corresponde estimar”) e à necessidade de definir uma determinada unidade que permita efetuar a estimativa da medida de comprimento (KoT). No entanto, para estimar, todos os professores sentiram necessidade de indicar uma resposta final em *cm*, tendo usado para isso uma comparação dupla (transitividade)⁵⁸ envolvendo instrumentos de medida standard (“pensar na régua” – **Joana**), ou uma medida não standard (“medida da distância do dedo médio ao indicador” – **Ernani**) e, posteriormente, uma comparação com o *cm* (KoT). Este tipo de resposta era já o esperado pela ausência explícita de uma unidade de comparação, o que difere das tarefas

⁵⁷ PIZZARRO, N.; GORGORIO, N.; ALBARRACÍN, L. Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. In: INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XVIII (SEIEM), 2014, Salamanca. Espanha. *Anais...* Salamanca. Espanha.: M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega, 2014. p. 523–532.

⁵⁸ CLEMENTS, D. H.; STEPHAN, M. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*. New Jersey: LEA: D.H. Clements, J. Sarama, & A-M Di Biase, 2004. p. 299–317.

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

comumente encontradas nos livros didáticos ou exploradas em cursos de formação – o que se associa à natureza, foco e objetivos das tarefas conceitualizadas para a formação de professores⁵⁹. Apesar de não ser requerido, e o objetivo da questão ser, inclusive, o oposto, os professores usam uma linguagem formal (*cm*) para indicar a medida do comprimento da tira (KPM), o que pode ser indicativo de que possuem uma visão da necessidade de formalismo matemático, mesmo quando essa necessidade não se verifica. O recurso à transitividade (ainda que inconsciente), buscando como ponto de chegada uma resposta usando uma unidade *standard*, pode ser considerado como um elemento do conhecimento do professor (já consolidado) ou uma situação matematicamente crítica, e assim, oportunidade para o desenvolvimento desse conhecimento (relacionando-o com o KSM – transitividade e linguagem e o KPM – a que corresponde o “fazer matemática”).

De fato, ao buscar desenvolver o conhecimento dos professores relativamente ao que significa medir e estimar, associando-se esta noção com a de comparação⁶⁰, a discussão coletiva focou-se no conhecimento do professor relativamente às diferentes unidades de comparação que podem ser utilizadas e as implicações disso na compreensão do significado de medir.

Figura 12: imagem e discussão e sobre relação da medida com valor numérico

Formador: *Portanto, se eu perguntar, quanto mede esta coisa?*

(segurando uma caneta de quadro branco)

Pedro: *dez, eu acho*

Vários formandos: *Doze...*

Formador: *Toda a gente concorda que dá a volta de doze?*

Alguns formandos: *É... aproximadamente, doze...*

Formador: *Pois... para mim dá...*

Elvira: *Quer uma régua?*



⁵⁹ Vide nota de rodapé 39.

⁶⁰ PIZZARRO, N.; GORGORIO, N.; ALBARRACÍN, L. Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. In: INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XVIII (SEIEM), 2014, Salamanca. Espanha. *Anais...* Salamanca. Espanha.: M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega, 2014. p. 523–532.

Formador: (acenando negativamente, recusando a oferta da régua) *Para mim dá 725.*
Vários formandos: *o quê? 725 o quê?*
Formador: *Vocês também disseram doze!*
Vários formandos: *Centímetros!*
Formador: *Não, não... eu perguntei se toda a gente concordava que dava doze. Disseram que sim!*
Luana: *Centímetros, né?*
Formador: *Vocês disseram, mas... essa não foi a minha pergunta!*
Jussara: *Então, 725 o quê?*
Formador: *Só perguntaram para medir, não perguntaram com o quê! Eu perguntei qual é a medida disto (com a caneta de quadro branco na mão), mas eu não perguntei qual é a medida disto, para medir com o quê! Porque medir é efetivamente comparar. Vocês compararam com uma coisa, eu comparei com outra.*

Fonte: arquivo dos autores

A escolha de um valor para representar o comprimento da caneta que fosse substancialmente maior que aquele referido pelos professores, se deu, por um lado, para abrir uma discussão sobre o tipo de unidade de iteração que seria utilizada para efetuar a medição e o resultado numérico dessa medição (KoT), por outro lado, para se colocar em debate o uso de unidades de medida *standards* sempre como recurso primeiro (e último) no processo de ensino e aprendizagem do tópico de medidas (KPM).

Para a segunda questão da Parte II da tarefa (*Considerando o elástico, estime o valor do comprimento da tira e explique de que modo pensaste*), foi fornecido um elástico para cada um dos grupos e, com esta questão se pretendia que os formandos mobilizassem o seu conhecimento sobre a que corresponde estimar⁶¹ a partir da estratégia de estimativa por referência⁶², e a relação deste conceito com a noção de medir (partição); necessidade de definir a unidade de medida – multiplicidades de forma de utilizar o elástico para efetuar a medição e utilização do instrumento de medida sempre do mesmo modo (iteração); e atribuição de um valor à medida, identificando a

⁶¹ PIZZARRO, N.; GORGORIO, N.; ALBARRACÍN, L. Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. In: INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XVIII (SEIEM), 2014, Salamanca. Espanha. *Anais...* Salamanca. Espanha.: M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega, 2014. p. 523–532.

⁶² JORAM, E. *et al.* Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 36, n. 1, p. 4–23, 2005.

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro
| Alessandra Rodrigues de Almeida
| Miguel Ribeiro

unidade utilizada (relação com um valor numérico). As respostas fornecidas sustentam-se nos procedimentos efetuados anteriormente, mesmo quando não era fornecida a unidade de medida.

Figura 13: Respostas ao segundo item da Parte II da tarefa – (“Considerando o elástico, estime o valor do comprimento da tira e explique de que modo pensaste”)


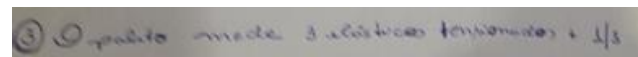
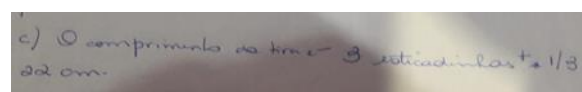
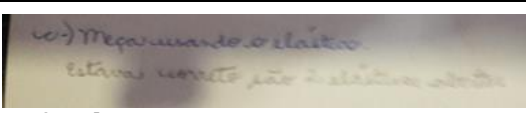
<p>Raissa: 2 elásticos abertos sem esticar, usamos a abertura dos dedos da colega [nome]</p>
<p>Luana: Três elásticos + 1/3 de elástico. Usamos como referência o palmo do [nome do colega] para saber quantos elásticos esticados cabem no palmo dele. Elástico esticado é igual ao elástico tensionado.</p>
<p>Elvira: 4 esticadinhas do elástico. Pensei de acordo com a referência do palmo, quantas esticadinhas do elástico cabem dentro de um palmo.</p>
<p>Jussara: Mais ou menos dois elásticos abertos esticados, porém sem puxar</p>

Fonte: arquivo dos autores

Todos os formandos realizaram a estimativa do comprimento da tira tendo por base a utilização do procedimento *standard* de medição do comprimento (KoT), considerando a medida do maior comprimento do elástico como unidade de referência, variando apenas o nível de tensão aplicada ao elástico (“elásticos abertos” e “elásticos esticados”).

Na terceira questão, (*Usando o elástico, meça e registre o comprimento da tira*) pretendia-se relacionar o modo como foi feita a estimativa e o modo como de fato foi realizada a medição, utilizando o mesmo instrumento (KoT).

Figura 14: Respostas ao terceiro item da Parte II da tarefa – (“Usando o elástico, meça e registre o comprimento da tira”)

 <p>Kelly - O comprimento da tira é equivalente a 3 elásticos sem estarem esticados</p>
 <p>Luana - 3 elásticos esticados + $\frac{1}{3}$</p>
 <p>Elvira - O comprimento da tira é 3 esticadinhas + $\frac{1}{3}$. 22 cm</p>
 <p>Ermani - Estava correto. São 2 elásticos abertos</p>

Fonte: arquivo dos autores

Embora alguns participantes não recorram ao uso do *cm*, todos utilizam o procedimento *standard* de medição do comprimento (KoT)⁶³. Ressalta-se o registro efetuado por **Luana** e **Elvira**, referindo-se a uma medida fracionária da unidade de referência (o elástico) para indicar que o comprimento da tira excede as três unidades inteiras de elástico. No entanto, não há uma preocupação de efetuar os registros de forma matematicamente adequada pois ao se referirem à parte fracionária ($\frac{1}{3}$) não consideram a unidade de referência, embora esteja implícito que se esteja falando do elástico, o que se associa a um conhecimento da integração de temas matemáticos (KSM) e da sintaxe matemática (KPM).

A última questão (*Usando o elástico, e a medida obtida, registre em uma folha de papel uma representação do comprimento da tira. Discuta com os teus colegas os resultados obtidos*) tinha por objetivo mobilizar conhecimentos dos participantes acerca das diferentes formas de representação e modos de

⁶³ Vide nota de rodapé 22.

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

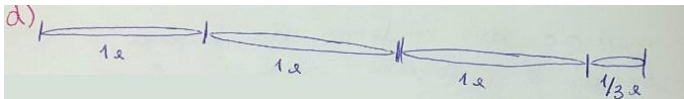
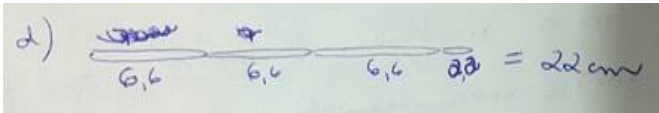

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

navegar entre elas⁶⁴, além da sua relação com os princípios daquilo que encerra a atividade de medir (KoT).

Figura 15: Respostas ao quarto item da Parte II da tarefa – (“Usando o elástico, e a medida obtida, registre em uma folha de papel uma representação do comprimento da tira. Discuta com os seus colegas os resultados obtidos”)

Luana	
Elvira	
Elvira	 <p>Onde e=elástico tensionado</p>

Fonte: arquivo dos autores

Todos os formandos demonstram associar a atividade de medir ao uso do instrumento de medida de um modo *standard*⁶⁵, determinado o valor da medida da tira por comparação com a maior medida do elástico – comprimento do elástico (KoT) sem estar esticado. Além disso, apenas um formando associa (por transitividade), o comprimento da tira ao uso da linguagem formal (*cm*) em sua representação (KSM). Salienta-se também que, apesar de terem apresentado uma resposta incompleta na questão anterior (**Luana:** 3 elásticos esticados + $\frac{1}{3}$; **Elvira:** O comprimento da tira é 3 esticadinhas + $\frac{1}{3}$), os participantes elaboram representações que, fazendo uso da sintaxe matemática, revelam um nível de compreensão da noção de racional associada à quantidade – $\frac{1}{3}$ do elástico (KSM), recorrendo **Elvira** à

⁶⁴ RIBEIRO, M. Abordagem aos números decimais e suas operações: a importância de uma “eficaz navegação” entre representações. *Educação e Pesquisa*, v. 37, n. 2, p. 407–422, 2011.

⁶⁵ RIBEIRO, M. *et al.* Intertwining noticing and knowledge in video analysis of self practice: the case of Carla. In: CERME 9, 2017, Dublin. *Anais... Dublin*: [s.n.], 2017. p. a aparecer.

transitividade para a representação da quantidade dessa medida em linguagem formal (*cm*).

Considerações Finais

A análise das produções e dos registros das discussões coletivas realizadas na sessão de formação, evidenciou que a maior parte dos participantes, quando solicitados a apresentar um significado do que corresponde medir, associou a indicação de uma definição ao fornecer um exemplo. Tal opção parece ser usual e pode estar associada à imagem mental que um indivíduo elabora a partir de um conceito que lhe foi definido e como a imagem do conceito e a definição deste conceito se organizam em seu processo cognitivo⁶⁶.

Nesse sentido, urge que a formação de professores tenha como foco a promoção do desenvolvimento do conhecimento especializado do professor, e como um de seus objetivos, desenvolver aspectos relacionados ao que é definir e representar um conceito (situando esse conhecimento e as situações exploradas na prática do professor), a fim de que propicie um mais amplo entendimento do que corresponde definir, como se gera uma definição de um conceito e o papel que as formas e registros de representação deste conceito exercem em sua compreensão. Este tipo de foco busca contribuir para uma discussão centrada nos três subdomínios do conhecimento especializado do professor que forma parte do MK (KoT, KSM e KPM), o que permitirá, posteriormente, sustentar o desenvolvimento das dimensões do PCK já que este é sustentado pelo MK⁶⁷.

Outra evidência extraída a partir da análise das produções dos participantes (respostas escritas e comentários das discussões) está relacionada com a manutenção de determinados procedimentos de medição,

⁶⁶ TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, p. 151–169, 1981.

⁶⁷ BAUMERT, J. *et al.* Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom and Student Progress. *American Educational Research Journal*, v. 47, n. 1, p. 133–180, 2010.

Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa

| Milena Soldá Policastro

| Alessandra Rodrigues de Almeida

| Miguel Ribeiro

na linha de Clements e Stephan⁶⁸, revelando também a priorização pela necessidade (mesmo quando não solicitado) de expressarem a medida recorrendo a uma unidade formal (*cm*). Estes resultados, emergentes de uma situação que se configurou como matematicamente crítica para os formandos, reforça a necessidade de um foco nas dimensões do conhecimento matemático do professor, considerando as especificidades desse conhecimento no que se refere, em particular, aos procedimentos *standard* de medição (KoT), as possibilidades de utilização de instrumentos (convencionais ou não convencionais) de medida de forma não convencional (KPM), discutindo o efetivo sentido de medida e da unidade que se considera⁶⁹.

Esta pesquisa mostrou ainda que outro foco futuro de atenção relaciona-se com o conhecimento do professor relativamente ao que corresponde estimar e às diferentes estratégias de estimativa, ampliando esse conhecimento também, no contexto da medida, ao que corresponde medir – não se limitando, portanto, a uma visão no contexto dos Números e Operações.

Nesta pesquisa, estabelecemos como foco o conhecimento especializado do professor relacionado à estimativa e à medida unidimensional (comprimento), no entanto, considera-se fundamental o desenvolvimento de pesquisas futuras que contribuam para ampliar o entendimento que se detém do conteúdo do conhecimento especializado do professor relativamente a medidas que envolvam outras dimensões como área, capacidade e volume, ou outras grandezas como massa, tempo, temperatura.

⁶⁸ CLEMENTS, D. H.; STEPHAN, M. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*. New Jersey: LEA: D.H. Clements, J. Sarama, & A-M Di Biase, 2004. p. 299–317.

⁶⁹ Vide nota de rodapé 22.

Agradecimentos:

Este texto foi produzido tomando por base o trabalho desenvolvido no âmbito do projeto "Conhecimento matemático especializado do professor que ensina matemática na educação infantil e nos anos iniciais: um foco em conteúdos de Geometria", processo número 2016/22557-5, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Recebido: 21/11/2017

Aprovado: 02/04/2018