CONHECIMENTO INTERPRETATIVO DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA: O CASO DO CUBO

Silvania Couto[1]
Miguel Ribeiro[2]

Resumo: As dificuldades dos alunos relacionam-se com o conhecimento do professor e, em particular, com o conhecimento envolvido no atribuir significado às produções dos alunos (registros escritos, comentários, raciocínios), tomando-as como ponto de partida para desenvolver o conhecimento, competências e habilidades matemáticas – denominado de Conhecimento Interpretativo. Neste artigo discute-se o Conhecimento Interpretativo revelado por um grupo de formandos que participaram de um curso de extensão que objetivava contribuir para desenvolver esse conhecimento no âmbito da Geometria para a Educação Infantil e Anos Iniciais ao resolverem uma tarefa sobre visualização e classificação de sólidos geométricos. Os resultados revelam alguns aspetos do Conhecimento Interpretativo apontando necessidade de alteração de foco na formação de professores.
Palavras-chave: Conhecimento Interpretativo; Visualização; Geometria.

Mathematics Teachers' Interpretative Knowledge: the case of the cube

Abstract: Students difficulties in Geometry are related with teachers' knowledge and, in particular, with the knowledge involved in give meaning to the pupils' productions (written records, comments, reasoning), assuming such productions as a starting point for developing students' mathematical knowledge, competencies and abilities – considered Interpretative Knowledge. This paper discusses the Interpretative Knowledge revealed by a group of teachers' participating in a continuous development course aimed at contributing to develop such kind of knowledge in the scope of Geometry for kindergarten and primary. Results reveal some dimensions of the Interpretative Knowledge enhancing the need for a shift of focus of attention in mathematics teacher education.
The results reveal some dimensions of this knowledge related to the mathematical correction and adequacy of the language and the ways to "see and classify" the prisms, and some changes in the focus on teacher education are necessary.
Keywords: Interpretative Knowledge; Visualization; Geometry.

---

[1] Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Sergipe (UFS). Mestranda em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Faculdade de Educação da UNICAMP. E-mail: silvaniacoutoc@gmail.com.
[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Huelva (Espanha). Professor da Faculdade de Educação da UNICAMP, Brasil. E-mail: cmribas78@gmail.com.

Introdução

A melhoria das aprendizagens dos alunos está relacionada com a promoção do desenvolvimento do conhecimento do professor. Neste podem ser consideradas as especificidades para o ensino de determinada área de estudo, deixando-se estas à margem, podem ser vistos os aspectos gerais. Assumir uma dessas perspectivas implica, obviamente, no modo como são conceitualizados estes aspectos: a formação e a prática matemática do professor, os objetivos matemáticos perseguidos, o papel do seu conhecimento nessa prática e os necessários focos de atenção na formação de professores como forma capaz de promover o desenvolvimento desse conhecimento e a melhoria da prática.

Quanto as especificidades do conhecimento do professor, consideramos que esse conhecimento, em particular do professor de/que ensina matemática, e em particular leciona Geometria, é especializado tanto no que concerne ao conhecimento do conteúdo quanto no que se vincula ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Uma vez que esse conhecimento especificamente relacionado com o exercício docente pode ser ensinado[3], torna-se essencial que as tarefas para a formação de professores persigam objetivos complementares aos das tarefas para os alunos, complementaridade essa que não pode se restringir à dimensão do conhecimento pedagógico e tenham a prática, os raciocínios e os comentários dos alunos, como ponto de partida e de chegada[4].

Dentre os vários temas incluídos no tópico de Geometria, a visualização é um dos elementos centrais[5], sendo de fulcral importância para que se possa

---

[3] HILL, Heather C.; ROWAN, Brian; BALL, Deborah Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, v. 42, n. 2, p. 371–406, summer 2005.

[4] RIBEIRO, Miguel; MELLONE, Maria; JAKOBSEN, Arne. Give sense to students' productions: a particular task in teacher education. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL SYMPOSIUM, ELEMENTARY MATHEMATICS TEACHING (SEMT), 2013, Prague: Charles University. *Anais*... Prague: Charles University.: [s.n.], 2013. p. 273 – 281.

[5] ELIA, I.; HEUVEL-PANHUIZEN, M. VAN DEN; GAGATSIS, A. Geometry Learning in the Early Years: Developing Understanding of Shapes and Space with a Focus on Visualization. In: Kinnear V., Lai M., Muir T. (eds) FORGING CONNECTIONS IN EARLY MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING. Early Mathematics Learning and Development. [S.l.]: Springer: Singapore, 2018. p. 73–95.

efetuar classificações envolvendo, em particular, elementos geométricos. Essas podem ser considera de forma hierárquica inclusiva ou disjunta[6], sendo que assumir uma maneira ou outra, tem implicações na forma como se consideram os elementos geométricos e, portanto, na estrutura geométrica com que se trabalha (por exemplo, incluir, ou excluir os quadrados nos retângulos ou nos losangos).

Um dos modos de encarar essa visualização é considerar que ela não se restringe ao visual perceptível apenas pelo olhar, mas, sim o expande e se amplifica em uma forma de ver cognitivamente. Como "nenhuma das atividades exploradas de maneira clássica para apresentar a geometria aos estudantes de fato permite que essa visão seja desenvolvida"[7], é essencial mudar a perspectiva tida como tradicional para tornar tangível o desenvolvimento do conhecimento que sustenta a capacidade de visualização. Assim, a conceitualização de tarefas para a sala de aula e para a formação de professores é de crucial importância para promover a estruturação de um conhecimento do professor que concretize um novo ponto de vista e valorize a Geometria nas aprendizagens matemáticas dos alunos, considerando-as centrais para uma melhoria social.

Dentre as diversas conceitualizações do conhecimento do professor de/que ensina matemática, por levarmos em conta todo o seu conhecimento especializado, assumimos a perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*[8] (MTSK), desenvolvida por Carrillo *et al*[9]. As dimensões

---

[6] DE VILLIERS, Michael. The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *The Learning of Mathematics*, v. 14, n. 1, p. 11–18, Feb 1994.

[7] DUVAL, Raymond. Les Conditions Cognitives de L'apprentissage de la Géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, v. 10, p. 5–53, Jan-Dez 2005. p. 8 (tradução nossa)

[8] Optamos por manter a nomenclatura em Inglês pois esta é uma conceitualização do professor reconhecida a nível internacional e a tradução poderia desvirtuar não apenas o sentido que outrem poderia atribuir, mas, essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa.

[9] CARRILLO, José. *et al.* Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In: EIGHTH CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 2013, Antalya, Turquia. *Anais*... Antalya, Turquia: ERME, 2013. p. 2985– 2994.

apresentadas por esses autores permitem/sustentam que o professor efetivamente entenda os raciocínios, os comentários e as produções dos seus alunos e tenha como ponto de partida para sua prática matemática o que estes já sabem e como o sabem. Esse conhecimento do professor, associado à atribuição de sentido às produções dos alunos, é denominado de Conhecimento Interpretativo[10].

Assim, são essenciais o contexto e os objetivos formativos no (e para o) desenvolvimento do conhecimento especializado e interpretativo do professor[11][12]; a preparação e a implementação de tarefas para a formação de professores que sejam complementares às tarefas dos alunos e tenham como ponto de partida e de chegada a prática do professor[13] e o foco de atenção no seu conhecimento em temas de Geometria. Tendo isso em vista, foi conceitualizada uma pesquisa que permitisse melhor entender esses diferentes aspetos e as formas como eles podem ser desenvolvidos e como a prática do professor pode ser melhorada.

Dentre os múltiplos contextos em que temos desenvolvido pesquisas com foco no conhecimento e nas práticas do professor, encontra-se um dos cursos dinamizados na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Neste contexto em particular, focamo-nos nas discussões associadas a uma das tarefas exploradas em um Curso de extensão[14] direcionado ao

---

[10] JAKOBSEN, Arne; RIBEIRO, Carlos Miguel; MELLONE, Maria. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*. v. 19 (3-4), p. 135–150, Jul-Dez 2014.

[11] DI BERNARDO, Rosa. *et al.* Early Years Prospective Teachers' Interpretative Knowledge on Early Algebra. *Cadernos de Pesquisa*, v. 24, p. 208-222, Set-Dez 2017.

[12] RIBEIRO, Miguel; CARRILLO, José. The role of beliefs and knowledge in practice. In: ROESKEN, B.; CASPER, M. (Org.). CURRENT STATE OF RESEARCH ON MATHEMATICAL BELIEFS XVII – MAVI 17. Bochum: Professional School of Education, Ruhr-Universität Bochum, 2011. p. 192–201.

[13] RIBEIRO, Miguel. Tareas para alumnos y tareas para la formación: discutiendo el conocimiento especializado del profesor y del formador de profesores de matemáticas. In: XX JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2016, Chile. *Anais*... Chile: Estrella, S., Goizueta, M., Guerrero, C., Mena, A., Mena, J., Montoya, E., Morales, A., Parraguez, M., Ramos, E., Vásquez, P., y Zakaryan, D, 2016. p. 31–39.

[14] Curso de extensão de 40 horas presenciais oferecido na UNICAMP, intitulado *"Geometria na educação infantil e nos anos iniciais e conhecimento especializado do professor"* e dinamizado por

conhecimento do professor da Educação Infantil e dos Anos Iniciais no contexto da Geometria. Assim, buscamos responder à seguinte questão de pesquisa:

> *Que conhecimento interpretativo revelam professores que participam de um curso de extensão que busca promover o desenvolvimento do conhecimento interpretativo de professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais no âmbito da classificação de prismas retangulares?*

Embasamento teórico

Os documentos oficiais brasileiros[15][16], afirmam que o estudo dos conteúdos da Geometria potencializa a capacidade de aprendizagem do aluno em outros campos de conhecimento da Matemática, pois "estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa"[17]. Porém, nos Parâmetros Curriculares Nacional (PCN), ao discorrerem sobre conceitos e formas procedimentais apresentam uma assertiva que pode constituir um entrave na correta classificação dos prismas retangulares, ao elencar que se deve proceder ao "estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos — esféricos, cilíndricos, cônicos, *cúbicos*, piramidais, *prismáticos* — sem uso obrigatório de nomenclatura."[18].

Como afirmamos, a classificação pode ser entendida de diferentes formas[19], pode ser lida como uma hierarquização entre os elementos que se pretende classificar, ou como uma forma inclusiva ou disjunta/por partição. A classificação inclusiva implica formar subconjuntos com elementos que possuem propriedades dos grupos que os contêm. Já a disjunta leva à formação de subconjuntos disjuntos e, portanto, sem elementos comuns.

---

elementos do grupo de pesquisa e formação CIEspMat (Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor de/que ensina matemática).

15 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília-DF: Ministério da Educação, 2017.

16 BRASIL, S. DE E. F. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

17 Vide nota de rodapé 16. p. 37.

18 Vide nota de rodapé 16. (Grifo nosso, p. 51)

19 Vide nota de rodapé 6.

De Villiers[20] assinala que tanto a classificação inclusiva como a disjunta são corretas, desde que contenham informações suficientes para garantir que todos os elementos pertencentes aos conjuntos são inclusivos ou disjuntos. Porém, optar por uma ou por outra tem consequências na forma como se considera a estrutura matemática que se trabalha, em particular no contexto da Geometria. Nesse sentido, assumir uma classificação exclusiva nos documentos oficiais nos quais cubos e prismas não fazem necessariamente parte de um mesmo conjunto, pressupõe que, anteriormente, quadrados e retângulos são elementos de conjuntos distintos.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a primeira menção a figuras geométricas espaciais deve ocorrer logo no 1° Ano dos Anos Iniciais, momento em que é preciso "relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico"[21]. Já no 2° Ano espera-se que os alunos tenham as habilidades de "associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras"[22]. No 3° Ano, destaca-se a alusão ao prisma e a vinculação deste a objetivos (habilidades) anteriormente referidos na descrição das atividades do 2° Ano – ressaltamos que a redação de tais propósitos é idêntica nos textos de orientação para as duas etapas.

Ainda no que se refere ao estudo comparativo dos sólidos geométricos desde a Educação Infantil, a BNCC ao tratar sobre unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidade nos Anos Iniciais assevera que:

> [...] orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e

[20] Vide nota de rodapé 6.
[21] Vide nota de rodapé 15. p. 235
[22] Vide nota de rodapé 15. p. 239

> os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos.[23]

Associado à classificação de figuras e sólidos espaciais geométricos encontra-se um conhecimento relacionado à capacidade de visualizar a "construção" e a "desconstrução" de objetos que se vinculam às representações de entes Geométricos de três dimensões. Essa ideia de (des)construção se sustenta no que Duval[24] considera ser um elemento central da geometria: o número de dimensões. Uma vez que um maior número de dimensões atribui maior complexidade à figura, sua simplificação, – feita por meio da redução ou desconstrução dimensional que promove a sua "decomposição/desconstrução" em figuras de menor dimensão, citamos como exemplo um sólido geométrico em um agregado de figuras poligonais, é entendida como um potente meio de desenvolver um entendimento cognitivo das figuras e das formas geométricas.

Utilizando esse princípio, e considerando uma classificação inclusiva[25], torna-se natural constatar que, se o quadrado é um caso particular do retângulo, o cubo será um caso particular de um prisma retangular ou de um paralelepípedo. Tal desconstrução permite que o aluno faça um exame das propriedades da figura e uma classificação desta em grupos de propriedades similares.

No entanto, salientamos que assumir essa (des)construção implica também uma opção quanto aos tipos de classificação que se efetuam/consideram. Tal possibilidade de (des)construção leva a não falar em sólidos geométricos, mas sim em "superfícies de sólidos geométricos", pois a partir dela, o "sólido" é visto como vazio, o que acarreta, em termos matemáticos que, no limite, o seu volume e capacidade coincidem. Esse mesmo tipo de conhecimento matemático especificamente associado a uma utilização adequada impossibilita que se mencione a planificação de um sólido.

[23] Vide nota de rodapé 15. p. 232
[24] Vide nota de rodapé 7.
[25] Vide nota de rodapé 6.

Assim, assumir esta possibilidade de (des)construção e a conversão entre 2D e 3D, e explorar adequadamente os temas e os conteúdos matemáticos, conduz por exemplo, a afirmar que uma superfície cúbica (e não um cubo) é constituída por seis quadrados organizados de determinadas formas, havendo 11 maneiras possíveis. A partir de uma classificação inclusiva de polígonos, representa-se em 2D um objeto que posteriormente pode ser "construído" em 3D e encaminha-se uma discussão que proporciona a compreensão de que essa superfície cúbica é formada por retângulos. Isto permitirá ampliar o entendimento matemático, e a forma como os alunos veem o mundo, ampliando os seus modos de classificar, de visualizar e de definir[26]. Essa perspectiva possibilita, por exemplo, desenvolver nos alunos (e nos professores) um conhecimento relativo à apreensão do cubo como um paralelepípedo e deste como um prisma retangular.

Destacamos que essa forma de entender a visualização é distinta da maneira como essa visualização é compreendida no modelo de Van Hiele[27]. Neste ela corresponde ao nível mais elementar de uma hierarquização composta por cinco níveis e está intimamente relacionada ao fisiológico ocular ou tátil[28]. Associar a visualização meramente a uma perspectiva ocular ou tátil não permite explorar todas as características e as propriedades dos elementos (geométricos ou não), restringindo-se a comparações de formas e dimensões, o que não possibilita ao aluno fazer uma classificação (de conjuntos de figuras). Todo esse conhecimento geométrico que abarca a classificação, a visualização, a (des)construção e suas (im)possibilidades compõe (ou deverá compor) parte do conhecimento matemático do professor. Assim, possibilitará a este, em um momento posterior, tomar um conjunto de decisões que proporcionem práticas

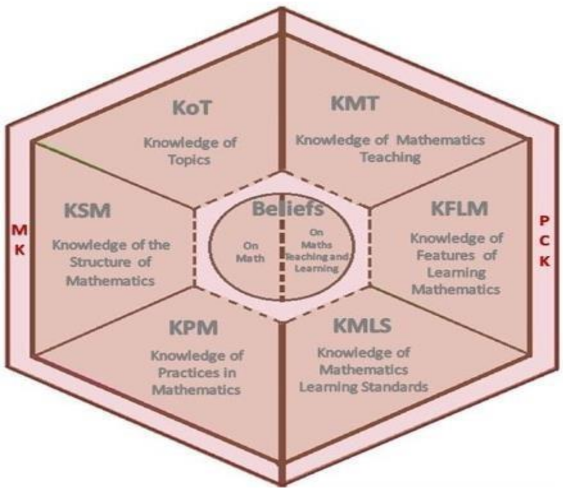
---

[26] DEWEY, John. Comprension: concepto y definicion. In: DEWEY, John. *Como Pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo*. 2ª ed. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S. A, 1989. p. 133–144.
[27] OLIVEIRA, Marluce. T.; LEIVAS, José. C. P. Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele. *Ciência e Natura* v.39 n.1, p. 108 – 117, jan-abr 2017.
[28] DE VILLIERS, Michael. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 12, n. 2, p. 400–431, ´Set -Dez 2010.

matemáticas com os alunos (conhecimento pedagógico) que promovem o desenvolvimento das competências, das habilidades e dos conhecimentos matemáticos destes.

Consideramos, portanto, o conhecimento do professor como especializado em todas as suas dimensões quando assumimos a conceitualização do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*[29], que considera dois domínios: o *Mathematical Knowledge* (MK) e o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), sendo que cada um deles têm três subdomínios. Atentando para a questão de pesquisa, o contexto e o foco deste, iremos deter-nos apenas nos subdomínios relativos ao MK: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of the Practices of Mathematics* (KPM). Esse modelo considera ainda as crenças do professor sobre a matemática e seus ensino e aprendizagem (Figura 1).

Figura 1 – Domínios do Mathematics Teachers' Specialized Knowledge



Fonte: CARRILLO et al. (2013 p. 2989)

O *Knowledge of Topics* (KoT) inclui, dentre outros, o conhecimento do professor sobre as definições, as propriedades e os fundamentos. No contexto em tela, refere-se, por exemplo, a conhecer as características e as propriedades dos prismas, do cubo, do paralelepípedo ou do prisma retangular, os quais são

[29] Vide nota de rodapé 9.

quadriláteros regulares formados por um mínimo de dois vértices com ângulos retos.

Já o *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM), refere-se ao conhecimento do professor associado ao conjunto dos temas da matemática relativos a diferentes tipos de conexões. No contexto dos polígonos, dos sólidos geométricos, e das conexões entre as diferentes classificações que os envolvem e que permitem relaciona-los, podemos mencionar a possibilidade de classificar o quadrado como um tipo particular de retângulo (quatro lados, paralelos dois a dois, e quatro ângulos[30]) que se relaciona, posteriormente, com a classificação de prismas com base retangular. Desse modo, estabelece-se conexões entre temas de um mesmo tópico (um cubo pode ser classificado também como um tipo particular de prisma retangular e de paralelepípedo).

Por sua vez, o *Knowledge of the Practices of Mathematics* (KPM) versa sobre o conhecimento sintático da Matemática, que engloba, dentre outros aspectos, o uso formal da linguagem matemática, a resolução de problemas ou a modelagem. É, assim, essencial ao professor, o uso de uma linguagem não equivocada para se referir a elementos de duas ou três dimensões (quadrado e cubo são "coisas" distintas), e, também a elementos que possuem o mesmo nome em ambos os contextos (2D ou 3D), mas que, em 3D podem necessitar de uma adequação. É o caso do vértice como o ponto de início/fim de dois, ou três, segmentos de reta.

Levando em conta que o professor deve partir do que seus alunos já sabem, e do modo como o sabem, a fim de efetuar discussões que tenham significado para os alunos, esse conhecimento especializado sustenta um tipo especial de saber, que permite dar forma a uma prática que efetive esse ponto de partida e se denomina de Conhecimento Interpretativo[31]. Este permite ao professor interpretar e atribuir significado às produções (escritas ou orais) dos

[30] Note-se que esta listagem de propriedades não é uma definição.
[31] Vide nota de rodapé 10.

alunos de modo a retroalimentar a prática, tendo os entendimentos e os raciocínios empregados nessas produções como origem e destino.

Nesse sentido, para promover esse conhecimento particular do professor, é essencial que as tarefas para a formação sejam conceitualizadas com o objetivo de dar sentido às colocações dos discentes. Portanto, é fundamental que as discussões girem em torno de situações que os professores possam identificar como possíveis em suas práticas, de forma a minimizar as improvisações relacionadas com o conteúdo, e a preparar melhor os professores para possíveis circunstâncias inusitadas, decorrentes de respostas, corretas ou não, que estão fora de seu espaço-solução[32][33]. Este conhecimento é central quando se pretende fornecer aos alunos um feedback construtivo, o que requer que o professor efetivamente "ouça" os seus alunos e entenda seus raciocínios e suas representações, para poder perspectivar uma posterior atuação tendo-os como ponto de partida.

Em um mundo em que a informação está ao alcance de um click, não é incomum alunos saírem com respostas, comentários ou especulações que muitas vezes surpreendem seus professores, dando-lhes um diminuto espaço de tempo para decidir como melhor conduzir aquela intervenção. Essa decisão pauta-se no conhecimento que ele próprio tem do assunto em questão e em sua capacidade de atribuir significado à (interpretar a) explanação de seu aluno e pode ser um divisor de águas entre atingir o objetivo proposto ou divagar de modo infrutífero pelo menos em relação ao objetivo delineado. A exposição a tais situações inusitadas, que implicam ampliar o seu espaço solução, complementa o conhecimento do professor e lhe permite melhor entender como seus próprios conhecimentos e o impacto destes na atribuição de sentido a produções de outrem, influenciam a hipotética aprendizagem dos alunos[34].

[32] Vide nota de rodapé 4.
[33] RIBEIRO, Miguel.; MELLONE, Maria.; JAKOBSEN, Arne. Interpreting Students' Non-Standard Reasoning: Insights for Mathematics Teacher Education. *For the Learning of Mathematics*, v. 36, n. 2, p. 8–13, Mai-Ago 2016.
[34] Vide nota de rodapé 33.

Contexto e Metodologia

Esta pesquisa faz parte de um projeto mais amplo[35] que tem como um dos seus objetivos obter uma visão mais ampla sobre o conteúdo do Conhecimento Interpretativo do professor, os elementos nucleares desse conhecimento e quais os aspetos que podem sustentar sua promoção. Aqui o foco é um curso de extensão (formação continuada) com uma carga horária de 40 horas presenciais, que tinha por objetivo explícito desenvolver o conhecimento especializado e interpretativo do professor da Educação Infantil e dos Anos Iniciais no âmbito da Geometria.

Este curso de extensão ocorreu na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), e teve 12 participantes[36] (nove professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais, um professor dos anos finais do Ensino Fundamental, um gestor e um estudante da Licenciatura em Física). Para a formação, foram conceitualizadas algumas tarefas iniciais que partem de resultados da pesquisa e que foram desenhadas com vistas a melhor compreender e ampliar o conhecimento dos participantes no âmbito de alguns dos temas de Geometria, considerados centrais para o conhecimento geométrico de alunos e do professor. Para esse fim, a dinâmica do curso pautava-se na discussão e na resolução dos problemas[37], apresentados nas tarefas, e buscava desenvolver o Conhecimento Interpretativo do professor[38]. As tarefas foram trabalhadas em grupos de quatro participantes, havendo, na sequência, a discussão plenária. Todas as produções dos participantes foram coletadas e escaneadas[39] e as discussões de um dos grupos foram gravadas em áudio e vídeo.

---

[35] Projeto de pesquisa "Conhecimento matemático especializado do Professor que ensina Matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais: um foco em conteúdos de Geometria", financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo número 2016/22557-5.
[36] Nomes fictícios.
[37] POLYA, George. *How to Solve It: a new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press, 1945.
[38] Vide nota de rodapé 10.
[39] Posteriormente, os originais foram devolvidos.

As tarefas tinham, assim, natureza e objetivos específicos, e eram compostas por duas partes complementares[40][41]. A primeira parte de cada tarefa voltava-se para a implementação em sala, ou seja, considerava um problema que os alunos poderiam resolver. Este detinha um cunho exploratório-investigativo que se esperava que os professores pudessem implementar em suas práticas. A segunda parte, por sua vez, era direcionada para o professor, tinha o caráter de desenvolvimento e aprofundamento do Conhecimento Especializado e Interpretativo do professor e concernia à adequação, à coerência e à precisão matemática por meio da análise e da atribuição de sentido às produções (corretas ou não) de alunos ao problema proposto.

Nosso foco, neste estudo, está em uma das tarefas de classificação de sólidos geométricos. Os dados foram coletados por meio de gravações (em vídeo e áudio) e de produções escritas dos formandos em uma das sessões de trabalho que durou oito horas. A tarefa analisada envolvia respostas de alunos sobre as propriedades dos prismas retangulares e sobre a classificação destes.

Neste artigo, nos restringiremos a uma das questões da parte da tarefa que se voltava para a ampliação do conhecimento interpretativo do professor. A tarefa em apreço situava-se no contexto da prática de uma professora que forneceu a seus alunos um "cubo mágico" e lhes solicitou que fizessem uma classificação e a justificassem. Porém, as respostas desses alunos foram diferentes do que a docente tinha antecipado, e ela necessitou de ajuda para atribuir sentido e significado a essas respostas e fornecer um *feedback* construtivo.

Uma das respostas de uma de suas alunas que lhe causou certa dificuldade foi a seguinte:

[40] Vide nota de rodapé 4.
[41] Vide nota de rodapé 33

Camila: Professora, aqui a Daiane está dizendo que este objeto (ao lado) é um cubo, mas eu acho que é um paralelepípedo, e a Kátia diz que ouviu a irmã que estuda no 7° ano dizer ontem que é um prisma retangular, afinal quem tem razão?

A análise das informações coletadas focou-se no conhecimento revelado pelos participantes ao atribuírem, por meio de produções escritas, significado ao comentário descrito acima. Primeiro, nós, autores desta pesquisa, analisamos os dados desses registros individualmente, depois, comparamos nossas leituras. Em um dos grupos (Grupo 3), as informações das produções foram complementadas com dos dados expostos nas discussões que ocorreram no grupo obtidos mediante a observação do vídeo.

Na apresentação da análise, optámos por dar uma visão global do que se observou e posteriormente, efetuamos a análise das produções de cada um dos três grupos.

Análise e Discussão

Este problema, bem como os demais da segunda parte da tarefa objetivava aceder e aprofundar o Conhecimento Interpretativo dos formandos, uma vez que este tem relação direta com sua prática profissional e impacta fortemente a aprendizagem dos alunos. Sua implementação proporciona para a formação uma realidade presente no cotidiano do professor — a alteração do encadeamento lógico do conteúdo por um questionamento inusitado do aluno — o que ajuda o participante a aprimorar o seu potencial interpretativo às respostas de seus alunos usando-as para retroalimentar sua dinâmica da aula[42]

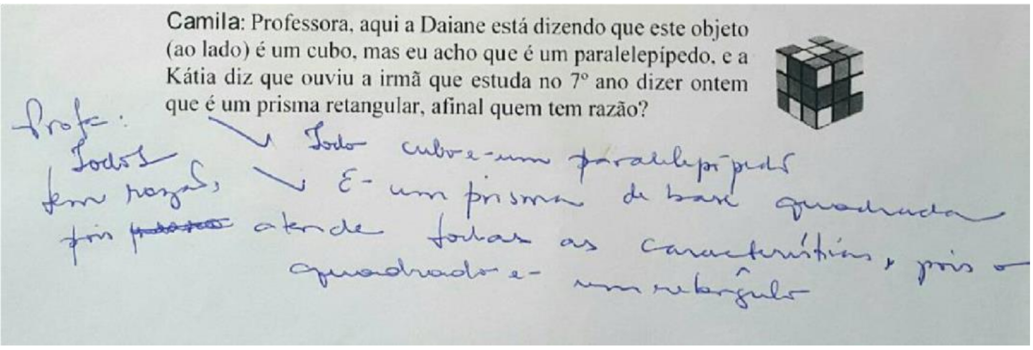
Considerando que o potencial Conhecimento Interpretativo do professor tem intrínseca relação com seu Conhecimento Especializado, em uma análise global das respostas fornecidas, notamos uma predominância do *Knowledge of*

[42] Vide nota de rodapé 10.

Topics (KoT) dos professores. Este se fez presente na classificação do cubo como um prisma retangular e se associou às discussões que tinham ocorrido na classificação de quadriláteros, em uma outra tarefa[43] – dois dos três grupos efetuaram essa classificação dupla. Esta demanda um *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) do estabelecimento de uma conexão transversal com o conteúdo de polígonos, inclusive, foi usado como argumento que o cubo é um prisma retangular, assim como o quadrado é um retângulo. Complementarmente, há algumas evidências enquadradas no *Knowledge of the Practices of Mathematics* (KPM), relativas ao uso adequado dos termos Matemáticos.

Analisaremos, em seguida, a resposta do Grupo 1.

Figura 2 *– Resposta do Grupo 1 ao segundo problema da Parte II da tarefa*



Profª: todos tem razão, pois todo cubo é um paralelepípedo e um prisma de base quadrada, atende todos os comentários, pois o quadrado é um retângulo.
Fonte: arquivo autores, 2017

Ao considerarem que todos os alunos têm razão, os participantes do Grupo 1, classificam a figura como um paralelepípedo e um prisma de base quadrada. Tal classificação sustenta-se no seu *Knowledge of Topics* (KoT), associado a um conhecimento que permite comparar as similaridades entre as propriedades desses sólidos. Esse comentário revela também aspetos do *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) dos participantes, pois há uma conexão transversal entre o tema polígonos, discutido anteriormente, e o

43COUTO, Silvania.; ALMEIDA, Mariele. V. R. DE; RIBEIRO, Miguel. Conhecimento Especializado de Professores da Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental: discutindo uma tarefa com foco no retângulo. In: VI SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIAS E INVESTIGAÇÕES DE/EM AULAS DE MATEMÁTICA, 2017, Campinas. *Anais*... Campinas: [s.n.], 2017. p. 1–11.

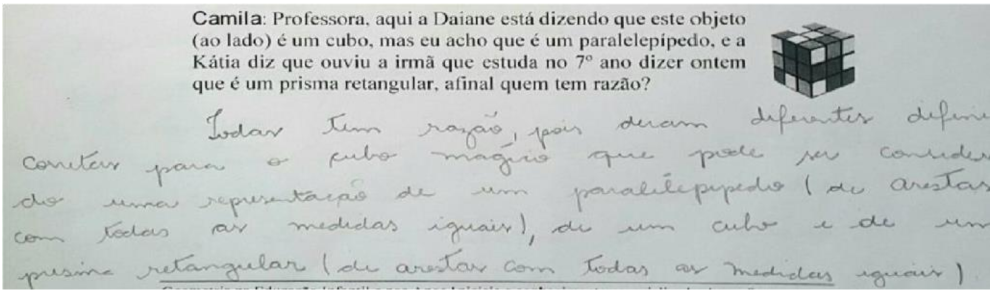
assunto poliedros ("*pois o quadrado é um retângulo*"). Os formandos interpretaram que a existência de propriedades determinantes para a classificação de uma figura como pertencente a um conjunto menor, como é o caso do cubo, não impossibilita que integre conjuntos mais abrangentes, como o do paralelepípedo e o do prisma retangular. Isso permite identificar um paralelismo no quadrado, que pertence, simultaneamente, segundo determinada classificação, ao conjunto dos polígonos, dos quadriláteros, dos paralelogramos, dos retângulos e dos losangos.

Entretanto, quando focamos no Conhecimento Interpretativo, relacionado a um *feedback* construtivo, observamos que o Conhecimento Especializado sustenta uma abordagem avaliativa quanto à correção/adequação matemática da resposta fornecida. Os participantes não apresentaram nenhum *feedback*, que poderia ter por base, por exemplo, a conexão efetuada por eles entre o quadrado (polígono) e o cubo (poliedro) explorando de forma detalhada as propriedades das duas formas, ajudando o aluno a fazer a construção de seu conhecimento por meio da comparação.

Essa falta de correspondência entre o que o professor sabe, mesmo que esse conhecimento seja especializado, e o que mobiliza na atribuição de significado às produções e aos possíveis raciocínios dos alunos leva a uma postura avaliativa e a uma imposição da própria perspectiva. Essa criticidade veio à tona durante as discussões plenárias. Nestas fornecer um *feedback* construtivo revelou-se um tipo de prática que os professores não pensavam em implementar.

Percebemos que, esse *feedback*, construtivo, com foco nas aprendizagens matemáticas dos alunos, é entendido (confundido) como encorajamento. Assim, ele corresponderia a um *feedback social*, a uma abordagem essencialmente motivacional e pessoal do processo de ensino e aprendizagem da matemática, envolvendo expressões como: "*muito bom, gostei muito da tua forma de pensar*" ou "*excelente resposta, mas poderias fazer de esta outra forma* [indicando a sua própria forma de fazer]". Isso deixa à margem qualquer referência ao elemento central da discussão os aspetos[44] relacionados com o tema matemático, sem vestígios de contribuições para o desenvolvimento cognitivo matemático do aluno.

Figura 3 – *Respostas do Grupo 2 ao segundo problema da Parte II da tarefa*


Camila: Professora, aqui a Daiane está dizendo que este objeto (ao lado) é um cubo, mas eu acho que é um paralelepípedo, e a Kátia diz que ouviu a irmã que estuda no 7º ano dizer ontem que é um prisma retangular, afinal quem tem razão?

Todas tem razão, pois deram diferentes defini
corretas para o cubo mágico que pode ser conside
do uma representação de um paralelepípedo (de arestas
com todas as medidas iguais), de um cubo e de um
prisma retangular (de arestas com todas as medidas iguais)

Todos têm razão, pois deram diferentes definições corretas para o cubo mágico que pode ser considerado uma representação do paralelepípedo (de arestas com todas as medidas iguais), de um cubo e de um prisma retangular (de arestas com todas as medidas iguais).

Fonte: arquivo autores, 2017

A produção do Grupo 2, exterioriza aspetos do *Knowledge of Topics* (KoT) dos participantes associado tanto ao reconhecimento do cubo como um paralelepípedo e um prisma retangular, quanto à ideia inadequada de que definir e classificar seria uma mesma coisa ("*deram definições corretas*"). Essa dimensão do KoT que necessita ser foco de atenção na formação, é evidente ao sustentarem que o cubo é "*uma representação do paralelepípedo"* e "*de um prisma retangular*", o que se vincula à forma de entender a que corresponde um ente matemático e uma representação de determinado ente, sendo este matemático ou não. Tal como na resposta do grupo anterior, observamos uma evidência de *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) na conexão transversal com o conteúdo de polígonos e com a classificação de polígonos, discutida em sessões de trabalho anteriores (particularidade do quadrado visto

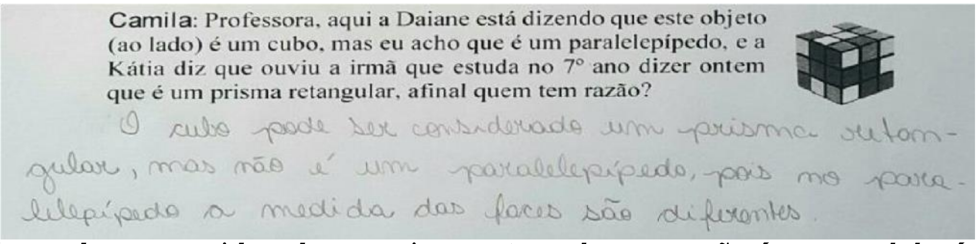
[44] Estes aspetos não têm de ser apenas os conteúdos, mas têm, necessariamente, de estar relacionado com algum conteúdo matemático – podem ser, em determinado momento, por exemplo, a resolução de problemas matemáticos, modelagem matemática, comunicação matemática, ou outros contextos em que as competências, habilidades e conhecimentos matemáticos vão sendo potenciados.

como retângulo). Também os elementos deste grupo fazem uso de uma linguagem matemática adequada *Knowledge of the Practices of Mathematics* (KPM), por exemplo, ao falar em arestas e lados.

Quanto ao conhecimento interpretativo, os indícios sinalizam a falta de discussão do grupo sobre o *feedback*, assim como ocorreu no grupo anterior. O *feedback* é visto como uma avaliação (entendida no sentido punitivo), deixando "escapar" a oportunidade de discutir a classificação dos sólidos de forma inclusiva. Essa ação requer que o professor efetue um conjunto de questões que efetivamente promovam um conflito cognitivo nos alunos, e contribuam com as discussões subjacentes para erradicar esse conflito. Essa postura avaliativa fica patente logo ao iniciarem a resposta afirmando que "Todos tem razão". Essa é uma posição de julgador de mérito e não uma visão que busca entender os raciocínios e os argumentos dos alunos mesmo quando são distintos dos esperados pelo professor e que procura auxiliar o aluno a apropriar-se, de forma cognitiva, de algo que lhe parece novo.

Por fim, analisemos a resposta do Grupo 3.

***Figura* 4 –** *Respostas do Grupo 3 ao segundo problema da Parte II da tarefa*



O cubo pode ser considerado um prisma retangular, mas, não é um paralelepípedo, pois no paralelepípedo a medida das faces são diferentes.
Fonte: arquivo autores, 2017

O Grupo 3 classificou a figura como um prisma, mas, não como um paralelepípedo retangular, argumentando que as "*medidas das faces é [sic] diferente*". Esse argumento levanta, a questão associada ao entendimento do grupo sobre o que é medir e sobre a medida a que se referem. Na discussão do grupo, que sustenta esta produção escrita, ocorreu o seguinte diálogo:

> *Amélia: É um prisma retangular... [indicando o cubo] agora dizer que esses dois são paralelepípedos... Para ser um paralelepípedo tem de ter 2 lados maiores e dois menores... dois retângulos.*
>
> *Betânia: Mas, então essa parte do prisma retangular... como que não é, se a base é um retângulo?*
> *Cássia: A base é retangular... quadrado é retângulo.*
> *Amélia: Mas, para ser paralelepípedo... o retângulo é um prisma retangular? É! É um cubo? É, só não paralelepípedo.*
> *Cássia: Então,... mas, as bases do paralelepípedo também não são retangulares?*
> *Amélia: Sim, mas, para ser um paralelepípedo ele não pode ter [ininteligível] os lados iguais*
> *Betânia: Todos os lados iguais. Tem a diferença nas horizontais e nas verticais [referindo-se ao paralelepípedo]*
> *Amélia: Para ser paralelepípedo não pode ter... os ângulos iguais no caso*
> *Betânia [apontando para as arestas]: Os ângulos porque a ligação é aqui ao longo dos ângulos*

Notamos, nas discussões ocorridas, que Cássia, de modo similar ao que fizeram os participantes dos outros dois grupos, fez uma conexão transversal com o conteúdo de polígonos (*Knowledge of the Structure of Mathematics*), mas revelou dificuldades em embasar seu argumento ao defender essa conexão. Há ainda indícios de alguns aspetos (críticos) relativamente ao conhecimento do professor no âmbito do uso de uma linguagem matemática formal (*Knowledge of the Practices of Mathematics*), bem como do domínio das características e das propriedades das formas geométricas (*Knowledge of Topics*), pois, em sua argumentação, Amélia alegou que o retângulo é um prisma retangular e um cubo, mas não é um quadrado e os demais membros do grupo aceitaram tal afirmação sem contestações, não se dando conta de que estavam afirmando que uma figura plana é um sólido.

O conhecimento do professor associado à visualização torna-se essencial na resolução de muitos dos problemas geométricos. Em particular, no problema proposto, um conhecimento relativo à visualização no contexto dos sólidos associados à sua decomposição em figuras de menor dimensão tornaria possível o entendimento da inadequação matemática da linguagem utilizada enquanto (re)construíam, mediante a análise das propriedades, a classificação do cubo como um sólido, um paralelepípedo e um prisma retangular.

Concernente ao conhecimento interpretativo, e ao *feedback* "fornecido", vemos que, na linha dos demais grupos, foi assumida uma postura avaliativa. Portanto, não houve interpretação como ponto de partida, resultados similares aos relatados em estudos anteriores[45]. Os participantes evidenciaram alguma preocupação com a adequação e a correção.

Conclusões

A análise permitiu obter uma visão mais ampla e profunda de alguns indícios de conhecimento especializado do professor de/que ensina matemática. Essas evidências estão nas propriedades e nas características de prismas retangulares (Knowledge of Topics), sendo clara a necessidade de uma discussão mais focada nas especificidades desse conhecimento matemático do professor de modo a possibilitar um incremento que sustente as conexões matemáticas e extra matemáticas (*Knowledge of the Structure of Mathematics*) e o uso adequado dos formalismos matemáticos do *Knowledge of the Practices of Mathematics* (KPM).

O investimento em cursos de formação continuada que busquem ampliar o conhecimento especializado, alusivo aos subdomínios mencionados no conteúdo de sólidos geométricos resultaria no enriquecimento do *feedback* fornecido aos alunos. Assim, poderiam ser inseridas perguntas imbuídas da adequação e dos formalismos matemáticos, o que resgataria conexões que os auxiliariam na apreensão cognitiva dos conteúdos e sustentaria sua prática em um conhecimento interpretativo que lhe permitisse assumir como ponto de partida as produções e os possíveis raciocínios dos alunos. Sendo o

[45] MELLONE, Maria; JAKOBSEN, Arne; RIBEIRO, Carlos Mathematics educator transformation(s) by reflecting on students' non-standard reasoning. In: Konrad Krainer; Naďa Vondrová. CERME 9 - NINTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, [s. n]. Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Prague, Czech Republic, 2015. pp.2874-2880.

Conhecimento Interpretativo uma dimensão essencial que sustenta a prática do professor a qual segue determinada linha de atuação, persegue objetivos matemáticos a curto, médio e longo prazo, e busca sempre que seu alunos entendam o que fazem e por que fazem, partindo do que sabem, torna-se essencial um foco mais premente no desenvolvimento desse conhecimento, e de uma tomada de consciência de sua importância e de suas potencialidades na e para a prática, tendo em vista o tipo de prática que demanda um Conhecimento Interpretativo).

A pesquisa ainda traz à tona a necessidade de um olhar centrado no desenvolvimento da visualização, por conta de seu potencial de ampliar o entendimento de muitos dos temas da Geometria e de seu papel na resolução de problemas essencialmente, mas não exclusivamente, geométricos. A importância da visualização sustenta-se, também, nas possibilidades de originar transformações capazes de incrementar a inventividade e a percepção cognitiva do indivíduo[46].

Ainda que esta pesquisa relate uma pequena parte da resolução de uma questão de uma tarefa conceitualizada para a formação de professores[47], os resultados mostram a potencialidade desse tipo de tarefa para discutir situações da e para a prática e fomentar mais pesquisas embasadas no Conhecimento Especializado e Interpretativo. Com essa abertura investigativa, obtemos um entendimento do conteúdo, do modo como as diferentes dimensões do conhecimento se relacionam e impactam na prática e da maneira como esse conhecimento pode ser desenvolvido para quebrar as barreiras que nos restringem e nos levam, frequentemente, a pontos de vista em que nos sentimos "mais confortáveis" mas que a História e a pesquisa já mostraram que não são produtivos quando o objetivo é a melhoria da prática matemática e as aprendizagens dos alunos.

---

[46] DUVAL, Raymond. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In: BASIC ISSUES FOR LEARNING, 1999, Cuernavaca, Morelos, Mexico. *Anais*... Cuernavaca, Morelos, Mexico: [s.n.], 1999. p. 23–26.
[47] Vide nota de rodapé 13.

Agradecimentos: Este texto foi produzido tomando por base o trabalho desenvolvido no âmbito do projeto "*Conhecimento matemático especializado do professor que ensina matemática na educação infantil e nos anos iniciais: um foco em conteúdos de Geometria*", processo número 2016/22557-5, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Recebido em: 31/01/2018
Aprovado em: 22/04/2018