Educere Et Educare
Revista de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação – Universidade Estadual do Oeste do Paraná

# DA PERCEPÇÃO À IMAGINAÇÃO: ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS E ONTOLÓGICOS DA VISUALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Dr. José Carlos Cifuentes** 0000-0002-8005-6965
Universidade Federal do Paraná - UFPR
**Me. Alessandra Hendi dos Santos** 0000-0002-2620-3135
Universidade Estadual de Maringá - UEM

**RESUMO:** A busca pelos modos de acesso ao mundo matemático exige uma compreensão mais abrangente sobre a "natureza da matemática", e nos faz repensar seu ensino menos algorítmico e mais comprometido com a construção conceitual. A "visualização" fundamenta a sensibilidade matemática como uma capacidade legítima de acesso ao conhecimento matemático, sendo a intuição e a imaginação essenciais para seu entendimento. Dessa maneira, a questão emergente nesse artigo é a seguinte: de que forma a visualização pode contribuir para a compreensão e a construção do conhecimento matemático? O objetivo é investigar diversas formas de visualização e o modo como elas podem colaborar para a compreensão e construção do conhecimento matemático, apontando suas características epistemológicas e ontológicas, e questionando sua cientificidade. Desse modo, a visualização, transformada também numa forma de "pensamento visual", resulta ser um recurso de concretização de conceitos, sejam abstratos ou não, dando-lhes forma, movimento, trazendo-os para o mundo da nossa intuição. Assim, a visualização, alargando as possibilidades da matemática, se torna um tema de interesse para a Filosofia da Matemática e da Educação Matemática.

**PALAVRAS-CHAVE:** Visualização matemática; percepção; imaginação.

# FROM PERCEPTION TO IMAGINATION: EPISTEMOLOGICAL AND ONTOLOGICAL ASPECTS OF VISUALIZATION IN MATHEMATICS

**ABSTRACT:** The search for modes of access to the mathematical world requires a more comprehensive understanding of the "nature of mathematics", and makes us rethink its teaching as less algorithmic and more committed to conceptual construction. "Visualization" grounds mathematical sensibility as a legitimate ability to access mathematical knowledge, with intuition and imagination being essential to its understanding. Thus, the emerging question in this paper is the following: how can visualization contribute to the understanding and construction of mathematical knowledge? This paper aims to investigate several forms of visualization and how they can contribute to the understanding and construction of mathematical knowledge, pointing out their epistemological and ontological characteristics, and questioning their scientificity. Therefore, visualization, also transformed into a form of "visual thought", turns out to be a resource for the concretization of concepts, whether or not abstract, giving them form, movement, bringing them into the world of our intuition. Thus visualization, extending the possibilities of mathematics, becomes a topic of interest for the Philosophy of Mathematics and of Mathematical Education.

**KEYWORDS:** Mathematical visualization; perception; imagination.

## INTRODUÇÃO: A VISUALIZAÇÃO NUMA CONCEPÇÃO ALARGADA DE MATEMÁTICA

*A arte não reproduz o visível, ela torna visível.*
*Paul Klee*

O notório engessamento do ensino de matemática pode estar relacionado com uma concepção docente de matemática como sendo uma ciência rígida, totalmente lógica e algorítmica, cuja principal finalidade é a aplicação. Para Sérgio Lorenzato (1995), constata-se que o ensino de matemática tem imprimido nos alunos uma "aritmetização" do raciocínio, uma algoritmação do pensamento matemático, negligenciando-se o lado sensível da matemática, mais perto da intuição e da imaginação que da lógica.

Uma compreensão mais abrangente sobre a natureza da matemática em que a intuição e a imaginação estejam também contempladas como formas de acesso aos objetos matemáticos e ao seu conhecimento, torna-se uma necessidade na formação docente. A visualização, que analisaremos, tem se mostrado como um dos modos de dar suporte a essa compreensão ampla, compreensão que desloca o entendimento da matemática de um corpo sistematizado de conhecimentos para uma forma de pensamento, constituindo-se, assim, num estudo relevante para se pensar num ensino com mais comprometimento com a construção conceitual e em desfavor a uma instrumentalização algorítmica (aritmetização) do conhecimento matemático. Um ensino que promova, no aluno, autonomia e postura crítica diante do conhecimento matemático e do mundo em geral.

Numa primeira aproximação, compreender é tornar "evidente" o que não é. Portanto, há uma necessidade de "ver" para compreender. Assim, iremos conceber a visualização como sendo um recurso de "concretização" de conceitos, sejam abstratos ou não, dando-lhes forma, movimento, trazendo-os para o mundo da nossa intuição a fim de serem "vistos" por ela.

A nossa epígrafe, devida ao artista alemão Paul Klee, pode ser parafraseada da seguinte maneira: "Visualizar não é apenas ver o visível, é principalmente tornar visível", o que salienta a necessidade de explicitar a) a visualização como um processo e suas características epistemológicas, b) sua ontologia e cientificidade, e c) suas características argumentativas configurando uma forma de "pensamento visual".

A visualização, na medida que não é um processo de caráter lógico e/ou calculístico, pois vai na direção contrária à "aritmetização", fundamenta a sensibilidade matemática como uma capacidade legítima de acesso ao conhecimento matemático. O crítico de arte e filósofo Pierre Francastel diz que "As fórmulas são explicações, e não fontes de inspiração. A obra viva sai da imaginação e não do cálculo". O matemático e filósofo Bertrand Russell também afirma que "A razão é mais uma força harmonizadora, controladora, do que criadora. Mesmo no domínio do mais puramente lógico, é a visão que em primeiro lugar atinge o novo". Vemos, então, que um aprimoramento da visualização pode contribuir para a criatividade em matemática.

Dessa maneira, a questão emergente nesse artigo é a seguinte: de que forma a visualização pode contribuir para a compreensão e a construção do conhecimento matemático? Este estudo objetiva, visando a formação do professor de matemática, investigar diversas modalidades da visualização em matemática e o modo como elas podem colaborar para a compreensão e construção do conhecimento matemático, enfatizando o processo de visualização em seu papel epistemológico de atribuição da concretude na elaboração e aquisição desse conhecimento, identificando também sua ontologia, isto é, as entidades que são objeto da visualização. Obviamente, este é um assunto de reflexão para a filosofia da matemática e, na sua perspectiva pedagógica, da educação matemática.

## VISUALIZAÇÃO E GEOMETRIZAÇÃO: UMA RELAÇÃO EPISTEMOLÓGICA

Em (CIFUENTES, 2003) concebe-se a visualização como uma forma de experiência que constrói significados e atribui sentidos aos apelos intuitivos. Desse modo, a visualização e a intuição estão intimamente ligadas. A intuição, e com ela o pensamento visual e o raciocínio visual, na medida em que permitem acessar ao mundo matemático, bem no espírito de Paul Klee, tornam-se essenciais no entendimento da visualização. Para Descartes, a intuição, como capacidade cognitiva, é uma das operações da compreensão. Ela, diferentemente da lógica, trabalha com relações estruturais, padrões, enquanto que a lógica com relações funcionais, regras. Elas complementam-se no processo de cognição. A intuição é a que permite "ver", diríamos melhor "visualizar", a essência do "objeto experienciado", isto é, a sua forma, sua estrutura.

Tradicionalmente, uma maneira "elegante" de tornar "visível" uma ciência é através dos processos de matematização, especialmente a geometrização, e esta pode ser entendida de duas formas: a) em sua capacidade de sistematização da ciência através do método axiomático, e b) como um recurso não lógico de racionalidade visual, um recurso que não apela a grandezas e medidas e também não se restringe à visualização através da percepção. Da primeira forma, foram notórias, no século XVII, as sistematizações *more geometrico* do conhecimento filosófico por Spinoza na sua *Ética*, e do conhecimento físico por Newton em seu *Principia*.

A geometria, no segundo caso, deve ser entendida não apenas como objeto, senão principalmente como método (a geometrização), pois tem esse papel primordial nos processos de visualização. Howard Eves (1992) manifesta que com o advento dos espaços abstratos no século XIX, e a geometria se desligando da realidade, como no caso das geometrias não-euclidianas, "só a terminologia e o modo de raciocinar tornam um assunto "geométrico"" (p. 28). A geometria não é mais um corpo de conhecimentos, "é um ponto de vista, uma maneira particular de observar o assunto" (p. 28). A geometria, então, deixa de ser um conhecimento para virar um método.

Diante dos apontamentos iniciais, discutiremos, neste estudo, vários tipos de visualização, dentre eles os que denominaremos por 'visualização geométrica', 'visualização algorítmica', 'visualização por argumentação analógica' e 'visualização por atribuição de sentidos'.

Com a conceitualização teórica que construiremos sobre a visualização, nos "aventuramos", na sequencia, a discutir a sua cientificidade apontando suas características epistemológicas e ontológicas. Para tanto, tomaremos como principal referência histórica a própria geometria de Euclides em cuja construção teórica a visualização, traduzida nos processos de construção geométrica, era considerada uma forma legítima de raciocínio matemático, paralelamente à demonstração lógica.

## VISUALIZAÇÃO E RELAÇÕES ENTRE GEOMETRIA E ÁLGEBRA

A visualização, mesmo sendo fundamentalmente considerada como uma predisposição relacionada ao ato de ver, diz respeito também às capacidades mentais de percepção espacial, não somente ao que está posto diante aos olhos. "O próprio termo 'visual' pode não ter a ver com a visão, um dos cinco sentidos, mas pode referir-se também às propriedades espaciais e às suas relações" (COSTA, 2000, p. 170), relações percebidas com um "olhar" de ordem superior.

Desse ponto de vista, à visualização compete também o sentido de realidade (de realidade "espacial"), o sentido da verdade, uma vez que estamos observando e tendo a experiência de algo. Para Cifuentes,

> a visualização será o principal mecanismo para "ver" a verdade de um resultado matemático sem recurso à demonstração lógica. As demonstrações visuais farão uso possivelmente de uma linguagem visual


DOI: 10.17648/educare.v15i33.22530

> apropriada, envolvendo também meios computacionais. (CIFUENTES, 2005, p. 71)

E acrescenta: “Todo conceito de visualização remete a uma certa “realidade”, pois ‘a realidade é a experiência visual básica’” (CIFUENTES, 2005, p. 72).

Um dos recursos mais utilizados para fazermos demonstrações visuais em diversos campos da matemática são os diagramas. Como exemplo, devemos destacar os chamados de ‘diagramas de Venn’ no campo da teoria de conjuntos. Além deles,

> Em Matemática existem [outros] recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade. Um exemplo bastante conhecido é a representação do teorema de Pitágoras, mediante figuras que permitem “ver” a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos. (PCN’s 1998, p. 45, grifo nosso)

Na perspectiva da Educação Matemática, o tipo de visualização mais encontrado na literatura acadêmica é a geométrica, pois é notório que um dos tipos de intuição matemática de mais fácil aprimoramento é a intuição geométrica. O próprio nome ressalta que a visualização geométrica traz um apelo geométrico para o visual, um certo caráter “espacial”. Para Cifuentes (2010), a visualização precisa de um “espaço de representação” onde estejam localizados os padrões que sejam objeto da visualização, mesmo que este espaço não seja aquele da percepção visual. Trata-se de ver o que está ante os olhos, ou também ver com os olhos do intelecto, utilizando-se de conceitos e construções próprios da geometria, a fim de estabelecer relações matemáticas tanto geométricas quanto algébricas.

Foi, sobretudo, na geometria de Euclides que a visualização e a geometria tornaram-se “cúmplices”, pois, uma foi se tornando indispensável para a outra. “Os axiomas da geometria euclidiana são apresentados sugerindo construções, sendo fundamental a palavra traçar, sugerindo um recurso ao visual” (CIFUENTES, 2003, p. 64). Por exemplo, o primeiro axioma de Euclides determina operacionalmente que “pode-se traçar uma reta de um ponto a outro”. A primeira proposição demonstrada por Euclides determina que “pode-se construir um triângulo equilátero a partir de um segmento dado”.

Na própria terminologia geométrica, segundo Cifuentes (2003), encontramos palavras de origem e conotação visuais como: congruência, semelhança, diferença, forma, clareza, evidência. Portanto, os conceitos, para serem considerados geométricos, devem apresentar além de suas propriedades formais, também correspondências com apelo visual. Usualmente consideramos por conceitos geométricos as figuras geométricas às quais são atribuídas definições em certo sistema axiomático, porém, como aponta Fischbein, "uma figura geométrica pode ser descrita como tendo, intrinsecamente, propriedades conceituais, porém, ela não é puro conceito, é também uma imagem, uma imagem visual" (1985, *apud* D'AMORE, 2007, p. 189).

Na geometria analítica os conceitos geométricos, traduzidos agora em algébricos, não são mais tão "evidentes", porém a visualização está presente através de sua interpretação gráfica nos sistemas de coordenadas.

Nessa evolução, os aspectos formais foram separados dos visuais ao longo do tempo, porém, esses últimos são recuperados, especialmente nas geometrias não-euclidianas, nos chamados usualmente de modelos ou interpretações (CIFUENTES, 2003). Um 'modelo' é uma forma de ver, isto é, um ponto de vista, um enfoque, terminologia própria do visual.

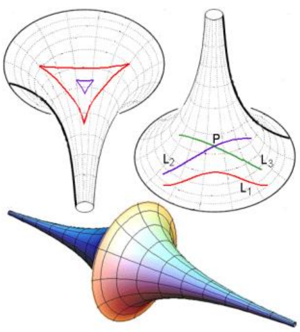


Figura 1 - Modelo de Beltrami da Geometria de Lobachevski.
Fonte: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2013/09/lobachevsky-e-as-geometrias-nao.html

A figura 1 mostra a pseudo-esfera de Beltrami (1868) como espaço de concretização/visualização dos objetos e propriedades da geometria plana de Lobachevski.

A visualização resultante do raciocínio visual associado aos conceitos geométricos é, também, uma forma de alcançar o conhecimento algébrico.

Como exemplo, temos a visualização geométrica do teorema de Pitágoras auxiliando os estudantes na compreensão, interpretação, e até na formulação de conjecturas matemáticas a respeito desse teorema. Essa visualização é um passo preparatório para o entendimento da formalização de alguns conceitos matemáticos, como é o caso da fórmula a direita na figura 2, cujo significado geométrico estabelece uma relação entre as áreas dos quadrados construídos em cada lado do triângulo.

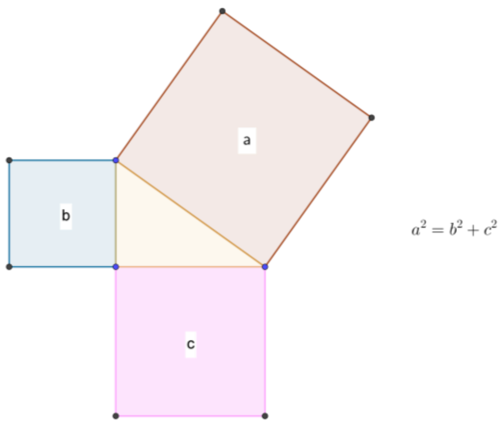


Figura 2 - Visualização geométrica do teorema de Pitágoras.
Fonte: Autores

Essa mesma imagem visual estimula a formulação de diversas conjecturas, assim, podemos nos questionar se a mesma relação de áreas ocorre substituindo os quadrados por triângulos equiláteros, ou por semicírculos, ou por figuras mais gerais, o que de fato ocorre como demonstrado por George Polya, em 1945, para figuras semelhantes colocadas em cada lado do triângulo (1966, p. 41-43).

Dois exemplos ilustrativos de visualização geométrica da álgebra é a atribuição de um sentido geométrico aos números reais através da chamada de


DOI: 10.17648/educare.v15i33.22530

‘reta numérica’, base da geometria analítica, e aos números complexos através do ‘plano de Gauss-Argand’. Na reta numérica, os números reais viram pontos, assim também os números complexos viram pontos do plano, o que permite descobrir diversas propriedades algébricas e de ordem desses números através de seu comportamento geométrico.

Ana Kaleff (1994) sugere duas vertentes para a visualização geométrica: a) a visualização por aprimoramento da intuição espacial, uma das principais características desse tipo de visualização, para podermos “ver” a fim de atingir o entendimento, a compreensão, e b) a visualização por aprimoramento da argumentação geométrica, aprimoramento da capacidade de argumentação visual de tipo geométrico para promover uma construção real/visual de determinados conceitos matemáticos, esta última envolve notoriamente a movimentação ou reconfiguração de imagens. A primeira não se restringe à percepção espacial, e a segunda põe em evidência o caráter dinâmico do processo de visualização, uma de suas principais características.

Para esses propósitos, na procura de uma linguagem visual para a matemática, o primeiro conceito a ser introduzido é ‘o contexto’. A contextualização dos objetos matemáticos é um fator importante nos processos ligados à sua apreensão pela intuição. Nessa construção, o contexto deve formar parte do próprio objeto. Por exemplo, para os chamados de números figurados (triangulares, quadrados, etc.) estudados por Pitágoras (fig. 6), o contexto geométrico em que são colocados, ou as formas geométricas que lhe são atribuídas, fazem parte da compreensão desse tipo de números.

Dreyfus e Hadas (1994) enfatizam as padronizações feitas pelos alunos em relação às formas, por exemplo, os triângulos isósceles existem, para alguns alunos, somente quando suas bases são horizontais e colocadas em posição de “equilíbrio”, ou dois triângulos são congruentes somente quando seus lados correspondentes são paralelos e direcionados no mesmo sentido. Esse direcionamento é de caráter contextual e faz parte da compreensão dessas figuras.

Consideramos que é inerente aos processos de visualização a contextualização espaço-temporal (não necessariamente num sentido físico) da imagem, de modo que, desse ponto de vista, faz sentido identificar, num primeiro momento, um triângulo isósceles como "apoiado" na sua base. Aliás, a própria expressão "base de um triângulo" remete a essa contextualização. Num segundo momento, que não é mais de visualização-concretização e sim de abstração, separa-se a imagem de sua "posição contextual".

## A VISUALIZAÇÃO ALGORÍTMICA E POR ARGUMENTAÇÃO ANALÓGICA

Nem todo tipo de visualização se reduz a visualização geométrica. A seguir, analisaremos a visualização, que tomamos por liberdade, chamá-la de 'algorítmica' (ou "por argumentação algébrica").

A visualização algorítmica é tão importante quanto a geométrica, mas talvez não tenha sido amplamente discutida pelo fato de não ser tão evidente, ou pelo fato de utilizar-se mais do raciocínio algébrico ou combinatório como forma de pensamento.

A visualização algorítmica é basicamente ver algebricamente algo geométrico (como na discussão sobre as tangentes a uma curva na geometria analítica). Isso acontece quando, por exemplo, não conseguimos "ver" um fato geométrico, tendo que partir assim para o uso exclusivo dos algoritmos de caráter algébrico.

Um exemplo disso é o fato de não conseguirmos visualizar que em um espaço tetradimensional existem planos não paralelos que se interceptam num único ponto. Podemos usar a geometria analítica tetradimensional para tentar compreender, através de uma representação algébrica, esse fato geométrico, como veremos logo.

Mas, antes, podemos recorrer a argumentos de analogia para tornar plausível esse fato.

Um argumento de plausibilidade do fato mencionado é o seguinte dado por analogia e baseado na passagem de uma situação planar a uma espacial: duas retas não paralelas no plano não podem ter interseção vazia (fig. 3). Isso é devido a que o plano não tem suficientes "graus de liberdade", no entanto, se essas retas estiverem no espaço, elas podem se "descolar" apelando a um grau de liberdade a mais (fig. 4).

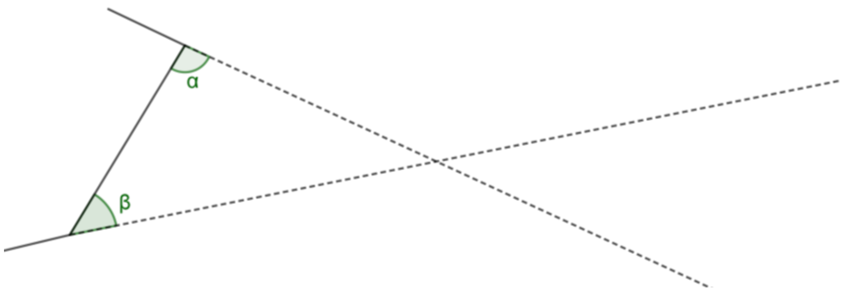


Figura 3 - Retas não paralelas no plano (dois graus de liberdade) sempre se cruzam.
Fonte: Autores

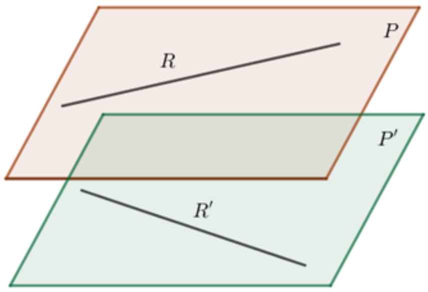


Figura 4 - Retas não paralelas no espaço (três graus de liberdade) que não se cruzam.
Fonte: Autores

Se estendemos essa analogia para a passagem de uma situação tridimensional para uma tetradimensional, podemos intuir que, embora dois planos não paralelos no espaço tridimensional sempre têm uma reta como interseção, quando colocados no espaço tetradimensional, é possível que eles tenham apenas um ponto em comum ou até tenham interseção vazia. A primeira possibilidade, que resolve a nossa questão, é ilustrada na figura 5: num sistema de coordenadas (x , y, z , w), considere os planos xy e zw; eles não são paralelos, porém só se intersectam na origem do sistema.

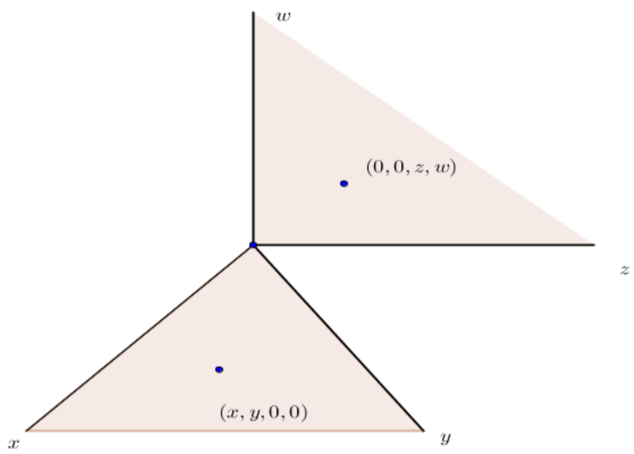


Figura 5 - Planos não paralelos no espaço tetradimensional.
Fonte: Autores

Analisando os modos de pensar e compreender, muitas vezes buscamos fazer um paralelo entre coisas diferentes levando-se em consideração seus aspectos gerais, estabelecemos analogias, comparamos, criamos imagens, cenários, visualizamos. Mas quais são as relações entre analogia e visualização? Como esse movimento poderia auxiliar na construção de conceitos matemáticos?

A analogia, como mostra o exemplo anterior, permite fazer relações que ligam novos domínios a conhecimentos já concretizados. “Os raciocínios por semelhança, por analogia, são típicas formas de um pensamento qualitativo na matemática pensada como atividade” (CIFUENTES, 2010, p. 23).

A forma de argumentação por indução (do particular ao geral) é baseada na analogia, pois é um processo em que partimos de um ou vários casos particulares identificando suas características comuns para chegarmos ao geral, ou seja, esses casos permitem formular hipóteses buscando relações, conexões através de semelhanças ou diferenças, para assim chegarmos ao caso geral.

Por exemplo, observando as semelhanças entre os primeiros números quadrados, podemos “visualizar” a conclusão geral de que “todo número quadrado


DOI: 10.17648/educare.v15i33.22530

é soma de dois números triangulares consecutivos". A figura 6 mostra também outra propriedade dos números quadrados obtida por visualização analógica.

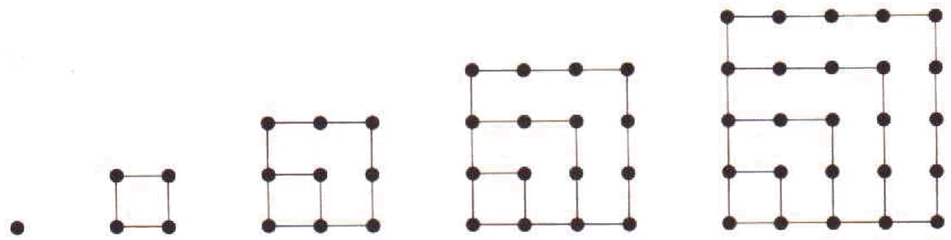

Figura 6 - Todo número quadrado é soma de números ímpares consecutivos 1+3+5+ ...
Fonte: Autores

A analogia é uma forma não metafórica, porém legítima, de argumentação que também pode ser usada para conceber objetos novos num processo indutivo. Vejamos, como exemplo, a "definição" dos objetos geométricos num espaço tetradimensional.

Ao "movimentar paralelamente", no espaço bidimensional, um segmento de reta, que é um objeto unidimensional, geramos um quadrado. Analogamente, ao mover esse quadrado paralelamente no espaço tridimensional, concretizamos um cubo e por fim, movimentando esse cubo paralelamente num espaço de quatro dimensões, podemos gerar o que chamamos de 'hipercubo'.

Vejamos algumas analogias que se apresentam nessa construção: assim como no segmento de reta temos que de cada vértice sai uma aresta, no caso do quadrado vemos que em cada vértice temos duas arestas; não é diferente no caso do cubo, em cada vértice temos três arestas. Logo, no caso do hipercubo, podemos induzir que a cada vértice corresponde quatro arestas. Podemos também ampliar essa análise observando os lados do quadrado, que é formado por segmentos de reta (arestas), já as faces do cubo são formadas por quadrados e, consequentemente, as "hiperfaces" do hipercubo serão formadas por cubos.

Com o exemplo mostrado anteriormente, podemos reparar no elo existente entre a visualização, a analogia e a geometria. Partimos da visualização/percepção dos objetos geométricos que já conhecemos para tentar construir, por analogia, o hipercubo, o que também pode ser feito para a construção e compreensão da hiperesfera, dentre outros "objetos". Importante salientar que o que acontece em dimensões menores permite "imaginarmos" as propriedades e características de um novo objeto numa dimensão maior. Portanto, voltamos a afirmar que a visualização não é somente o que vemos diante aos olhos, mas o que o pensamento é capaz de construir/imaginar por meio da analogia, da movimentação de imagens e da intuição (lembremos Klee).

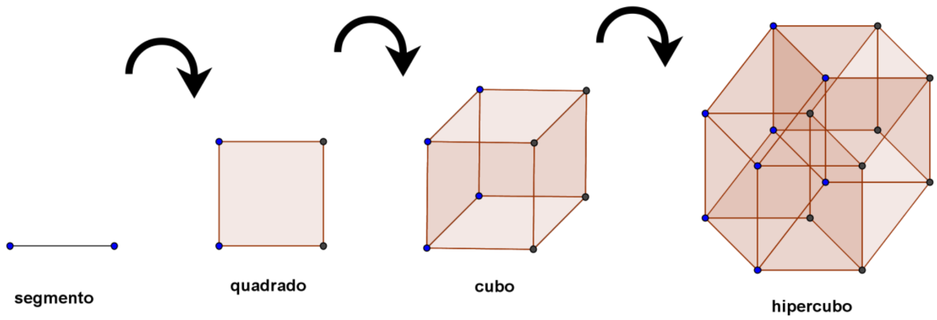


Figura 8 - Visualização do hipercubo por analogia.
Fonte: Autores

A visualização do hipercubo não é a explicitação de uma "realidade geométrica" pré-existente, é mais a concretização ("realização", na concepção de Bachelard) de um conceito geométrico, e em sua construção está implícita a dinamicidade desse processo.

## A ONTOLOGIA DA VISUALIZAÇÃO: O RELACIONAL

Uma das principais perguntas sobre a visualização é qual a sua ontologia, isto é, quais são os objetos da visualização, os objetos experienciados através da visualização.

> Para uma "boa" visualização, deve-se delimitar primeiro o "espaço ambiente" onde deve ser localizado o "objeto" a ser visualizado. Um exemplo típico em geometria é a apreensão do que é uma geodésica. Uma geodésica é a "curva" de menor percurso entre dois pontos. Pensemos dois pontos sobre uma superfície esférica no espaço tridimensional. Se o nosso espaço ambiente é o próprio espaço tridimensional, a geodésica que une esses pontos é o segmento de reta correspondente, no entanto, se o espaço ambiente é a


DOI: 10.17648/educare.v15i33.22530

> superfície esférica (abstraindo o fato de ela estar contida no espaço tridimensional), então, a geodésica entre esses pontos resulta ser o arco de círculo máximo, sobre a superfície esférica, que une esses pontos. (CIFUENTES, 2010, p. 24)

Devemos reparar que a geodésica não é, a rigor, um objeto concreto, ela é determinada por certas características teóricas de modo que qualquer outro objeto que as satisfaça será também uma geodésica. A identificação do espaço ambiente permite e facilita a visualização. No caso das geometrias não-euclidianas, por exemplo, os chamados de modelos ou interpretações começam com a definição do espaço ambiente. Assim, nos modelos de Klein ou de Poincaré da geometria de Lobachevski, determina-se, primeiro, como espaço ambiente o círculo sem sua fronteira ou o semiplano superior respectivamente.

O espaço ambiente, no processo de visualização, permite desenvolver um olhar intrínseco sobre o objeto experienciado, a sua "geometria intrínseca". Esse novo olhar requer de um certo grau de abstração, pois o que é visualizado não é o objeto ao todo e sim as relações que o definem. Isso põe em evidência que a visualização não é de caráter perceptivo.

Nessa direção, uma das formas de visualização é manifesta pelo que aqui chamaremos de 'atribuição de sentidos' a um dado conceito matemático.

Como exemplo temos o seguinte:

> Na matemática pensada como ciência abstrata, o conceito de derivada, por exemplo, tem um significado dado, dentre outros, através de sua definição como um limite. Mas interpretar ela como o coeficiente angular da reta tangente, ou como uma velocidade ou ainda como uma taxa de crescimento, é dar sentidos diferentes ao mesmo conceito: um sentido geométrico no primeiro caso, um sentido físico no segundo, e um sentido talvez econômico ou biológico no terceiro. (CIFUENTES, 2010, p. 18)

A matemática aplicada é a procura de sentidos para seus conceitos abstratos.

Dar um sentido geométrico (ou físico) a um conceito é uma espécie de atribuição de um contexto geométrico (ou físico). "Contextualizar", então, como já vimos, é também uma forma de visualizar por atribuição de sentidos. Os diversos


DOI: 10.17648/educare.v15i33.22530

modelos das geometrias não-euclidianas constituem diversas atribuições de sentido a essas geometrias.

Portanto, uma das características mais importantes da visualização e que a colocam do lado do pensamento qualitativo em matemática, é o recurso à interpretação.

A experiência matemática, diferentemente da que ocorre em física ou outras ciências, se dá pela imaginação, pela intuição, pela visualização, como forma de dar realidade a seus conceitos. Segundo Cifuentes e Negrelli (2007, p. 76), "A experiência matemática visa desvelar a estrutura íntima do objeto matemático e seu modo de geração, através da manipulação de suas representações, e necessita da intuição matemática para sua realização".

Por outro lado, Poincaré aponta que "Os matemáticos não estudam os objetos, mas as relações entre os objetos; portanto, lhes é indiferente substituir esses objetos por outros, desde que as relações não mudem. A matéria não lhes importa, mas, unicamente, a forma" (1988, p. 34).

Podemos concluir, então, que uma ontologia idônea para a visualização não é objetual, mas sim relacional. "Ver" uma relação em contraposição a ver um objeto, é ver suas características invariantes. Criar uma imagem é fazer uma síntese de dados obtidos na apreensão do visual/relacional, o que supõe uma escolha e uma interpretação.

Essas características qualitativas da visualização nos conduzem a questionar sobre a sua cientificidade, sobre se há um "método" por trás do processo de visualização e até que ponto ele é objetivo, tornando-o científico.

> Enquanto que o conhecimento científico, baseado no paradigma de cientificidade imposto pelo positivismo, lida com significações, exigindo destas verdade, universalidade, objetividade, racionalidade, a-historicidade e neutralidade, isto é, sem emissão de valores, [o conhecimento qualitativo, o terreno da visualização], lida também com sentidos, cujas características, atreladas principalmente a interpretações, estão mais do lado da razão poética que da razão científica. (CIFUENTES, 2010, p. 17)

Ao que parece, as palavras 'cientificidade' e 'visualização', juntas não se afinam, posto que a visualização não apresenta determinadas prerrogativas que o método científico exige, pois lida com sentidos, como vimos.

Apesar disso, é possível alargar a nossa compreensão do método científico redefinindo o que entendemos por "objetivação".

Um exemplo é a construção dos espaços artificiais para as geometrias não-euclidianas. Quando criamos um espaço para uma geometria abstrata, criamos a possibilidade de objetivar os objetos dessa geometria, ou seja, estamos concretizando coisas abstratas, tornando-as objetos geométricos.

Porém, tal processo de concretização pode não ser totalmente objetivo, pois mais que criar um objeto por visualização, criamos o instrumento de visualização, o projeto de como o objeto poderá ser construído. Podemos usar esse projeto de tal maneira que encontraremos alguma propriedade do objeto que outra pessoa ainda não viu, mas se mostrarmos a essa pessoa como chegar lá ela também vai ver, ou pode até mesmo encontrar outras propriedades através da mesma ferramenta.

Como um exemplo histórico de destaque temos a geometria de Euclides apresentada na forma de uma axiomática dita 'material'.

Os procedimentos gregos que fazem da geometria euclidiana uma ciência de caráter experimental/construtivo/visual são os relacionados com as técnicas de desenho geométrico. Eles foram considerados método de raciocínio legitimo na formulação axiomática da geometria e indispensáveis para dar visualidade aos objetos geométrico, constituindo-se num método de raciocínio visual "legítimo", não sendo, então, apenas ferramentas de ilustração ou auxiliares na constituição da verdade. Por esse motivo não devem ser dispensados no ensino da geometria.

Porém, devemos ressaltar que o que era considerado legítimo era o processo de construção e não o resultado da construção, isto é, a figura final. Nesse processo a figura vira um representante ideal do resultado pretendido.

Visualizar é singularizar, exemplificar, mantendo a universalidade! Desta forma, compreendemos que a visualização, a construção e a materialidade eram qualidades essenciais na geometria de Euclides. A régua e o compasso, longe de serem apenas instrumentos reais de construção, são concretizações físicas da reta finita e da circunferência, consideradas pelos gregos como "figuras teóricas" básicas (CIFUENTES, 2003).

## A MODO DE CONCLUSÃO: VISUALIZAÇÃO E CRIATIVIDADE

> *Saber como os cientistas se envolvem com imagens visuais significa compreender o modo como eles pensam criativamente.*
>
> *Edward Wilson em "Cartas a um Jovem Cientista"*

A visualização, como a epígrafe acima aponta, está intimamente relacionada com a criatividade, capacidade que, segundo Torrence (1962, *apud* Novaes 1980), põe em evidência a sensibilidade de alguém para os problemas de forma a identificar suas dificuldades, levando-o a conjecturar novas hipóteses, e a propor novas soluções.

A criatividade é assunto essencial de algumas tendências em Educação Matemática, como a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática, e tem seu paralelo e motivação na criação artística, envolvendo valores, atitudes, novas percepções, e também o concurso da intuição e da imaginação.

Na apreciação de Pelaes:

> Ligada ao estudo das estruturas e dos modos de conhecimento, a criatividade entra como elemento constitutivo e operativo, manifestando-se, na arte, como atividade criadora, revelando concepções que encontram sua origem em estudos estéticos ligados aos conceitos de belo, gosto e sensibilidade, submetida aos processos da imaginação/invenção. (2010, p. 6)

Ações propiciadas pela criatividade em matemática, como exploração de meios, manipulação de elementos, conceitos e objetos, escolhas e interpretações, constituem-se em formas de experiência matemática. É nesses momentos que a visualização, com sua capacidade de síntese, se faz presente, pois a compreensão pela visualização, pondo em evidência sua dinamicidade, não se dá pela imagem final e sim por todo o processo de construção, envolvendo inclusive a movimentação de imagens.

Assim, a criatividade, impulsionada pelo processo de visualização, é o desenvolvimento de uma sensibilidade que pode ampliar os modos de conhecimento e as formas de abordar o desconhecido.

Para a Educação Matemática, um apelo ao aprimoramento da razão visual no pensamento matemático, propiciada pela visualização, é necessário:

> Em vários momentos referenciamos a matemática pelo seu aspecto qualitativo, em que a interpretação e a sensibilidade aparecem como forma de sustentar o pensar independente, livre, distanciando-se da rigidez e das regras. Essa dimensão qualitativa se faz presente quando mencionamos a visualização como forma de aprimorar a intuição, ou quando mencionamos a analogia como forma de visualização, e mais importante, quando entendemos a visualização como forma de concretizar o pensamento matemático (SANTOS, 2014, p. 86).

Desse modo, e para finalizar, é importante salientarmos que a matemática a que nos referimos condiz com aquela que movimenta os sentidos e que evidencia a compreensão conceitual fundamentada pelo seu aspecto dinâmico e suas características qualitativas. É com essa concepção de matemática que a visualização pode contribuir para a construção e compreensão da mesma. Atualmente essa forma de acesso ao conhecimento matemático se potencializa pelo uso de recursos tecnológicos computacionais, que permitem a movimentação de imagens que a visualização requer. Por esse motivo o artigo traz reflexões epistemológicas e ontológicas para o entendimento da visualização como forma privilegiada de acesso ao conhecimento matemático.

Entendemos que a subjetividade atrelada à visualização pode gerar relutância em aceitá-la como processo legítimo de raciocínio, pensamento e acesso ao conhecimento matemático, porém compreendê-la como uma forma de "concretização" de conceitos é um ponto essencial para sua legitimação.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

CIFUENTES, José Carlos. **Fundamentos estéticos da matemática: da habilidade à sensibilidade.** In: BICUDO, M. A. V. (Org). Filosofia da educação matemática: Concepções e Movimento. Brasília: Plano, 2003, p. 59-79.

CIFUENTES, José Carlos. **Uma Via Estética de Acesso ao Conhecimento Matemático**. Boletim GEPEM (USU), Rio de Janeiro, v. 46, 2005, p. 55-72.

CIFUENTES, José Carlos. **Do conhecimento matemático à educação matemática: uma 'odisséia espiritual'**. In: Filosofia, Matemática e Educação Matemática, Editora UFJF, 2010, p. 13-31.

CIFUENTES, José Carlos; NEGRELLI, Leônia Gabardo. **Modelagem Matemática e o Método Axiomático.** In: BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti; ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Modelagem Matemática na Educação Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: Biblioteca do Educador Matemático SBEM, 2007, p. 63-77.

COSTA, Conceição. **Visualização: veículo para a educação em geometria**. In: **Encontro de investigação em educação matemática, ensino e aprendizagem de geometria**. Fundão/ES, 2000, p. 157-184.

D' AMORE, Bruno. **Elementos de didática da Matemática**. Trad. Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DREYFUS, Tommy; HADAS, Nurit. **Euclides deve permanecer e até ser ensinado.** In: LINDIQUIST, Mary; SHULTE, Albert P. **Aprendendo e ensinando geometria**. Trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1994, p. 50-71.

EVES, Howard. **Geometria**. Tópicos de História da Matemática para uso em Sala de Aula. São Paulo: Atual, 1992.

KALEFF, Ana Maria. **Tomando o ensino da geometria em nossas mãos**. In: Educação Matemática em Revista. São Paulo: v. 1, n. 2, p. 19-25, 1994.

LORENZAT0, Sérgio. **Por que não ensinar geometria?** Educação Matemática em Revista – SBEM nº 4, São Paulo, 1995, p. 3-13.

NOVAES, Maria Helena. **Psicologia da criatividade**. 5. ed. Petrópolis: Vozes, 1980.

PELAES, Maria Lúcia Wochler. **Uma reflexão sobre o conceito de criatividade e o ensino da arte no ambiente escolar**. Revista Educação (Guarulhos), v. 5, p. 5-13, 2010.

POINCARÉ, Henri. **A ciência e a Hipótese**. Trad. Maria Auxiliadora Kneipp. 2ª Edição. Brasília: Editora UnB, 1988.

POLYA, George. **Matemáticas y razonamiento plausible**. Madri: Ed. Tecnos, 1966.

SANTOS, Alessandra H. **Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização**. 2014. 98f. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática. Linha de Pesquisa: Educação Matemática e Interdisciplinaridade. Universidade Federal do Paraná, Curitiba/PR.

Recebido em: 31/05/2019
Aprovado em: 08/09/2019