

# TAREFAS PARA A FORMAÇÃO PARA DESENVOLVER O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR NO ÂMBITO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM CONTEXTOS DE REGULARIDADES DE CRESCIMENTO: EXEMPLOS DE CONTEÚDO DE CONHECIMENTO A DESENVOLVER

Miguel Ribeiro<sup>1</sup>  
Alessandra Almeida<sup>2</sup>

**Resumo:** Assumindo a prática do professor como sendo especializada, pois demanda um conhecimento matemático e pedagógico especializado e, considerando a relação direta entre os resultados dos alunos e o conhecimento do professor emerge uma agenda de pesquisa que busca mapear o conhecimento especializado do professor em vários temas e tópicos matemáticos em que os alunos revelam dificuldades além de conceitualizar tarefas que contribuam para desenvolver esse conhecimento especializado. Essas tarefas são denominadas Tarefas para a Formação e assumem o papel de instrumento de coleta de informações e recurso para a formação. Neste artigo, a partir de uma tarefa para os alunos no âmbito das regularidades de crescimento para desenvolver o Pensamento Algébrico, introduzimos a noção das cinco dimensões fundamentais para a implementação de qualquer tarefa matemática; as questões matemáticas vencedoras e o papel do conhecimento especializado que se espera desenvolvido no contexto formativo também para o contexto investigativo.

**Palavras-chave:** Formação e Pesquisa Especializada; cinco dimensões fundamentais de uma tarefa; Tarefa Formativa; MTSK

---

<sup>1</sup> Professor da Faculdade de Educação (FE) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp).

<sup>2</sup> Professora da Pontifícia Universidade Católica de Campinas (PUCCC).

## TASKS FOR TEACHER EDUCATION FOR DEVELOPING MATHEMATICS TEACHERS SPECIALIZED KNOWLEDGE IN THE SCOPE OF ALGEBRAIC THINKING IN CONTEXT OF REGULARITIES: EXAMPLES OF KNOWLEDGE TO BE DEVELOPED

**Abstract:** Assuming the teacher's practice as being specialized, which demands specialized mathematical and pedagogical knowledge and, considering the direct relationship between student results and the teacher's knowledge, a research agenda emerges that seeks to map the teacher's specialized knowledge on various themes and mathematical topics in which students reveal difficulties and conceptualize tasks that contribute to developing this specialized knowledge. These tasks are called Tasks for Teacher Education and play the role of an instrument for data collection and a resource for teacher education. From a task for students within the scope of growth regularities to develop Algebraic Thinking, we introduce the notion of the five fundamental dimensions for the implementation of any mathematical task; the winning mathematical questions and the role of specialized knowledge that is expected to be developed in the teacher education context also for the investigative context.

**Keywords:** Specialized Teacher Education and research; five fundamental dimensions for implementing tasks; Formative Tasks; MTSK.

### Algumas notas iniciais

Os resultados dos alunos brasileiros nas provas nacionais como o SAEB, e internacionais como o PISA, estão muito longe do que seria o ideal, e longe até do esperado<sup>3</sup> em Matemática. Os dados do SAEB 2021 apontam que 37% dos alunos do 2.º ano dos Anos Iniciais encontram-se até o nível 3 da escala de proficiência, por exemplo, e, também por isso necessitamos nos questionar sobre o nosso papel enquanto pesquisadores que dizem desenvolver pesquisa no âmbito da formação de professores e o impacto desse trabalho na comunidade. Apesar de a quantidade de pesquisas e publicações no âmbito da formação de professores ter aumentado substancialmente nos últimos anos (décadas)<sup>4</sup>, esse trabalho e investimento não têm tido o impacto expectável na melhoria da qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos, exteriorizada pelos resultados que têm sido obtidos. Um dos vários argumentos comumente utilizados para justificar essa falta de impacto das pesquisas

---

<sup>3</sup> Para mais informações consultar, por exemplo os dados do IDEB ou SAEB [https://download.inep.gov.br/saeb/resultados/apresentacao\\_saeb\\_2021.pdf](https://download.inep.gov.br/saeb/resultados/apresentacao_saeb_2021.pdf) dos últimos anos, ou, numa perspectiva internacional, consultar os resultados dos alunos brasileiros no PISA [https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018\\_CN\\_BRA.pdf](https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_BRA.pdf).

<sup>4</sup> ANDRÉ, M. E. D. A. Pesquisas sobre formação de professores: tensões e perspectivas do campo. FONTOURA, H. A.; SILVA, M. (org.). **Formação de professores, culturas: desafios à Pós-graduação em Educação em suas múltiplas dimensões. E-book online.** In: Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sudeste, v. 10, p. 24-36, 2011.

em Educação Matemática no âmbito da formação de professores relaciona-se com a impossibilidade de generalizar as pesquisas que são desenvolvidas nesse âmbito<sup>5</sup>.

Com essa preocupação em mente, entendemos a necessidade de fazer diferente do que tem sido feito, de modo a podermos contribuir com algo novo e, nesse sentido, considera-se fundamental desenhar e desenvolver pesquisas que possam contribuir com resultados em dimensões generalizáveis. Com esse fito, temos focado, no trabalho que desenvolvemos no CIEspMat<sup>6</sup>, na conceitualização e desenho das denominadas Tarefas Formativas<sup>7</sup> focando a estrutura dessas tarefas e dos seus elementos constituintes em alguns dos mais recentes resultados de pesquisa em Educação Matemática que se focam nas aprendizagens dos alunos e no conhecimento e práticas matemáticas do professor. Ainda que não possamos generalizar resultados de estudos de caso, necessitamos passar a generalizar processos e procedimentos de construção de instrumentos de coleta de informação e de etapas de análise, como são alguns dos elementos constitutivos dessas Tarefas Formativas.

Buscando uma mudança na prática letiva e nas aprendizagens e resultados dos alunos em matemática, como consequência das propostas formativas que se sustentam nos mais recentes resultados de pesquisa, torna-se essencial que a formação de professores possa centrar-se onde é mais necessária, para que possamos passar a formar professores<sup>8</sup> com um conhecimento especializado, possibilitando mudanças sustentadas.

O professor, e o seu conhecimento, assumem um papel preponderante nas aprendizagens e resultados dos alunos em matemática.<sup>9</sup> Assim, contribuir para

---

<sup>5</sup> PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, p. 105-132, 2006.

<sup>6</sup> O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. [www.ciespmat.com.br](http://www.ciespmat.com.br)

<sup>7</sup> RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.

RIBEIRO, M. Tarefas para a Formação e suas especificidades para desenvolver o conhecimento especializado do professor no âmbito do Pensamento Algébrico: entendendo regularidades de repetição, **Revista Espaço Plural**, v. 23, n. 42, 2021.

<sup>8</sup> RIBEIRO, M.; GIBIM, G.; ALVES, C. A necessária mudança de foco na formação de professores de e que ensinam matemática: discussão de tarefas para a formação e o desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 34, p. 1-24, 2021.

<sup>9</sup> GROSSMAN, P. L. **Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation**. American Association of Colleges for Teacher Education and National Education Association, 2010.

NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. V. How large are teacher effects? **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.

melhorar os resultados dos alunos, através da melhoria da qualidade das suas aprendizagens, demanda desenvolver o conhecimento do professor no âmbito desses temas e tópicos matemáticos em que os alunos revelam maiores dificuldades, ou em temas e tópicos matemáticos que a pesquisa mostra que são elementos nucleares das conexões fundamentais para o entendimento matemático dos alunos.

Um desses temas problemáticos para os alunos é o denominado Pensamento Algébrico<sup>10</sup> que deverá permitir desenvolver a gênese da abstração e da generalização em contextos algébricos associados a passar de casos concretos (usualmente associados à Aritmética) para uma visão mais completa da estrutura da matemática envolvida em cada situação, o que nos indica que, portanto, também é um tema problemático no conhecimento do professor e que se torna problemático por vários motivos. Dentre esses motivos podemos elencar o fato de, por ser algo que se associa a formas de Pensar matematicamente<sup>11</sup>, demanda uma mudança de foco de atenção e de prática; por ser algo que se desenvolve<sup>12</sup> e não algo que se ensina em determinado momento específico; por não ser um tópico, não é algo novo que temos de ensinar e que surgiu recentemente na Base Nacional Comum Curricular – BNCC<sup>13</sup>; a generalização, e não o caso concreto, assume um lugar central na prática do professor para possibilitar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico<sup>14</sup>. Assim,

---

<sup>10</sup> BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. **Elementary grade students' capacity for functional thinking**. Em PME 28. Bergen, Norway: PME, v. 2 (pp 135–142), 2004.

GIUSTI, N. M.; GROENWALD, C.; Matemática na comunidade: um contexto educativo para a aprendizagem social e desenvolvimento do pensamento algébrico. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 1, p. 561-590, 2021.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput; D. W. Car- rahe; M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the early grades**, p. 5–18, Erlbaum, 2008.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. Em: BERNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to Algebra**. Dordrecht: Springer, 1996. v. 18p. 65–86

MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. St Albans: Tarquin, 2006.

MASON, J. (2011). What makes 'Algebra' early? En J. Cai & E. Knuth (Eds.), **Algebra in the Early Grades: A global dialogue from multiple perspectives**, Springer, p. 566-568, 2011.

<sup>11</sup> NCTM, 2000 PRINCIPLES, N. C. T. M. Standards for school mathematics. **Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics**, 200.

RIBEIRO, M. **Pensar Matematicamente envolvendo diferentes formas de ver e de contar e as conexões com o Pensamento Algébrico**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021d, v. 4, p. 60.

<sup>12</sup> RIBEIRO, M. Tarefas para a Formação e suas especificidades para desenvolver o conhecimento especializado do professor no âmbito do Pensamento Algébrico: entendendo regularidades de repetição, **Revista Espaço Plural**, v. 23, n. 42, 2021.

<sup>13</sup> BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 4. ed. Brasília: MEC, 2018.

<sup>14</sup> Ver, por exemplo Blanton e Kaput (2005), Bednarz, Kieran e Lee (1996) ou Mason (1996).

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412–446, 2005.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In: **Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching**. Dordrecht: Springer Netherlands, p. 3-12, 1996.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. Em: BERNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.).

para desenvolver o Pensamento Algébrico, torna-se fundamental priorizar um foco de atenção e entendimento da estrutura matemática que permite entender o que varia e o que se mantém e como essa variação e constância ocorrem, de modo a tornar possível descrever essa estrutura e buscar generalizações<sup>15</sup> que permitam ir além do caso concreto que se assume como ponto de partida.

Dentre os tópicos matemáticos com potencialidades algébricas<sup>16</sup> que necessitamos abordar de forma associada à intencionalidade de maximizar essas potencialidades, encontramos o tópico das regularidades<sup>17</sup> de não repetição. Essas regularidades são usualmente consideradas sequências crescentes, associadas à recursividade, o que corresponde a um dos motivos que explicam as dificuldades matemáticas dos alunos em entender as relações que as sustentam. As discussões desse tópico de regularidades de não repetição têm potencialidades algébricas associadas a desenvolver o denominado Pensamento Funcional<sup>18</sup> de forma relacionada com o tópico de funções.

Considerando que a nossa prática enquanto professores se sustenta na preparação, implementação e discussão de tarefas matemáticas<sup>19</sup>, para erradicar as dificuldades matemáticas dos alunos necessitamos considerar tarefas distintas daquelas que têm sido utilizadas comumente. Também pela relação entre as dificuldades dos alunos com o conhecimento do professor, entendemos como necessária uma mudança de foco nos processos formativos do professor, estabelecendo as especificidades do conhecimento para a prática profissional como elemento central, a fim de possibilitar que os professores, por meio de seu conhecimento e suas práticas possibilitem que os alunos entendam o que fazem e por que o fazem, a cada momento.

---

**Approaches to Algebra.** Dordrecht: Springer, v. 18, p. 65–86, 1996.

<sup>15</sup>RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA**, 4(2), 37-62, 2010.

RIBEIRO, M. **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões.** Campinas, SP: Cognoscere, 2021, v. 5, p. 124.

Ibidem nota 13.

<sup>16</sup> Ibidem nota 13.

<sup>17</sup> Tipicamente, quando nos situamos neste contexto consideramos as denominadas sequências crescentes, em que o termo seguinte é “maior” que anterior, considerando alguma propriedade específica. No entanto, deixar ausente a discussão associada às regularidades de decrescimento limita o entendimento dos alunos das conexões matemáticas que necessitam ser promovidas entre, por exemplo, a ideia de antecessor fora do conjunto dos naturais, números infinitos no conjunto dos inteiros e semirreta.

<sup>18</sup> KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput; D. W. Car-rah; M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the early grades** (pp. 5–18). Erlbaum, 2008.

<sup>19</sup> MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks.** St Albans: Tarquin, 2006. RIBEIRO, M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Interpreting students’ non standard reasoning: insights for mathematics teacher education practices. **For the Learning of Mathematics**, v. 36, n. 2, 2016, p. 8-13.

Assim, necessitamos considerar pelo menos dois focos de atenção prioritários: o conhecimento do professor em cada um dos temas e tópicos matemáticos; e as tarefas para os alunos e para a formação que possibilitem práticas pedagógicas emocionantes – aquelas que os alunos têm prazer em realizar – e matematicamente inovadoras.

No que se refere ao conhecimento do professor, dentre a diversidade de formas como esse conhecimento pode ser entendido, assume-se aqui, a conceitualização do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK<sup>20</sup> por considerar, de forma imbricada e igualitária, a existência de um conhecimento matemático especializado e um conhecimento pedagógico especializado associado a cada um dos temas e tópicos matemáticos que temos de abordar. Nesse sentido, o conhecimento que o professor detém, ou assume deter<sup>21</sup> moldará a sua prática profissional (foco e objetivos de aprendizagens matemáticas que persegue) bem como as tarefas que prepara e a forma como as implementa em sala de aula, moldando assim como os alunos perspectivam o ensino e a aprendizagem da matemática.

Para melhor entender o conteúdo do conhecimento do professor e desenvolver esse conhecimento, temos desenvolvido uma abordagem especializada para as tarefas que servem como instrumento de coleta de informações para a pesquisa e recurso para desenvolver a formação em que essas pesquisas são desenvolvidas. Denominamos esse instrumento de Tarefa para a Formação – TpF e forma parte das denominadas Tarefas Formativas<sup>22</sup> e anteriormente essas Tarefas Formativas eram formadas por três documentos<sup>23</sup>: Tarefa para a Formação; documento do professor; e documento do formador. No entanto, em autor (2021),<sup>24</sup> uma das questões em aberto estava relacionada com a necessidade de um conjunto de indicações associadas a tarefa para os alunos de modo a minimizar o *gap* entre o objetivo delineado e o perseguido na implementação o que nos levou a um refinamento da estrutura que se assumia. Em uma perspectiva de refinamento e da generalização da

---

<sup>20</sup> CARRILLO, J. *et al.* The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-256, 2018.

<sup>21</sup> RIBEIRO, M.; CARRILLO, J. Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring Data analysis. In B. Ubuz (Eds.). Proceedings 35<sup>th</sup> PME. Ankara, Turkey: PME, 2011, v. 4, p. 41-48.

<sup>22</sup> Ibidem nota 8.

Ibidem nota 13.

<sup>23</sup> Ibidem nota 8.

<sup>24</sup> Ibidem nota 20.

estrutura que se busca alcançar, apresentamos neste texto uma nova componente que responde à problemática identificada e que busca possibilitar melhorar a qualidade das discussões matemáticas em contextos formativos de sala de aula, maximizando a qualidade das informações coletadas para a pesquisa.

Considerando a agenda de pesquisa delineada pelo grupo CIEspMat, as dificuldades dos alunos no âmbito do Pensamento Algébrico e o objetivo formativo associado aos contextos de coleta de informação das pesquisas que temos desenvolvido com foco nas especificidades do conhecimento do professor, torna-se fundamental que, na conceitualização das Tarefas Formativas, consideremos que conhecimento matemático e pedagógico se pretende que os professores desenvolvam em cada um desses momentos de formação. Essa conceitualização demanda, portanto, da nossa parte enquanto pesquisadores e formadores de professores, um conhecimento especializado envolvendo, entre outros, os tipos e formas de tarefas que podem ser considerados e que de forma associada à implementação mais potencializam o desenvolvimento de uma prática matemática especializada por parte dos professores. Essa indicação assume que a formação deverá contribuir para que, no final, o professor detenha um conhecimento especializado em um nível mais elevado, que contribua para ampliar o seu espaço solução<sup>25</sup> associado aos problemas possíveis de serem formulados em cada tópico e as discussões matemáticas a efetuar.

Neste texto, discutem-se os elementos constituintes das Tarefas Formativas, trazendo uma discussão sobre o conteúdo de cada um desses elementos e uma justificativa da necessidade de passarmos a considerar quatro elementos e não três como até então. Esse é o contexto para apresentar uma Tarefa para a Formação (instrumento de coleta de informações e recurso de formação) implementada em contextos formativos de desenvolver o Pensamento Algébrico no âmbito das regularidades de não repetição – regularidades crescentes. Termina-se com um conjunto de exemplos de conteúdo do conhecimento especializado que se pretende desenvolver com a implementação da Tarefa para a Formação e que serve também de parâmetro de avaliação e posterior confrontação de impacto na prática.

---

<sup>25</sup> JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, v. 19, n. 3-4, p. 135-150, 2014.

## Algumas discussões teóricas

Assume-se o Pensamento Algébrico como uma forma de Pensar matematicamente em contextos com potencialidades algébricas corresponde a uma forma de pensar que se desenvolve e que, por isso, deve ter início na Educação Infantil, contribuindo, assim, para a evolução de formas de Pensamento cada vez mais sofisticadas<sup>26</sup>.

O Pensamento Algébrico é um tema matemático constituído por vários tópicos matemáticos. Considera-se composto por três dimensões<sup>27</sup>: (i) Aritmética Generalizada; (ii) Modelação; (iii) Pensamento Funcional.

### (i) Aritmética Generalizada

Tipicamente a prática profissional na Educação Infantil e nos Anos Iniciais tem como foco os Números e as Operações que os envolvem<sup>28</sup> e isso nos leva a situar essa prática em contextos Aritméticos – em que temos quantidades conhecidas e operações envolvendo essas quantidades cujo objetivo é encontrar o valor de resposta para essa operação ou conjunto de operações. No entanto, esse foco no resultado final para cada operação sempre fica limitado a casos concretos e está inclusive na base de muitas das dificuldades dos alunos em entenderem até as próprias operações<sup>29</sup>. Torna-se essencial, portanto, que possamos explorar esse mesmo contexto dos Números e das Operações em uma perspectiva de variação de relações que permita entender a estrutura matemática envolvida nessas operações e que nos possibilite generalizar os raciocínios e procedimentos envolvidos. Isso requer uma mudança do nosso foco de atenção e de atuação para que passemos a olhar

---

<sup>26</sup> Ibidem nota 13.

<sup>27</sup> KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput; D. W. Carraher; M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the early grades** (pp. 5–18). Erlbaum, 2008.

<sup>28</sup> Ver, por exemplo, Mendonça et al., (2007).

MENDONÇA, T. M. *et al.* As estruturas aditivas nas séries iniciais do ensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. **RELIME**, v. 10, n. 2, p. 219-239, jul. 2007.

MANDARINO, M. C. F. Que conteúdos da Matemática escolar professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental priorizam. In: GUIMARÃES, G.; BORBA, R. (ed.). Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização. Recife: SBEM, 2009.

<sup>29</sup> Ver, por exemplo, Kamii e Dominick (1998).

KAMII, C.; DOMINICK, A. The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds), **The teaching and learning of algorithms in school mathematics**, Resto, V A: NCTM, 1998, p. 130-140.



para as estruturas definidas identificando variações e constâncias nessas estruturas, procurando efetuar questões matemáticas que possibilitem efetuar pequenas variações nas quantidades, mantendo essas estruturas e as relações que as sustentam (questões matemáticas vencedoras – tipos de questões que possuem uma estrutura matemática generalizável e que sempre necessitam ser feitas para que os alunos entendam os elementos matemáticos que sustentam cada tópico)<sup>30</sup>.

Essa mudança de foco e das questões associadas devem estar orientadas às generalizações que se buscam posteriormente na Álgebra, mas que, aqui, se efetuam a partir de exemplos e valores concretos, variando-os. Buscam-se, assim, possibilitar discussões que, em contextos Aritméticos nos permitam efetuar a ponte entre essa Aritmética e a Álgebra<sup>31</sup>.

Alguns exemplos de tópicos matemáticos em que essa discussão de generalização (e abstração) envolvendo quantidades concretas deverá ocorrer – considerando a mudança de foco de obter o resultado, para um objetivo de entender as relações que sustentam a estrutura matemática, relacionam-se com: a decomposição de uma determinada quantidade, associada a diferentes formas de contagem dessa quantidade<sup>32</sup>; a contagem de dois em dois, de três em três, iniciando em um e em outras quantidades; números pares e ímpares; a igualdade e os seus sentidos<sup>33</sup>; conexões entre as diferentes operações; as propriedades associativa e comutativa da adição e da multiplicação; propriedade do elemento neutro da adição e subtração e a relação com o elemento neutro da multiplicação e divisão; o

---

<sup>30</sup> Ibidem nota 13.

<sup>31</sup> BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412–446, 2005.

<sup>32</sup> Em autor (2021d), discutem-se algumas ideias centrais para desenvolver o Pensamento Algébrico dos alunos em contexto de identificar e atribuir significado a diferentes formas de contar uma mesma quantidade (28) explorando múltiplas decomposições dessa quantidade – para além de  $28 = 20 + 8$  –; atendendo à estrutura matemática que permite efetuar essa contagem de diferentes formas e a correspondência entre diferentes registros de representação (por agrupamento e registros aritméticos).

RIBEIRO, M. **Pensar Matematicamente envolvendo diferentes formas de ver e de contar e as conexões com o Pensamento Algébrico**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021d, v. 4, p. 60.

<sup>33</sup> Em um dos livros da Coleção Formação – CIEspMat (RIBEIRO; ALMEIDA, in press), efetua-se uma discussão em torno dos sentidos da igualdade, de tarefas para a sala de aula e conhecimento especializado do professor para discutir com os alunos possibilitando desenvolver o seu Pensamento Algébrico no âmbito da Aritmética Generalizada.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. **Desenvolvimento do Pensamento Algébrico em contextos de entender os sentidos da igualdade e o conhecimento especializado do professor**. Campinas: Cognoscere, in press, v. 15, p. 148.

entendimento de que  $2 \times 3$  e  $3 \times 2$  se associam a representações distintas apesar de possuírem o mesmo resultado (o produto é o mesmo, mas a multiplicação é distinta)<sup>34</sup>.

## **(ii) Modelação**

A modelação no âmbito do Pensamento Algébrico está associada à resolução de problemas em contextos aritméticos<sup>35</sup>, o que leva a que, para que possa ocorrer o desenvolvimento dessa forma de pensar, os problemas têm de ser conceitualizados com esse fito e têm de estar associados a um conjunto de questões que vão possibilitar ampliar e aprofundar as discussões a partir da resposta inicialmente obtida para o problema (questões matemáticas vencedoras). A existência de um conjunto de perguntas associadas que expandam o próprio problema – mantendo a mesma estrutura e as (in)variações presentes no problema – é fundamental, pois tem de ficar claro, para nós, professores e pesquisadores, que apenas resolver o problema inicial não vai levar ao desenvolvimento dessa forma de Pensar algebricamente.

Para o desenvolvimento dessa atenção à estrutura e às variações que a sustentam, é necessário que os problemas que se propõem envolvam algumas condições que possam variar enquanto outras se mantêm constantes, mantendo a estrutura matemática do próprio problema e da situação inicial. Não são, portanto, quaisquer problemas que potenciam efetuar esta discussão de desenvolver o Pensamento Algébrico associado à resolução de problemas de modelação, requerendo um conhecimento matemático especializado para que possamos, enquanto professores, formular, selecionar e/ou alterar problemas que possam ter essas potencialidades e permitam alcançar esse objetivo de entender as relações e desenvolver o hábito mental de pensar dessa forma relacional.

## **(iii) Pensamento Funcional**

Desenvolver o Pensamento Funcional como uma das dimensões a desenvolver do Pensamento Algébrico associa-se a discussões que se situem em

---

<sup>34</sup> RIBEIRO, M.; ALVES, C.; GIBIM, G. **Entendendo as propriedades da multiplicação e a estrutura matemática associada à tabuada como contexto para desenvolver o Pensamento Algébrico**. Campinas: Cognoscere, in press, v. 11. p. 167.

<sup>35</sup> BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412–446, 2005.

contextos que exteriorizem estruturas matemáticas envolvendo relações funcionais entre elementos de conjuntos disjuntos.

Alguns exemplos típicos de contextos propícios para discutir a estrutura matemática que permite entender as relações de dependência envolvem contextos de (a) regularidades de repetição ou (b) regularidades de não repetição.

- (a) **Regularidades de repetição** – correspondem a regularidades que sustentam uma estrutura que se repete, do mesmo modo, em toda a sua ocorrência. Corresponde à regularidade que se identifica e sustenta os denominados padrões de repetição. Os seus elementos fundamentais são: **regularidade matemática** (que nos indica a quantidade de elementos que se repetem – o que é constante) e **elemento gerador mínimo** (a quantidade mínima de objetos que se repetem e a sua ordem).
- (b) **Regularidades de não repetição** – correspondem a regularidades que sustentam uma estrutura que não mantém a repetição entre elementos quaisquer dois dos seus elementos e que, portanto, a relação numérica entre as mesmas propriedades de quaisquer dois conjuntos de elementos consecutivos não é constante. Os seus elementos fundamentais são: **regularidade matemática** (que indica a relação não constante entre dois conjuntos de elementos consecutivos) e **termo geral** (que, quando definimos o primeiro elemento, identifica a relação entre elementos correspondentes de dois conjuntos disjuntos – posição e quantidade de elementos ou da propriedade<sup>36</sup> desses elementos em que a regularidade se sustenta).

Usualmente, este tópico das regularidades de não repetição é entendido como sequências de crescimento (deixando à margem os demais tipos de não repetição), porém essa nomenclatura acarreta um foco de atenção prioritariamente na recursividade e não na estrutura matemática envolvendo os dois conjuntos disjuntos envolvidos que corresponde ao foco fundamental para possibilitar desenvolver o denominado Pensamento Funcional<sup>37</sup> que sustenta posteriormente o entendimento formal do tópico das funções (Álgebra).

O Pensamento Funcional pode ser entendido como a busca por expressar as relações entre quantidades covariantes de modo a explicitar a relação subjacente de

---

<sup>36</sup> Aqui podemos considerar, por exemplo, a área, o perímetro, ou o volume.

<sup>37</sup> Ibidem nota 28.

determinada função por meio de algum registro de representação convencional ou não convencional<sup>38</sup>. Esta forma de pensar está tipicamente associada à ideia de função que se discute de modo formal nos Anos Finais (7.º ano seguindo o que se encontra atualmente no documento oficial brasileiro – Base Nacional Comum Curricular)<sup>39</sup> e, de forma mais acentuada, no Ensino Médio. No entanto, quando falamos em Pensamento Funcional, não se assume o trabalho formal com funções, mas o desenvolver uma forma de pensar que se associa a uma das ideias centrais que serão formalizadas posteriormente no âmbito das funções e que se relaciona com entender as relações de dependência e independência entre elementos de conjuntos disjuntos e que estão, de algum modo, relacionados (pela função que define essa relação).

Um trabalho envolvendo regularidades de não repetição propicia a oportunidade de os alunos realizarem as suas próprias generalizações<sup>40</sup>. Assim, no caso das regularidades de crescimento, a ideia central é a de sair de um foco de atenção no que se passa dentro de um mesmo conjunto e entre os elementos desses conjuntos (recursividade) e passar a focar a atenção nas relações que se verificam entre elementos correspondentes dos dois conjuntos que se consideram – buscando identificar a estrutura matemática que permite descrever essas relações e que se associa a entender o que se altera e o que se mantém e como essa (in)alteração ocorre (relação funcional).

Esta mudança de foco – de considerar relações entre elementos de um conjunto para buscar relações entre elementos de dois conjuntos – está associada a uma outra mudança de foco que nos possibilite deixar de priorizar identificar o que é observável aos sentidos e passar a entender a estrutura matemática que sustenta cada situação que se observa ou vivencia. Essa estrutura matemática pode ser descrita em termos das regularidades que a sustentam, e é a partir dessas regularidades e do seu entendimento que se torna possível alcançar a generalização – que deverá passar a corresponder a um dos elementos fundamentais da nossa

---

<sup>38</sup> KIERAN, C. The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. **ZDM – Mathematics Education**, v. 54, p. 1131–1150, 2022.

<sup>39</sup> Ibidem nota 14.

<sup>40</sup> JUNGBLUTH, A.; SILVEIRA, E.; GRANDO, R. C. O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 96-118, 2019.

prática profissional enquanto professores aplicando-a em diferentes contextos e recorrendo a uma diversidade de recursos e registros de representação<sup>41</sup>.

Essa ideia central do Pensar matematicamente em diferentes contextos que permitem buscar generalizações nos leva a situar esse Pensar em contextos com potencialidades algébricas, e essas potencialidades só emergem se associadas a um conjunto de questões que são direcionadas a buscar tornar explícitas essas generalizações matemáticas, as quais denominamos questões vencedoras.

A emergência dessas questões, associadas a práticas pedagógicas emocionantes e matematicamente inovadoras que se tornem parte integrante do nosso “fazer profissional” demanda um conhecimento que nos permite fazer diferente do que consideramos que foi feito conosco e que não se desenvolve na prática, demandando contextos formativos conceitualizados com o intuito de desenvolver esse conhecimento.

O conhecimento do professor pode ser entendido sob muitas perspectivas – que vão desde um extremo que prioriza o conhecimento matemático até ao outro extremo de priorizar o conhecimento pedagógico –, mas, se consideramos que o nosso trabalho como professores é especializado, então, tem de ser considerado também como especializado esse conhecimento que possibilita que os alunos entendam matemática e não apenas repliquem um conjunto de regras<sup>42</sup>. Nesse sentido, torna-se necessário fazer o que ainda não foi feito (de forma generalizada) e, na pesquisa, e na formação, assumir uma perspectiva de integração desses dois extremos, considerando que conhecimento matemático e pedagógico são igualmente importantes e que, portanto, necessitamos considerar ambos de forma imbricada.

Assumir essa perspectiva e considerar que não apenas o conhecimento pedagógico define o tipo de prática que implementamos e os objetivos de aprendizagens (matemáticas) que perseguimos, pressupõe considerar dimensões e

---

<sup>41</sup> DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In.: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas – São Paulo: Papirus Editora, 2010.

<sup>42</sup> BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

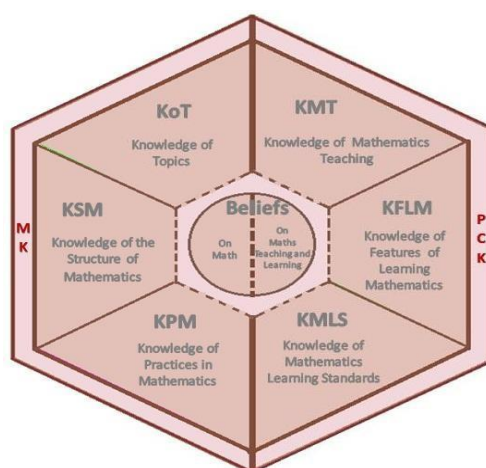
Ibidem nota 21.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1999.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. 'Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi'. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 8, n. 3, p. 255-281, 2005.

focos específicos para as formações, para as discussões a desenvolver e para o que se espera os alunos venham a entender. Com esse intuito, consideramos a conceitualização do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK<sup>43</sup>, que considera dois subdomínios de conhecimento – *Mathematical Knowledge* (MK) e *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) especificamente relacionados com cada um dos tópicos matemáticos que nos cumpre conhecer enquanto professores.

Figura 1 – Domínios do *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* – MTSK



Fonte: Carrillo et al., (2018, p. 241)

Nesse nosso conhecimento especializado inclui-se, por exemplo, conhecer os distintos registros de representação possíveis que permitem exteriorizar o tópico de distintas formas; conhecer o que nos permite entender o tópico como um fenômeno; conhecer uma diversidade de definições e procedimentos associados ao tópico; conhecer as conexões matemáticas existentes entre o tópico em discussão e outros tópicos matemáticos; conhecer a resolução de problemas como forma de proceder em matemática; conhecer o que se encontra expresso nos documentos oficiais sobre cada um dos tópicos específicos; conhecer as maiores dificuldades dos alunos e os motivos matemáticos que as podem sustentar; conhecer os recursos mais potentes e adequados que podemos utilizar para desenvolver o entendimento matemático dos alunos em cada tópico.

Cada um dos domínios de conhecimento matemático especializado é considerado composto por três subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge*

<sup>43</sup> Ibidem nota 21.

*of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM).

*Knowledge of Topics* (KoT) corresponde ao conhecimento do professor associado ao que se faz, como se faz e por que se faz de determinada forma, incluindo o conhecimento sobre as características do resultado e de distintos registros de representação para cada tópico bem como o conhecimento que permite entender as diversas definições equivalentes para o conceito, e entender os fenômenos e aplicações associadas.

*Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) é constituído pelo conhecimento associado às conexões matemáticas entre tópicos matemáticos distintos e inclui o conhecimento relativo a (i) conexões de complexificação; (ii) conexões de simplificação; (iii) conexões transversais; (iv) conexões auxiliares.

*Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM) inclui o conhecimento do professor associado a conhecer (i) diferentes formas de demonstrar; (ii) diferentes critérios para que uma generalização seja válida; (iii) diferentes estratégias de resolução de problemas ou de modelagem matemática; (iv) o significado de definição, axioma ou teorema como elementos constituintes da matemática. O conhecimento matemático que forma parte deste subdomínio assume um papel importante nas questões vencedoras associadas ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico entendido como a forma de pensar matematicamente que permite atribuir significado à estrutura e às constâncias e variações nessa estrutura matemática buscando a sua generalização.

O conhecimento pedagógico especializado é constituído pelos subdomínios *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT), *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS).

*Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) é formado pelo conhecimento relativo à (i) sequenciação das tarefas e questões (vencedoras) que irão maximizar a qualidade das discussões matemáticas para possibilitar o entendimento de cada tópico matemático; (ii) analogias e metáforas mais adequadas para cada situação e contexto e como e quando empregá-las de forma adequada e matematicamente correta; (iii) diferentes recursos e estratégias de ensino de cada um dos tópicos que nos permita escolher e utilizar os mais adequados em cada momento, e da melhor forma, de modo a alcançar o objetivo de aprendizagens matemáticas delineado. Esse conhecimento sustenta a decisão de quando, e que questões vencedoras formular,

para que sejam mais assertivas em termos de aprendizagens matemáticas perseguidas (sequenciação temporal).

*Knowledge of the Features of Learning Mathematics* (KFLM) inclui o conhecimento pedagógico do professor, associado a cada tópico matemático relativo (i) as formas de interação dos alunos com o tópico matemático em discussão (processos e estratégias empregadas; linguagem; vocabulário matemático usualmente empregado); (ii) as maiores dificuldades ou facilidades e os erros típicos dos alunos que impedem ou facilitam a sua aprendizagem em cada tópico; (iii) as concepções dos alunos sobre a matemática e os seus principais interesses e expectativas em relação aos tópicos matemáticos específicos; (iv) as características de aprendizagem de cada um dos distintos tópicos matemáticos; (v) as teorias de aprendizagem pessoais ou institucionais.

*Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS) refere-se ao conhecimento do conteúdo dos documentos oficiais que guiam a elaboração dos currículos, dos próprios currículos, e dos últimos resultados de pesquisa sobre o ensino e as aprendizagens matemáticas de cada um dos temas e tópicos matemáticos que nos cumpre abordar e de outros que com eles se relacionam.

Dado que a prática do professor se sustenta na implementação e discussão de tarefas<sup>44</sup>, para desenvolver esse conhecimento especializado do professor, de forma que contribua para uma mudança de foco das práticas profissionais<sup>45</sup>, associadas ao desenvolvimento profissional do professor<sup>46</sup> a formação de professores necessita possibilitar criar pontes que levem a erradicar, ou, pelo menos, diminuir, a diferença entre a matemática que os professores aprenderam e a matemática que se espera que possam ensinar aos seus alunos<sup>47</sup>. Considera-se fundamental que a formação possibilite desenvolver o conhecimento matemático especializado em contextos e vivências e experiências que permitam aos professores modelarem as suas práticas

---

<sup>44</sup> MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. St Albans: Tarquin, 2006. RIBEIRO, C.M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Interpreting students' non standard reasoning: insights for mathematics teacher education practices. **For the Learning of Mathematics**, v. 36, n. 2, 2016, p. 8-13.

<sup>45</sup> PONTE, J. P. et al. Perspetivas teóricas no estudo das práticas profissionais dos professores de matemática. **Encontro de Investigação em Educação Matemática**, p. 267-278, 2012.

<sup>46</sup> FIORENTINI, D.; CRECCI, V. M. Práticas de desenvolvimento profissional sob a perspectiva dos professores. **Revista Eletrônica da Divisão de Formação Docente**. Uberlândia, v. especial de lançamento. Recuperado de <http://www.seer.ufu.br/index.php/diversapratica/article/view/19781>, 2012.

PONTE, J. P. et al. O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. **Bolema**, v. 30, p. 868-891, 2016.

<sup>47</sup> ZASLAVSKY, O.; LEIKIN, R. Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 7, p. 5-32, 2004.



futuras pelas experiências vivenciadas, comprovando, assim, que o foco dessa formação não pode ser o conhecimento pedagógico, pois esse conhecimento pedagógico necessita ser desenvolvido enquanto se vivem as práticas modeláveis.

Com esse intuito, temos desenvolvido a conceitualização das denominadas Tarefas Formativas<sup>48</sup> que se encontram associadas a objetivos formativos específicos para desenvolver as especificidades do conhecimento do professor no âmbito de cada um dos tópicos matemáticos que os alunos têm o direito de entender e que, portanto, nós, professores, temos o dever de explorar o entendimento e colaborar para que ele ocorra. Essas Tarefas Formativas são constituídas por vários documentos que sustentam a implementação da formação aproximando ao máximo o objetivo formativo delineado do objetivo alcançado.

Consideram-se abordagens que se situam em contextos que se aproximam de um cenário autêntico de ensino e de aprendizagem, buscando garantir que os (futuros) professores priorizem as aprendizagens matemáticas dos alunos e não o conteúdo matemático por si mesmo<sup>49</sup> ou as questões pedagógicas gerais sem qualquer relação com as aprendizagens. Para isso, é, portanto, essencial que as tarefas com que são confrontados na formação sejam, por um lado, matematicamente significativas<sup>50</sup>, permitindo explorar (e ter como ponto de partida) as fragilidades do conhecimento matemático dos (futuros) professores – identificadas pela pesquisa – e, por outro lado, permitam ser a ponte entre teoria e prática de forma a explorar as relações e conexões entre a matemática avançada (universitária) e elementar (matemática avançada do ponto de vista elementar e a matemática elementar de um ponto de vista avançado<sup>51</sup>). Considerando que “o que os alunos aprendem é em grande parte definido pelas tarefas que lhes são dadas”<sup>52</sup>, e as especificidades do conhecimento do professor para a sua prática profissional de possibilitar que os

---

<sup>48</sup> Ibidem nota 8.

Ibidem nota 9.

<sup>49</sup> MITCHELL, R.N.; MARIN, K.A. Examining the use of a structured analysis framework to support prospective teacher noticing. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 18, p. 551–575, 2015.

<sup>50</sup> Aqui é importante salientar que assumimos explicitamente que uma tarefa pode ter mais ou menos potencialidades para possibilitar que os alunos entendam e desenvolvam as suas formas de Pensar matematicamente, mas essas potencialidades apenas serão efetivadas, ou não, pela implementação que venha a ocorrer. É essa implementação que vai garantir que se transformem em tarefas matematicamente significativas e que levam, portanto, ao desenvolvimento desse conhecimento e formas de pensar em matemática.

<sup>51</sup> KLEIN, F. **Elementar mathematik vom höheren standpunkte aus**. 1. Vol. 4. Ed. Berlin: Springer, 1933.

<sup>52</sup> HIEBERT, J.; WEARNE, D. “Instructional Task, Classroom Discourse, and Students’ Learning in Second Grade.” **American Educational Research Journal**, v. 30, 1993, p. 393-425.

alunos entendam, é essencial que as tarefas conceitualizadas e implementadas levem ao desenvolvimento das especificidades desse conhecimento do professor.

Até recentemente as Tarefas Formativas consideradas eram compostas por três documentos;<sup>53</sup> porém, pela evolução do trabalho de pesquisa e formação que desenvolvemos, temos refinado esse entendimento e sentimos a necessidade de incluir um quarto documento como elemento constituinte dessas Tarefas Formativas, (documento das cinco dimensões fundamentais para a implementação da tarefa dos alunos).

A inclusão desse documento e dessas dimensões contribui para melhorar a qualidade da proposta de tarefa da Tarefa para a Formação (veja-se conteúdo abaixo) como instrumento de coleta de informações para a pesquisa e como recursos para desenvolver a formação de modo a maximizar a qualidade e adequação das discussões matemáticas para desenvolver o conhecimento especializado ou interpretativo do professor.

Assim, as Tarefas Formativas consideram-se constituídas por: (i) Tarefa para a Formação (TpF); (ii) cinco dimensões fundamentais para a implementação da tarefa do aluno; (iii) documento do professor; e (iv) documento do formador.

**(i) Tarefa para Formação (TpF)** corresponde à tarefa que vai sustentar as discussões no contexto formativo e sempre tem como ponto de partida uma situação da prática matemática do professor e busca possibilitar regressar a essa prática melhorada. Tipicamente, contém uma tarefa para os alunos (de introdução a algum tópico matemático) e um conjunto de questões direcionadas para o professor desenvolver o seu conhecimento interpretativo e/ou especializado;

**(ii) Cinco dimensões fundamentais para a implementação da tarefa do aluno** é um documento que contém um conjunto de indicações para que a tarefa dos alunos possa ser implementada, associada a possibilitar que os alunos possam entender o que fazem e por que o fazem, a cada momento. Essas cinco dimensões referem-se a:

**(a) Objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue com a tarefa.**

Deve ser entendido aqui na perspectiva de que conhecimento matemático se espera que os alunos desenvolvam durante a resolução e a discussão da

---

<sup>53</sup> Ibidem nota 13.  
Ibidem nota 8.

tarefa. Não se consideram, portanto, aspectos gerais associados a diferentes áreas de conhecimento – por exemplo, saber trabalhar em grupo ou comunicar-se de forma correta – nem gerais dentro da própria matemática – por exemplo, desenvolver a comunicação ou argumentação matemática ou aprender a resolver problemas – pois esse deverá ser um objetivo transversal a todas as tarefas.

- (b) **Habilidade da BNCC.** Identificar a habilidade indicada pela BNCC que mais se relaciona com o objetivo de aprendizagens matemáticas e que pretendemos contribuir para desenvolver com a implementação desta tarefa. Na nossa perspectiva, as habilidades da BNCC expressam o “saber fazer”, e nós entendemos o processo de ensino e aprendizagem, em regra, no máximo, como o destino final e não como o ponto de partida. Esse “saber fazer” relaciona-se com objetivos terminais e não a objetivos de introdução ou desenvolvimento de entendimento de um tópico.
- (c) **Os recursos necessários e forma de trabalho dos alunos.** Considerar quais os recursos físicos e tecnológicos necessários para a implementação da tarefa da forma como esperamos que essa implementação ocorra. Nesses recursos, incluem-se não apenas o que os alunos necessitam para desenvolver a atividade associada à tarefa proposta, mas também os que se consideram necessários de forma associada à organização da sala de aula para os alunos desenvolverem essa atividade. De forma explícita, deveremos incluir também a forma de trabalho dos alunos de modo que qualquer outro professor possa ir criando uma imagem mental do que se espera que os alunos façam e como façam, em termos metodológicos gerais.
- (d) **Maiores dificuldades dos alunos.** Entendidas aqui como quais as principais dificuldades específicas de matemática que os alunos podem revelar durante a implementação e a discussão da tarefa. Essas dificuldades podem estar relacionadas com os recursos utilizados, mas têm de ser incluídas, necessariamente, quais as possíveis dificuldades em termos do desenvolvimento do conhecimento matemático que se encontra associado à tarefa e quais os possíveis erros que estes podem cometer. Essas dificuldades podem ser identificadas a partir da literatura sobre o tópico e complementadas pelas observações a partir da implementação prática das tarefas.

(e) **Comentários para a implementação.** Incluem “toda” a informação que se considera necessária e suficiente para permitir que qualquer professor, que tenha previamente participado das discussões associadas a desenvolver o seu conhecimento especializado no âmbito do tópico específico, possa implementar a tarefa associada ao objetivo matemático com o qual foi elaborada).

**(iii) Documento do professor** refere-se a uma síntese do conhecimento matemático especializado que se configura como necessário e suficiente para que o professor possa implementar a tarefa dos alunos. Este documento associa-se a um dos mais recentes resultados de pesquisa<sup>54</sup> com foco no conhecimento dos alunos e do professor no âmbito do tópico específico em discussão e a sua elaboração associa-se à pesquisa que se realiza associada a cada TpF.

**(iv) Documento do formador** corresponde ao documento destinado ao formador de professores e que, sendo este, idealmente, já conhecedor e pesquisador do conhecimento interpretativo e especializado do professor possa implementar a TpF e desenvolver a formação associada aos objetivos formativos delineados para a formação específica.

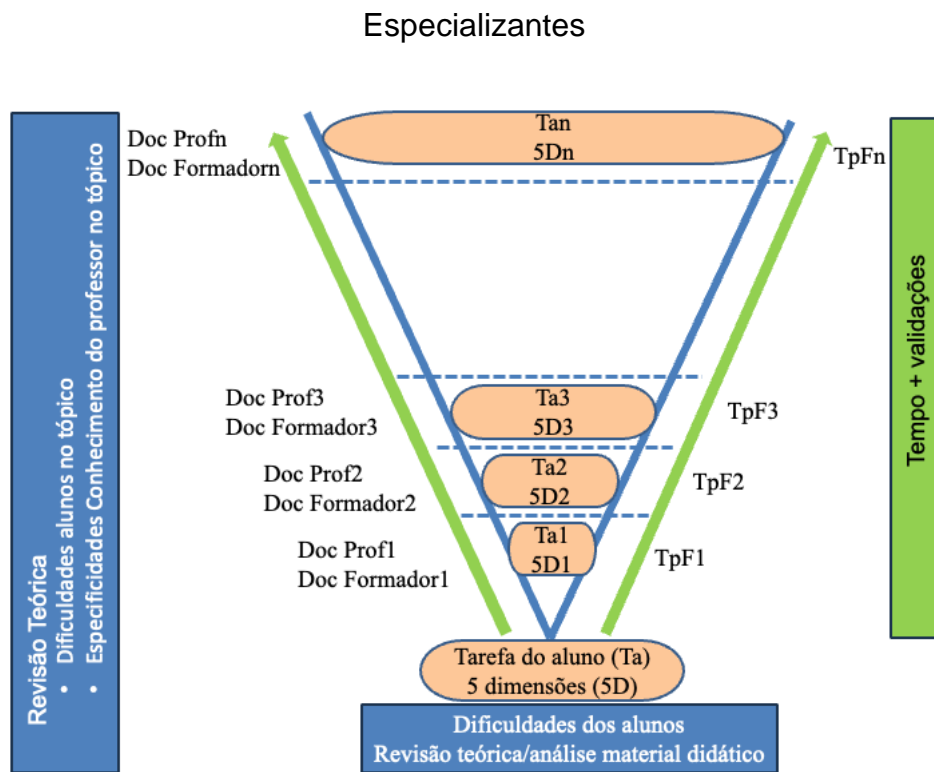
### **Um exemplo de uma Tarefa para a Formação no âmbito das regularidades de crescimento e o processo de conceitualização**

Discutimos aqui o processo que utilizamos atualmente no CIEspMat para conceitualizar os documentos constitutivos das Tarefas Formativas. É importante salientar que metodologicamente esse não é um processo linear, pois assume-se uma abordagem cônica de desenvolvimento em que os processos envolvidos vão se refinando e incrementando a cada etapa de validação e refinamento (que se associa a um entendimento de um refinamento e melhoria constante).

---

<sup>54</sup> Ibidem nota 8.

Figura 2 – Modelo cônico de etapas de conceitualização das Tarefa Formativas



Fonte: os autores

O ponto de partida para pensar a Tarefa para a Formação (TpF) é identificar um tema, e dentro deste, um tópico matemático em que os alunos revelam dificuldades e, posteriormente, efetuar uma revisão teórica com foco em entender os motivos que sustentam essas dificuldades dos alunos; que propostas têm sido desenvolvidas na pesquisa, e quais os focos considerados e que pesquisa sobre o conhecimento do professor se relaciona com esse tópico. Complementarmente, efetua-se também uma análise global dos livros didáticos ou materiais curriculares mais utilizados buscando identificar a estrutura de tarefas típicas para os alunos com que os professores estão familiarizados, equacionando o que se torna necessário reformular nessas tarefas para focar a atenção nas discussões fundamentais e como as implementar de modo a que os alunos ultrapassem essas dificuldades.

Essa abordagem inicial permite conceitualizar a tarefa inicial para os alunos (Ta) e, a partir dela, e da revisão teórica, estabelecer a versão inicial da Tarefa para a Formação (TpF1), que após ser implementada em diferentes contextos (com alunos da etapa educativa a que é direcionada, no grupo de pesquisa e formação, com alguns professores) para refinamento e validação vai possibilitar desenvolver o

conhecimento matemático especializado do professor para implementar essa tarefa dos alunos com os seus alunos (conteúdo do documento do professor) e, pela implementação em contexto formativo, o conhecimento pedagógico especializado (parte do conteúdo do documento do formador).

Consideremos, como exemplo, então, uma das tarefas para os alunos dos Anos Iniciais no âmbito das regularidades de não repetição que forma parte de uma Tarefa para a Formação. No itinerário que desenhamos, que os alunos já tiveram anteriormente contacto com tarefas associadas ao Pensamento Numérico, em particular, de contagem a partir de determinada quantidade (associada à ideia de subitizing)<sup>55</sup> e tarefas de regularidades de repetição com elemento gerador mínimo de 2 e 3 elementos.

Figura 3 – Tarefa para os alunos

**Tarefa: Vamos entender a regularidade**

(Você deve explicar sempre o seu raciocínio descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

1. Considere os três primeiros termos de uma sequência pictórica:



1.º conjunto



2.º conjunto



3.º conjunto

- Continuando com a mesma estrutura matemática, qual será a figura seguinte desta sequência? Represente esse 4.º conjunto.
- Quantos pinguins formarão a 10.<sup>a</sup> figura? E quantos pinguins serão necessários para a 50.<sup>a</sup> figura?
- A figura com 10 pinguins que lugar ocupa nesta sequência? E a que tem 50 pinguins, a que ordem corresponde na mesma sequência?
- Existirá alguma figura com 42 pinguins? Se houver, indique em que posição ela se encontra e apresente, pelo menos, duas formas diferentes de se chegar a essa resposta.

<sup>55</sup> CLEMENTS, D. Subitizing: What is it? Why teach it?. *Teaching children mathematics*, v. 5, n. 7, p. 400-405, 1999.

e) Explique, com suas próprias palavras, quantos pinguins precisaria para desenhar um conjunto qualquer desta sequência.

Fonte: adaptado de Ribeiro (2022)<sup>56</sup>

Para cada tarefa para os alunos, elabora-se o documento das cinco dimensões. Aqui, apresenta-se uma síntese do conteúdo desse documento.

**(i) Objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue com a tarefa** – desenvolver um conhecimento que permita que os alunos desenvolvam e ampliem o seu conhecimento relativo a entender a covariação, indo além da recursividade considerando os elementos de um único conjunto, contribuindo para que foquem a sua atenção e entendam a estrutura matemática, sua variabilidade e constância quando relacionam elementos de um conjunto e elementos correspondentes de dois conjuntos distintos – posições que indica a ordem de cada um dos elementos e número (e tipo) de elementos que constituem cada uma dessas posições ou ordem.

**(ii) Recursos necessários e forma de trabalho dos alunos** – tarefa impressa em uma folha A4 (de modo a dispor de espaço para poderem recorrer a distintos registros de representação) e lápis para os registros. A tarefa foi pensada para ser implementada de forma individual e posteriormente discutida em grande grupo.

**(iii) Habilidade da BNCC associada à tarefa** – Considerando as habilidades que se encontram expressas na BNCC esta tarefa associa-se a (EF03MA10) “Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes” (p. 243)<sup>57</sup>. É importante salientar aqui que a tarefa pode e deve ser implementada com alunos em anos anteriores; porém, aqui, indica-se o que consta nos documentos brasileiros oficiais atuais.

**(iv) Possíveis dificuldades dos alunos** – os alunos podem apresentar várias dificuldades, sendo que algumas delas estão associadas ao objetivo específico do conhecimento que se pretende desenvolver: (1) identificar e desenhar o décimo elemento, pois os alunos, com frequência, adicionam, de modo equivocado, duas

---

<sup>56</sup> RIBEIRO, M. *Pensar matematicamente com um foco nas conexões entre Medida, Números e Operações e Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais – discutindo algumas tarefas para a sala de aula*. Campinas: Cognoscere, v. 1, 2022, p. 264.

<sup>57</sup> *Ibidem* nota 14.

vezes a quantidade do quinto retângulo para obter o décimo; (2) identificar a figura com 10 pinguins, pois uma abordagem comum é fazerem uso da recorrência no mesmo conjunto e necessitariam de construir todas as figuras anteriores e equivocam-se na contagem; (3) efetuar um registro de representação em língua natural (língua portuguesa), em representação pictórica, ou outra que exteriorize a quantidade de pinguins para qualquer posição obtendo uma generalização matematicamente válida.

Este conjunto de dificuldades contempla algumas das mais comuns dentre as que são identificadas em pesquisas<sup>58</sup> e que têm surgido nos contextos formativos – com crianças, alunos e professores – em que esta tarefa tem sido implementada.

**(v) Comentários para a implementação<sup>59</sup>** – a tarefa se inicia com algo que é típico nas tarefas deste tipo, mas que, usualmente, é explorado de forma incompleta e/ou matematicamente inadequada<sup>60</sup>. Estes comentários incluem necessariamente, o que se considera essencial os alunos já conhecerem; quais as suas possíveis maiores dificuldades matemáticas e o que necessitamos discutir para ultrapassar essas dificuldades (sem dar a resposta), já que nestes comentários incluem-se algumas questões a se efetuar, de modo a promover a discussão e contribuir para que o conhecimento matemático possa ir sendo desenvolvido tornando a sua validação responsabilidade de todos.

Para “ir além de qual o próximo”, saindo do espaço da recursividade e entrando no entendimento matemático da estrutura global da relação funcional é essencial que os alunos entendam a estrutura matemática envolvida e abandonem o espaço em que focam essencialmente no observável aos sentidos (padrões) e, para isso, necessitam entender as noções fundamentais das regularidades de crescimento: regularidade; sequência; recursividade; relação funcional. Para isso é fundamental que o professor foque a discussão nos elementos que são generalizáveis e que

---

<sup>58</sup> Ver, por exemplo, Ramos, Boavida e Oliveira (2011) ou Silva e Mamede (2015).

RAMOS, T.; BOAVIDA, A. M.; OLIVEIRA, H. Pensamento algébrico no 2º ano de escolaridade: generalização de sequências. **Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática**, p. 27-48, 2011.

SILVA, J.; MAMEDE, E. Padrões no 2.º ano do Ensino Básico. 2015. **Revista de estudos e investigación en psicología y educación**, eISSN: 2386-7418, 2015, Vol. Extr., n. 6

<sup>59</sup> Apresentam-se aqui algumas das ideias fundamentais de todas as informações que se incluem nos comentários de cada tarefa. Para uma discussão exaustiva consultar Ribeiro (2022) associado a esta discussão. *Ibidem* nota 57.

<sup>60</sup> Consideramos aqui matematicamente inadequada uma exploração que não potencia todos os tipos de discussão e aprendizagens matemáticas potenciais de uma tarefa e que, portanto, não transforma as discussões em algo matematicamente significativo.



correspondem, neste caso, às relações entre as quantidades de elementos (pinguins) entre dois conjuntos consecutivos e nas relações entre a quantidade de pinguins no conjunto e a ordem desse conjunto.

Para isso, e de forma a desenvolver o entendimento matemático dos alunos, associado a um uso adequado da linguagem matemática de forma transversal é essencial discutir com os alunos a diferença entre elemento, conjunto (de elementos), quantidade de elementos e ordem do conjunto – que é algo já usual e transversal a outras propostas especializantes que contribui para sair do específico dos pinguins e generalizar a estrutura. Assim, algumas das questões vencedoras que necessitam ser efetuadas e discutidas com os alunos para desenvolver esse Pensamento Funcional, em contexto de regularidades de não repetição são: (i) Quantos pinguins (elementos) tem o primeiro conjunto?; (ii) Quantos pinguins tem o 4.º conjunto?; (iii) Quantos pinguins terá o 5.º conjunto? Por quê?; (iv) Existe alguma relação entre a quantidade de pinguins (elementos) do conjunto e a posição que esse conjunto ocupa? Que relação é essa?; (v) Quantos pinguins (elementos) teremos no conjunto da posição 9? Como determinou essa quantidade? (vi) Quantos pinguins (elementos) teremos na posição 21? Como determinou essa quantidade?; (vi) Se quisermos determinar a quantidade de pinguins (elementos) da posição 45, é possível? Por quê?

Esta tarefa para os alunos é a gênese para a Tarefa para a Formação e molda o conteúdo dos documentos do professor e do formador. A Tarefa para a Formação, como instrumento de coleta de informações, está associada a questão de pesquisa: *Que conhecimento matemático especializado revelam professores da Educação Infantil e Anos Iniciais em um contexto que busca desenvolver o seu conhecimento matemático especializado no âmbito das regularidades de crescimento e a generalização associada?*. E como recurso esta TpF associa-se ao objetivo formativo de desenvolver o conhecimento matemático e pedagógico especializado do professor para desenvolver o entendimento das formas de proceder em matemática associadas a obtenção da generalização matemática como elemento central do desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

A TpF é usualmente constituída por duas ou três partes. A Parte Preliminar contém questões que focam o conhecimento e as práticas do professor no âmbito do tópico em discussão. A Parte I inicia-se com a tarefa para os alunos e um conjunto de questões focando o conhecimento especializado do professor requerido para implementar essa tarefa com alunos de modo a alcançar o objetivo de aprendizagens

matemáticas delineado. A Parte II é incluída quando o foco de atenção é o Conhecimento Interpretativo, sendo, nesse caso, denominada de Tarefa Interpretativa<sup>61</sup>.

Figura 4 – Tarefa para a Formação

<b>Parte Preliminar</b>
Conjunto de questões que focam o conhecimento e as práticas do professor no âmbito do tópico em discussão.
<b>Parte I</b>
<b>Tarefa: Vamos entender a regularidade</b>
Dentro deste retângulo fica a tarefa para os alunos.
1. Considere a tarefa anterior:
a) Resolva a tarefa, por si mesmo, sem considerar um contexto de ensino.
b) Qual considera ser o objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue com esta tarefa?
c) De 0 a 10, qual o nível de conhecimento que considera deter relativamente ao conhecimento matemático e pedagógico para efetuar as discussões desta tarefa para os alunos de modo a alcançar o objetivo de aprendizagens matemáticas delineado?
d) Considerando a implementação da tarefa dos alunos no 3.º ano, quais podem ser as maiores dificuldades matemáticas dos alunos?
e) Que tipos de questões considera que devem ser efetuadas nas propostas deste tipo para que os alunos possam entender a generalização matemática?

Fonte: os autores

As questões incluídas após a Tarefa do aluno associam-se a objetivos de pesquisa e de formação. De pesquisa, pois a TpF é um dos instrumentos de coleta de informações para responder à questão de pesquisa associada e de formação, pois essas questões direcionam o foco de atenção a considerar na implementação da tarefa. Assim, essas questões da TpF, associadas à questão de pesquisa definem o conteúdo do documento do professor que contém o conhecimento matemático

<sup>61</sup> MELLONE, M.; RIBEIRO, M.; JAKOBSEN, A.; CAROTENUTO, G.; ROMANO, P.; PACELLI, T. Mathematics Teachers' Interpretative Knowledge of Students' Errors and Non-standard Reasoning. **Research in Mathematics Education**. v. 1, p. 1 - 12, 2020.

especializado necessário para implementar a tarefa do aluno para alcançar o objetivo delineado. Definem também o conteúdo do documento do formador que se relaciona com as discussões que necessitam ocorrer no contexto formativo de modo a desenvolver o conhecimento especializado do professor de forma a possibilitar que o professor vivencie nesse contexto formativo o tipo de experiências que se espera que possa facultar aos seus alunos, de forma a que possa modelar a natureza e foco dessa prática matemática.

### **Conhecimento especializado que se pretende desenvolver com a formação especializante associada à implementação da TpF no âmbito das regularidades de crescimento**

Podemos encontrar várias pesquisas que referem que efetuam uma análise e discussão sustentada no MTSK; porém, as discussões que efetuam situam-se, ainda, no âmbito de algumas generalidades<sup>62</sup> e sem considerar as particularidades que tornam especializado o conhecimento matemático e pedagógico que se requer para cada um dos tópicos matemáticos que temos e conhecer enquanto professores<sup>63</sup>.

Com o fito de dar um passo à frente na direção de considerar o uso do MTSK de forma efetivamente especializada para a análise das informações coletadas e para a formação especializante, assume-se a necessidade de definir um ponto de chegada mínimo para as discussões, que serve também de elemento comparativo para as discussões dos resultados de pesquisa e da transformação das práticas matemáticas. Assim, apesar de as questões da Tarefa para a Formação focarem apenas algumas dimensões do conteúdo de alguns dos subdomínios do conhecimento especializado (KoT, KPM, KFLM), a formação, e o pesquisador/formador como um todo, necessita considerar o conteúdo de todos os subdomínios, pois, na prática, todos eles se encontram em ação. Este componente é essencial também, pois para desenvolver

---

<sup>62</sup> Ver, por exemplo, Luz e Alencar (2022) ou Barboza e Lautenschlager (2021).

LUZ, C. F. P.; ALENCAR, E. S. Os conhecimentos do professor para ensinar matemática no manual didático brasileiro do terceiro ano do ensino fundamental. **REAMEC-Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 10, n. 1, p. e22009-e22009, 2022.

BARBOZA, L. C. S.; LAUTENSCHLAGER, E. Desvelando indícios de conhecimento especializado para ensinar Álgebra com o modelo MTSK dos futuros pedagogos da região do Seridó. In J.G. Moriel-Junior (Eds.). **Anais do V CIMTSK**, p. 137-144, 2021.

<sup>63</sup> RIBEIRO, M. Das Generalidades às Especificidades do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: Metodologias na Conceitualização (Entender e Desenvolver) do Conhecimento Interpretativo In: **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática**. 1 ed. Brasília: SBEM, 2018, p. 167-185.

pesquisa com este foco especializado do MTSK e com a abordagem especializante que assumimos<sup>64</sup>, o pesquisador (e necessariamente o formador) necessita ser quem detém um conhecimento mais amplo e profundo do tópico que pesquisa pois, em última instância, o que se identifica e como se discutem e analisam as evidências refletem o conhecimento do próprio pesquisador.

Assim, como parte desse conhecimento especializado para efetuar a análise do conhecimento revelado pelos professores em contextos de formação, e como um nível mínimo de conhecimento especializado que necessita ser desenvolvido para podermos considerar que a formação cumpriu com o objetivo formativo, torna-se necessário efetuar uma listagem desse conhecimento. Obviamente que essa não será uma listagem exaustiva, mas aqui contempla o mínimo a que pretendemos chegar.

*Knowledge of Topics (KoT)* contempla, entre outros, conhecer que: uma regularidade é dita crescente quando a relação de um elemento para o seguinte se encontra associada a um incremento em alguma quantidade envolvida – que pode ser natural ou não; uma regularidade crescente pode ser exteriorizada por sequências de letras, números, imagens, sons, entre outros, ou combinações destes; uma das propriedades das regularidades crescentes é a recursividade; em uma regularidade crescente sempre há componentes constantes e outros, variáveis – pelo menos o tipo de relação entre os distintos elementos de uma regularidade (de)crescente terá de verificar que entre dois termos essa relação sempre diminui ou aumenta – e está associada à ideia intuitiva de função (de)crescente; em uma regularidade crescente sempre há relações funcionais que se podem efetuar envolvendo os elementos do conjunto da sequência e os elementos do conjunto da ordenação; a relação funcional entre os conjuntos disjuntos envolvidos na regularidade – indo além da recursividade – pode ser representada por meio de registros de representação associados à linguagem oral, escrita, tabular, gráfica, icônica (desenhos) e/ou simbólica.

*Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM)*, inclui, por exemplo, conhecer: as conexões entre o uso das operações e a obtenção de uma constante que relacione elementos subsequentes de uma mesma sequência; as conexões entre as regularidades de repetição e as regularidades de crescimento, em termos de que

---

<sup>64</sup> PACELLI, T.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M.; JAKOBSEN, A. Collective discussions for the development of interpretative knowledge in mathematics teacher education In: **ICMI Study 25 – Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups**, 2020, Lisboa, 2020. v. 1. p. 1 – 10.

toda a regularidade de crescimento possui, em si, uma regularidade de repetição; que a estrutura matemática associada às regularidades de crescimento se conecta com o entendimento da proporcionalidade; as conexões entre as operações e a obtenção das constantes e da variação na estrutura matemática que sustenta a regularidade e a generalização.

*Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM), integra, entre outros, conhecer: como empregar uma linguagem matematicamente válida e adequada para nos referirmos aos termos dependentes e independentes, de modo que os alunos (e as crianças) efetivamente entendam; que “generalização próxima” é algo que não existe matematicamente, mas é um passo na resolução do problema de obtenção de uma generalização matemática; que definir a regularidade demanda elencar o conjunto minimal de propriedades dessa regularidade que a identificam univocamente; as diferentes formas de validação do termo geral de determinada regularidade de crescimento.

*Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) cumpre-nos entre outros, conhecer: que, no caso das regularidades de crescimento, quando o foco é o entendimento matemático das estruturas dessas regularidades, não é uma boa analogia associar esse crescimento com a ideia de crescimento em altura dos alunos com o passar do tempo, pois torna-se difícil que os alunos entendam as dimensões em que teriam de se focar para encontrar (possivelmente) o mesmo tipo de relações; que entender o tópico de regularidades de crescimento (sequências de crescimento) demanda um trabalho associado à covariação e que desenvolver esse entendimento e conhecimento dos alunos exige promover discussões matemáticas que estimulem a atenção para as relações entre elementos de conjuntos disjuntos, e, para isso, é essencial que as representações empregadas e os registros efetuados (na lousa) permitam, “visualmente”, dar ênfase ao fato de se considerarem dois conjuntos disjuntos e que se relacionam os elementos de ambos; múltiplos recursos que possibilitem uma variedade de registros de representação para uma mesma regularidade de não repetição.

*Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) inclui conhecer: que os alunos apresentam maior facilidade na identificação de relações recursivas do que de relações de covariação, pois as relações recursivas demandam apenas a análise das relações envolvendo elementos de um mesmo conjunto; que os alunos apresentam dificuldades em efetuar relações envolvendo a quantidade de pinguins

(elementos do conjunto) e a ordem do termo (covariação), pois essa relação implica relacionais elementos correspondentes de conjuntos disjuntos e de dois tipos distintos, o que demanda entender a estrutura matemática que permite descrever cada um dos dois conjuntos e relacionar essas estruturas.

*Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS) inclui conhecer que na BNCC se entende regularidade e padrão como sinônimos e que há habilidades associadas a este tópico desde o 1.º ano. Necessita incluir também um conhecimento de resultados de pesquisa que mostram a importância de um foco nas regularidades e a diferenciar estas de padrão.

### **Alguns comentários finais**

Para que a formação de professores propicie efetivamente a melhoria da prática matemática e, conseqüentemente, das aprendizagens matemáticas dos alunos é fundamental que se assuma que o conhecimento do professor é especializado e que as especificidades que constituem essa especialização necessitam se configurar como elementos centrais dos processos de formação inicial e contínua, possibilitando ao professor entender as distintas formas de Pensar e raciocinar matematicamente, considerando cada um dos distintos tópicos matemáticos em cada etapa educacional.

Para promover uma formação que efetivamente se foque onde é necessário, entendemos como primordial a integração entre prática, formação e pesquisa. Desta forma, consideramos que estudo intencional, explícito e sistemático para a conceitualização das Tarefas para a Formação – e os demais documentos associados que conformam as Tarefas Formativas –, elencando, para cada TpF questões de pesquisa que se pretende possam ser respondidas por meio do desenvolvimento destas em diferentes contextos formativos conforma-se como uma forma de imbricar efetivamente uma prática matemática melhorada, formação que desenvolve as especificidades do conhecimento do professor e pesquisa que retroalimenta a melhoria das discussões – essa é uma das linhas de trabalho consideradas na agenda de pesquisa e formação que desenvolvemos no CIEspMat.

As experiências de formação inicial e contínua em diferentes contextos, a pesquisa e a discussão a respeito das Tarefas Formativas tem possibilitado um seu refinamento progressivo que, associadas a uma formação especializada do formador

torna as Tarefas para Formação um potente recurso para a necessária (R)Evolução, incluindo aspectos que permitem aos professores ampliar e aprofundar o conhecimento matemático (MK) e o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) a partir da discussão de cada item proposto na TpF. Essa (R)Evolução considera também as experiências pedagógicas vivenciadas nos contextos formativos, que são desenvolvidas considerando cada um dos quatro documentos que compõem cada uma das Tarefas Formativas e buscam possibilitar que o professor possa posteriormente modelar na sua prática, pois assumimos que Conhecimento Pedagógico não se ensina, mas vive-se.

A TPF com foco nas regularidades de crescimento e a generalização apresentada neste artigo, foca aspectos centrais do conteúdo matemático sobre este tópico, incluindo as questões vencedoras, que permitem ampliar as discussões sobre as regularidades de crescimento para além das tarefas convencionais, presentes em livros didáticos, ultrapassando as práticas do “saber fazer” para uma prática que promove o Pensar matematicamente, que se desenvolve no âmbito da formação dos professores e que se espera que comece a fazer parte da sua prática letiva.

Considerando a conceitualização das TpF no âmbito do Pensamento Algébrico, as questões vencedoras apresentadas e a necessidade de uma formação especializante, há algumas questões que se encontram em aberto e que indicam novos caminhos a trilhar e que fazem parte da agenda de pesquisa delineada associada a melhor entender o conteúdo do conhecimento do professor e a conceitualização de tarefas para desenvolver esse conhecimento especializado:

- (i) Será possível generalizar a estrutura para as questões vencedoras para todas as dimensões do Pensamento Algébrico e para outros temas matemáticos, e que elementos fundamentais considerar?
- (ii) Que instrumentos desenhar e como avaliar o desenvolvimento do conhecimento especializado desenvolvido (e o impacto da formação) de modo a avaliar a formação e o seu impacto?

## Referências Bibliográficas

ANDRÉ, M. E. D. A. Pesquisas sobre formação de professores: tensões e perspectivas do campo. FONTOURA, H. A.; SILVA, M. (org.). **Formação de professores, culturas: desafios à Pós-graduação em Educação em suas múltiplas dimensões. E-book online.** In: Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sudeste, v. 10, p. 24-36, 2011.

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOZA, L. C. S.; LAUTENSCHLAGER, E. Desvelando indícios de conhecimento especializado para ensinar Álgebra com o modelo MTSK dos futuros pedagogos da região do Seridó. In J.G. Moriel-Junior (Eds.). **Anais do V CIMTSK**, p. 137-144, 2021.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In: **Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching.** Dordrecht: Springer Netherlands, p. 3-12, 1996.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412–446, 2005.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. **Elementary grade students' capacity for functional thinking.** Em PME 28. Bergen, Norway: PME, v. 2 (pp 135–142), 2004.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** 4. ed. Brasília: MEC, 2018.

CARRILLO, J. *et al.* The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-256, 2018.

CLEMENTS, D. Subitizing: What is it? Why teach it?. **Teaching children mathematics**, v. 5, n. 7, p. 400-405, 1999.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In.: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas – São Paulo:



Papirus Editora, 2010.

FIORENTINI, D.; CRECCI, V. M. Práticas de desenvolvimento profissional sob a perspectiva dos professores. **Revista Eletrônica da Divisão de Formação Docente**. Uberlândia, v. especial de lançamento. Recuperado de <http://www.seer.ufu.br/index.php/diversapratica/article/view/19781>, 2012.

GIUSTI, N. M.; GROENWALD, C.; Matemática na comunidade: um contexto educativo para a aprendizagem social e desenvolvimento do pensamento algébrico. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 1, p. 561-590, 2021.

GROSSMAN, P. L. **Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation**. American Association of Colleges for Teacher Education and National Education Association, 2010.

HIEBERT, J.; WEARNE, D. "Instructional Task, Classroom Discourse, and Students' Learning in Second Grade." **American Educational Research Journal**, v. 30, 1993, p. 393-425.

JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 19, n. 3-4, p. 135-150, 2014.

JUNGBLUTH, A.; SILVEIRA, E.; GRANDO, R. C. O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 96-118, 2019.

KAMII, C.; DOMINICK, A. The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds), **The teaching and learning of algorithms in school mathematics**, Resto, V A: NCTM, 1998, p. 130-140.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput; D. W. Carraher; M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the early grades**, p. 5–18, Erlbaum, 2008.

KIERAN, C. The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. **ZDM – Mathematics Education**, v. 54, p. 1131–1150, 2022.

KLEIN, F. **Elementar mathematik vom höheren standpunkte aus**. 1. Vol. 4. Ed. Berlin: Springer, 1933.

LUZ, C. F. P.; ALENCAR, E. S. Os conhecimentos do professor para ensinar matemática no manual didático brasileiro do terceiro ano do ensino fundamental. **REAMEC-Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 10, n. 1, p. e22009-e22009, 2022.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US**. Mahwash, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1999.

MANDARINO, M. C. F. Que conteúdos da Matemática escolar professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental priorizam. *In*: GUIMARÃES, G.; BORBA, R. (ed.). Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização. Recife: SBEM, 2009.

MASON, J. (2011). What makes 'Algebra' early? En J. Cai & E. Knuth (Eds.), **Algebra in the Early Grades: A global dialogue from multiple perspectives**, Springer, p. 566-568, 2011.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. Em: BERNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to Algebra**. Dordrecht: Springer, 1996. v. 18p. 65–86

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. Em: BERNARZ, N.; KIERAN, C.;

MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. St Albans: Tarquin, 2006.

MELLONE, M.; RIBEIRO, M.; JAKOBSEN, A.; CAROTENUTO, G.; ROMANO, P.; PACELLI, T. Mathematics Teachers' Interpretative Knowledge of Students' Errors and Non-standard Reasoning. **Research in Mathematics Education**. v. 1, p. 1 - 12, 2020.

MENDONÇA, T. M. *et al.* As estruturas aditivas nas séries iniciais do ensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. **RELIME**, v. 10, n. 2, p.

219-239, jul. 2007.

MITCHELL, R.N.; MARIN, K.A. Examining the use of a structured analysis framework to support prospective teacher noticing. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 18, p. 551–575, 2015.

NCTM, 2000 PRINCIPLES, N. C. T. M. Standards for school mathematics. **Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics**, 200.

NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. V. How large are teacher effects? **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.

PACELLI, T.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M.; JAKOBSEN, A. Collective discussions for the development of interpretative knowledge in mathematics teacher education In: **ICMI Study 25 – Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups**, 2020, Lisboa, 2020. v. 1. p. 1 – 10.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, p. 105-132, 2006.

PONTE, J. P. et al. O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. **Bolema**, v. 30, p. 868-891, 2016.

PONTE, J. P. et al. Perspetivas teóricas no estudo das práticas profissionais dos professores de matemática. **Encontro de Investigação em Educação Matemática**, p. 267-278, 2012.

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA**, 4(2), 37-62, 2010.

RAMOS, T.; BOAVIDA, A. M.; OLIVEIRA, H. Pensamento algébrico no 2º ano de escolaridade: generalização de sequências. **Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática**, p. 27-48, 2011.

RIBEIRO, C.M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Interpreting students' non standard reasoning: insights for mathematics teacher education practices. **For the Learning of Mathematics**, v. 36, n. 2, 2016, p. 8-13.

RIBEIRO, M. Das Generalidades às Especificidades do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: Metodologias na Conceitualização (Entender e Desenvolver) do Conhecimento Interpretativo In: **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática**. 1 ed. Brasília: SBEM, 2018, p. 167-185.

RIBEIRO, M. **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021, v. 5, p. 124.

RIBEIRO, M. **Pensar matematicamente com um foco nas conexões entre Medida, Números e Operações e Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais – discutindo algumas tarefas para a sala de aula**. Campinas: Cognoscere, v. 1, 2022, p. 264.

RIBEIRO, M. **Pensar Matematicamente envolvendo diferentes formas de ver e de contar e as conexões com o Pensamento Algébrico**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021d, v. 4, p. 60.

RIBEIRO, M. Tarefas para a Formação e suas especificidades para desenvolver o conhecimento especializado do professor no âmbito do Pensamento Algébrico: entendendo regularidades de repetição, **Revista Espaço Plural**, v. 23, n. 42, 2021.

RIBEIRO, M. Tarefas para a Formação e suas especificidades para desenvolver o conhecimento especializado do professor no âmbito do Pensamento Algébrico: entendendo regularidades de repetição, **Revista Espaço Plural**, v. 23, n. 42, 2021.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. **Desenvolvimento do Pensamento Algébrico em contextos de entender os sentidos da igualdade e o conhecimento especializado do professor**. Campinas: Cognoscere, in press, v. 15. p. 148.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.

RIBEIRO, M.; ALVES, C.; GIBIM, G. **Entendendo as propriedades da multiplicação e a estrutura matemática associada à tabuada como contexto para desenvolver o Pensamento Algébrico**. Campinas: Cognoscere, in press, v. 11. p. 167.

RIBEIRO, M.; CARRILLO, J. Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring Data analysis. In B. Ubuz (Eds.). Proceedings 35<sup>th</sup> PME. Ankara, Turkey: PME, 2011, v. 4, p. 41-48.

RIBEIRO, M.; GIBIM, G.; ALVES, C. A necessária mudança de foco na formação de professores de e que ensinam matemática: discussão de tarefas para a formação e o desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 34, p. 1-24, 2021.

RIBEIRO, M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Interpreting students' non standard reasoning: insights for mathematics teacher education practices. **For the Learning of Mathematics**, v. 36, n. 2, 2016, p. 8-13.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. 'Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi'. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 8, n. 3, p. 255-281, 2005.

SILVA, J.; MAMEDE, E. Padrões no 2.º ano do Ensino Básico. 2015. **Revista de estudos e investigación en psicología y educación**, eISSN: 2386-7418, 2015, Vol. Extr., n. 6

ZASLAVSKY, O.; LEIKIN, R. Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 7, p. 5–32, 2004.

Recebido em: 15/01/2024  
Aprovado em: 24/02/2024