CARACTERIZANDO TAREFAS PARA OS ALUNOS E AS CINCO DIMENSÕES FUNDAMENTAIS PARA SUA IMPLEMENTAÇÃO: ELEMENTOS GÊNESIS DAS TAREFAS PARA A FORMAÇÃO

Caroline Silva[1]
Miguel Ribeiro[2]

Resumo: O professor de matemática sustenta a sua prática na implementação de tarefas para os alunos. Considerando as especificidades dessa prática, as tarefas para os alunos necessitam ser recursos potentes para instigar discussões matemáticas frutíferas que contribuam com o desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos. Para tal, assumimos que essa tarefa necessita estar associada a um documento que considere as cinco dimensões fundamentais para a sua implementação. A fim de elucidar o conteúdo e estrutura de tais documentos, efetuamos uma discussão teórica a partir de uma tarefa para o aluno conceitualizada para discutir o tópico de simetria nos Anos Finais que forma parte de uma Tarefa para a Formação e o documento com as cinco dimensões fundamentais para a sua implementação.

Palavras-chave: Cinco dimensões fundamentais para a implementação da tarefa para o aluno; Tarefa para a Formação; Simetria.

CHARACTERIZING TASKS FOR STUDENTS AND THE FIVE FUNDAMENTAL DIMENSIONS FOR THEIR IMPLEMENTATION: GENESIS ELEMENTS OF A TASK FOR TEACHER EDUCATION

Abstract: Mathematics teacher's practices are grounded in implementing and discussing tasks for students. Considering the specificities of teachers' mathematical practices, the tasks for students need to be conceptualized and implemented in order to become powerful resources in order to promote fruitful mathematical discussions leading to developing students' mathematical knowledge. For doing so, we assume student's tasks are required to be associated with the so called "five fundamental dimensions for implementation". From a theoretical discussion, having a starting point an example from the topic of symmetry for lower secondary students we discuss a Task for Teacher Education and the five fundamental dimensions for implementing the students task.

[1] Doutoranda do Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática (PECIM) da Unicamp. E-mail: caroldesouza86@gmail.com
[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Huelva (Espanha). Professor da Faculdade de Educação da Unicamp. E-mail: cmribas78@gmail.com

Keywords: Five fundamental dimensions for implementing the task for the student; Task for Teacher Education; Symmetry.

Considerações iniciais

A prática do professor de matemática sustenta-se na implementação de tarefas em sala de aula[3]. Consideramos essas tarefas – denominadas tarefa para o aluno – recursos pedagógicos intencionais para ensinar matemática, de modo a possibilitar que os alunos entendam o que fazem e por que fazem a cada momento, em determinado tópico matemático[4]. Como recurso que são, podem ser utilizadas de muitas formas distintas: introdução, revisão, consolidação ou avaliação. Todavia, consideramos prioritárias em uma perspectiva de pesquisa as tarefas de introdução, pois é nesses momentos que o professor exterioriza de forma mais evidente o seu conhecimento especializado e, caso o foco sejam as aprendizagens matemáticas dos alunos, é por essas discussões que esse entendimento deverá ser desenvolvido[5].

Considerando que para o professor escolher, adaptar ou elaborar uma tarefa para o aluno, que se possa transformar em um recurso que potencie as discussões matemáticas e que contribua para que os alunos desenvolvam seu conhecimento e formas de Pensar matematicamente, o professor necessita de conhecimento especializado que permita fazer diferente do que tem sido feito, assumido esse conhecimento segundo as conceitualizações do *Mathematics*

[3] MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. *Designing and using mathematical tasks*. St Albans: Tarquin, 2006.
[4] RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.
[5] RIBEIRO, M. Tarefas para a Formação e suas especificidades para desenvolver o conhecimento especializado do professor no âmbito do Pensamento Algébrico: entendendo regularidades de repetição. *Revista Espaço Plural*, v. 23, n. 42, 2021.
RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. Tarefas para a Formação para desenvolver o Conhecimento Especializado do professor no âmbito do Pensamento Algébrico em contextos de regularidades de crescimento: exemplos de conteúdo de conhecimento a desenvolver. *Revista Espaço Plural*, v. 24, n. 43, 2022.

Teacher’s Specialised Knowledge[6] – MTSK[7] e do Conhecimento Interpretativo[8]. Entretanto, como o conhecimento especializado não se desenvolve na prática de sala de aula[9] ao longo dos anos de experiência do professor, é essencial que possamos desenvolver contextos formativos com essa intencionalidade e que busquem, de forma imbricada, também obter um entendimento mais detalhado e aprofundado do conteúdo desse conhecimento matemático especializado.

Um recurso formativo que tem se mostrado propício para desenvolver o conhecimento especializado do professor são as Tarefas para a Formação – TpF – que são um dos elementos constituintes das denominadas Tarefas Formativas[10]. Por ser entendida como elemento central a ser discutido na formação, a estrutura típica das TpF assume como primordial uma tarefa para o aluno, pois, a partir dessa tarefa para o aluno, podemos discutir o conhecimento do professor para resolver a tarefa (conhecimento de *saber fazer* do nível dos alunos) e, por meio das discussões que são propostas, desenvolver seu conhecimento especializado. Além disso, espera-se que a tarefa para o aluno contida na TpF seja implementada posteriormente pelos professores em suas turmas, efetuando uma modelação das experiências que vivenciou no contexto formativo, incorporando o tipo e foco das discussões na sua prática matemática com os alunos – transformando as suas práticas em práticas matemáticas emocionantes, mas essencialmente matematicamente inovadoras[11].

Pela forma como consideramos o ensino e a aprendizagem, o papel do aluno e do professor e a formulação e a resolução de problemas para as

---

[6] Optamos por utilizar a nomenclatura em inglês por esta já ser reconhecida internacionalmente e a tradução poder acarretar uma dessignificação, que se encontra associada a cada uma das dimensões da conceitualização.

[7] CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. C.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAS-GONZÁLES, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÁN, C. The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, v. 20, n. 3, p. 236–253, 2018.

[8] JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers’ MKT when interpreting pupils’ productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, v. 19, n. 3-4, p. 135-150, 2014.

[9] RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Characterizing prospective teachers’ knowledge in/for interpreting students’ solutions. In: PROCEEDINGS OF THE 37TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. Kiel: PME, 2013. p. 89-96.

[10] Idem nota de rodapé 4.

[11] RIBEIRO, M.; SILVA, C. Especificidades do Conhecimento Interpretativo do professor e das Tarefas para a Formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, v. 18, 2024. A aparecer.

aprendizagens matemáticas dos alunos, uma tarefa típica para os alunos aborda, por meio de um problema (formulação ou resolução) um tópico que é problemático para os alunos – identificado pela pesquisa com esse foco. Um desses tópicos problemáticos para os alunos é a simetria[12]. Como também é problemático para os professores[13], justifica-se discutir tarefas que abordam a simetria em contextos formativos, pois tendo em vista que o conhecimento do professor é, dentre os fatores controláveis, o que mais impacta as aprendizagens e resultados dos alunos[14] e essas dificuldades dos alunos, por sua vez, exteriorizam, de forma indireta, o conhecimento do professor. Algumas dessas dificuldades associam-se a não diferenciarem simetria das transformações geométricas isométricas[15] e, principalmente, a dificuldade em diferenciar a simetria da transformação geométrica isométrica reflexão[16].

Quando pensamos a tarefa para o aluno como parte constituinte da Tarefa para a Formação, perspectivando que essa tarefa para o aluno possa também ser implementada de forma a minimizar o *gap* entre o objetivo de aprendizagens matemáticas que se encontra associado e aquele que será alcançado, temos considerado um documento associado que denominamos de Cinco Dimensões Fundamentais para a Implementação da Tarefa para o aluno[17]. Com esse documento, pretende-se contribuir para que qualquer professor que detenha, ou esteja em um processo formativo de desenvolver o seu conhecimento especializado, possa implementar a tarefa para o aluno em sua prática de sala de aula e desenvolver o entendimento matemático de seus alunos.

Neste artigo efetuamos uma discussão teórica sobre as Tarefas para a Formação de professores e as cinco dimensões fundamentais para a implementação da tarefa para o aluno e caracterizamos – estrutura e conteúdo – a tarefa para os alunos e as cinco dimensões fundamentais para sua

[12] RAMFUL, A.; HO, S. Y.; LOWRIE, T. Visual and analytical strategies in spatial visualisation: perspectives from bilateral symmetry and reflection. *Mathematics Education Research Journal*, v. 27, p. 443-470, 2015.
[13] MONTES, M. M. C.; CARRILLO, C. E. S. Creencias y Concepciones de los Profesores de Secundaria sobre la Enseñanza de las Isometrías. El Caso de la Reflexión. *EPISTEMUS*, v. 18, n. 9, p. 29-36, 2015.
[14] GROSSMAN, P. Learning to practice: The design of clinical experience in teacher preparation. *Policy Brief*, p. 1-8, 2010.
NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. V. How large are teacher effects?. *Educational evaluation and policy analysis*, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.
[15] BASTOS, R. Notas sobre o Ensino da Geometria: Simetria. *Educação e Matemática*, n. 88, p. 9-11, 2006.
[16] RIBEIRO, M; GIBIM, G. F. B.; SOUZA, C. A. *Coleção CIEspMat Professor*: Reflexão e Simetria. Curitiba: CRV, 2021.
[17] Idem nota de rodapé 5.

implementação a partir de um exemplo no contexto do tópico de simetria. Apresenta-se e discute-se seguindo a perspectiva teórica de conceitualização dessas tarefas (TpF e tarefa para o aluno) um exemplo de tarefa para o aluno que forma parte de uma TpF para professores dos Anos Finais e o documento com as cinco dimensões fundamentais para a sua implementação.

Algumas discussões teóricas

O conhecimento e a prática do professor de matemática são entendidos como especializados[18], tanto no âmbito matemático quanto no âmbito pedagógico[19], por ser um conhecimento específico para a prática de desenvolver nos alunos o entendimento matemático. Assumir como ponto de partida para as discussões matemáticas de elevado nível cognitivo a se desenvolver com os alunos, considerando o que e como os alunos conhecem de cada um dos tópicos matemáticos, demanda um Conhecimento Interpretativo que permita ao professor atribuir significado aos raciocínios e formas e Pensar dos alunos, independente de suas produções serem corretas, incorretas ou não usuais – matematicamente adequadas, porém. diferente do que é esperado pelo professor[20]. Neste contexto, os erros matemáticos dos alunos são entendidos como oportunidades de aprendizagens[21].

Considerando essa especialidade tanto na prática profissional do professor quanto no seu conhecimento, assumimos o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK[22] e o Conhecimento Interpretativo – CI[23] como referencial teórico para fundamentar a elaboração das Tarefas Formativas[24].

[18] RIBEIRO, M.; POLICASTRO, M. S.; CALDATTO, M. E.; ALMEIDA, A. R. Interpretative knowledge of prospective kindergarten and primary teachers in the context of subtraction. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 24, n. 3, p. 1-31, 2022.
[19] Idem nota de rodapé 7.
[20] DI MARTINO, P.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. Interpretative Knowledge. In: LERMAN, S. (Ed.). Encyclopedia of Mathematics Education. Cham: Springer International Publishing, p. 424-428, 2020.
[21] BORASI, R. Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, v. 7, n. 3, p. 2-8, 1987.
SILVA, D. F.; ROMÃO, E. C. O Erro no Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática: análises e potencialidades no Conjunto dos Números Inteiros. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, v. 5, n. 1, p. 160–187, 2022.
[22] Idem nota de rodapé 7.
[23] Idem nota de rodapé 8.
[24] Idem nota de rodapé 4.

A Tarefa Formativa é constituída por um conjunto de quatro documentos elaborados para desenvolver o Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor em contextos formativos[25]: (i) Tarefa para a Formação; (ii) Cinco Dimensões Fundamentais para a Implementação da Tarefa para o Aluno; (iii) Documento do Professor; (iv) Documento do Formador. Nesta discussão, centraremos na estrutura e conteúdo apenas dos dois primeiros documentos.

Como consideramos, no âmbito do trabalho que se desenvolve no contexto do CIEspMat[26], que pesquisa e formação sempre necessitam ser assumidas de forma imbricada, quando pretendemos melhorar a qualidade das discussões matemáticas com os alunos, sempre elencamos uma questão de pesquisa associada a cada uma das Tarefas para a Formação que se conceitualiza, sendo está uma característica muito própria das TpF que são conceitualizadas e que impacta os focos da pesquisa e da formação.

Em termos de estrutura, constitui tipicamente a Tarefa para a Formação – TpF[27] a Parte Preliminar e a Parte I, podendo apresentar a Parte II, quando se trata de uma Tarefa Interpretativa – TI[28] que visa desenvolver especificamente o Conhecimento Interpretativo dos professores em formação.

A Parte Preliminar objetiva aceder algum componente do conhecimento especializado do professor considerando o MTSK, no âmbito do tópico central da formação. A Parte I é constituída pela tarefa para o aluno e algumas questões para o professor que buscam aceder e, posteriormente pela discussão, desenvolver o conhecimento especializado do professor. A primeira questão da Parte I de toda TpF envolve, necessariamente, "*resolver a tarefa por si mesmo, sem pensar em um contexto de ensino*", visando que o professor revele o que conhece e como conhece ao nível de conhecimento dos alunos. As demais questões propostas envolvem focar a atenção em alguma especificidade do conhecimento especializado do professor, de acordo com algum subdomínio do MTSK, por exemplo, questionando-os sobre quais as maiores dificuldades dos

[25] Idem nota de rodapé 5.
[26] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. www.ciespmat.com.br
[27] Idem nota de rodapé 4.
[28] MELLONE, M.; RIBEIRO, M.; JAKOBSEN, A.; CAROTENUTO, G.; ROMANO, P.; PACELLI, T. Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education*, v. 22, n. 2, p. 154–167, 2020.

alunos ao resolver a tarefa. Esse exemplo de questão, relaciona-se à antecipação das dificuldades e erros mais comuns dos alunos para aquela tarefa específica e busca também direcionar a atenção do professor para essas dimensões que não são usuais serem consideradas[29] para, posteriormente, estarem em melhores condições de atribuir significado às produções dos alunos para essa mesma tarefa – que são apresentadas nas TpF (TI) que possuem essa componente de interpretação.

Assim, a Parte II em geral, contém produções de alunos para tarefa para o aluno, sendo que cada uma dessas produções que se incluem possui um motivo específico para ser incluída e necessitam, em conjunto, possibilitar discutir as maiores dificuldades dos alunos identificadas na revisão teórica (que forma parte do documento do professor). Essas produções podem conter erros ou estratégias não usuais para o professor interpretar e propor *feedback*[30] construtivo para cada produção, o que se associa ao desenvolvimento do seu Conhecimento Interpretativo e busca possibilitar instituir uma prática interpretativa. Essas produções podem ser respostas para a tarefa ou diálogos entre alunos quando resolvem a tarefa para o aluno proposta na Parte I, uma vez que o objetivo é situar o professor em uma possível prática interpretativa, para que mobilize (e, posteriormente, pelas discussões, desenvolva) seu conhecimento matemático especializado para poder interpretar uma produção matemática, validar a matemática nela contida e posteriormente, propor *feedback* construtivo.

Para a elaboração de uma Tarefa para a Formação, inicialmente, realizamos a revisão teórica do tópico que será central na tarefa, identificando as dificuldades de alunos e professores, visto que assumimos, com frequência, as

---

[29] PACHECO-MUÑOZ, E.; JUÁREZ RUIZ, E.; FLORES-MEDRANO, E. Relaciones direccionales intra-dominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre localización en el plano. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, n. 24, p. 57–74, 2023.
SOSA, L.; GUZMÁN, M. V.; RIBEIRO, M. Conhecimento do professor sobre dificuldades de aprendizagem no tópico adição de expressões algébricas no Ensino Médio. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 21, n.3, p. 369-397, 2019.

[30] Orientações que são propostas aos alunos. Existem diferentes tipos de *feedback* (ver, por exemplo, GALLEGUILLOS, J.; RIBEIRO, M. Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: focus on the provided feedback. In: CERME, UTRECHT UNIVERSITY. ELEVENTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION. Utrecht: Utrecht University, 2019, p. 1-8. SILVA, C.; RIBEIRO, M. Relações Teóricas entre o Mathematics Teacher's Specialised Knowledge e o Conhecimento Interpretativo. In: VI CONGRESO IBEROAMERICANO SOBRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. A aparecer.), porém os que são do tipo construtivo, contém orientações claras que auxiliam os alunos a desenvolverem seu conhecimento matemático.

dificuldades dos alunos como gênese para identificar qual deverá ser o foco de atenção da formação, pois essas são, também tipicamente, as dimensões mais problemáticas do conteúdo do conhecimento do professor[31].

As tarefas para os alunos que compõe as TpF são tipicamente de introdução ao tópico matemático, objetivando desenvolver o entendimento matemático dos alunos, incitando-os a Pensar matematicamente. Dessa maneira, a tarefa para o aluno[32] é um recurso pedagógico que objetiva potenciar discussões matemáticas frutíferas em âmbito de um determinado tópico matemático, a ser abordado desde a Educação Infantil ao Ensino Médio[33]. A tarefa para o aluno assume tipicamente como ponto de partida a formulação ou resolução de problemas matemáticos, e na TpF encontra-se em um retângulo e possui um título que deve remeter a ideia do tópico que ela contemplará. Também, contém indicações para o aluno, visando estimulá-lo a utilizar as estratégias que conhecer e preferir para resolver a tarefa. Trata-se, inclusive, de uma oportunidade para evidenciar nas discussões que em matemática existem diferentes formas de proceder e de representar um tópico ou conceito[34].

É essencial considerar a necessidade do conhecimento especializado do professor também sobre os recursos (físicos e digitais) que tem por intencionalidade possibilitar o Pensar matemático dos alunos, como são as tarefas aqui entendidas e que vão além dos recursos didáticos comumente e quase que exclusivos utilizados pelos professores, por exemplo, o livro didático e as listas de exercícios[35]. O conhecimento dos recursos envolve conhecer como cada recurso pode ser utilizado, bem como conhecer sobre suas potencialidades e limitações, de modo que o professor tenha uma avaliação crítica do recurso[36], inclusive sobre necessidade de adaptações necessárias para utilizá-lo em sala de aula, além de algumas indicações de como utilizá-lo.

---

[31] Idem nota de rodapé 14.
[32] A tarefa para o aluno é o que o professor propõe aos alunos para resolverem. A ação do aluno ao resolver a tarefa é o que consideramos como atividade.
[33] Na Educação Infantil, a tarefa para o aluno é denominada de brincadeira com intencionalidade matemática, cuja estrutura e forma de implementação é diferente. Para mais informações, consulte os materiais associados a Coleção Brincar com intencionalidade matemática da responsabilidade do CIEspMat.
[34] STYLIANIDES, G. J.; STYLIANIDES, A. J. Mathematics for teaching: A form of applied mathematics. *Teaching and Teacher Education*, v. 26, n. 2, p. 161-172, 2010.
[35] GRILO, J. S. P.; BARBOSA, J. C.; LUNA, A. V. A. Princípios da Matemática Escolar Recontextualizados de Disciplinas Específicas. *Espaço Plural*, v. 18, n. 36, p. 12-40, 2017.
[36] Idem nota de rodapé 7.

A tarefa para o aluno por si só, como qualquer recurso, não desenvolve o entendimento matemático dos alunos, mas o conhecimento do professor vai moldar que discussões matemáticas ocorrem e a forma como essas discussões se dão e em que se focam. Para minimizar o *gap* (a "distância") entre os objetivos associados a conceitualização da tarefa e os que se alcançam com a sua implementação, desenvolvemos um conjunto de elementos constituintes das denominadas **Cinco Dimensões Fundamentais para a Implementação da Tarefa para o aluno**, cujo conteúdo permite a um professor que esteja em desenvolvimento ou tenha desenvolvido o seu conhecimento especializado – e tenha, portanto, participado de algum contexto formativo especializante como são os do grupo de Pesquisa e Formação Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor de e que ensina matemática – CIEspMat – possa implementar a tarefa para o aluno alcançando o objetivo de aprendizagens delineados.

Estas cinco dimensões fundamentais para a implementação da tarefa para o aluno são: (1) objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue com a tarefa; (2) recursos necessários e forma de trabalho dos alunos; (3) habilidade da Base Nacional Comum Curricular associada à tarefa; (4) possíveis maiores dificuldades dos alunos; (5) comentários para a implementação.

(1) **objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue com a tarefa**: assumimos que os alunos têm direito de aprender a cada dia (pelo menos) uma "coisa" nova da matemática, por isso, associado a cada tarefa elenca-se o objetivo prioritário que se pretende desenvolver nos alunos, considerando-se, assim, aqui, que conhecimento matemático se espera que os alunos desenvolvam durante a resolução e a discussão da tarefa. Nota-se que não se trata, portanto, de objetivos educacionais gerais, mas de um objetivo matemático específico.

(2) **recursos necessários e forma de trabalho dos alunos**: considerando que esse documento está associado ao planejamento do professor para a implementação da tarefa com os seus alunos, necessitam ser equacionados que recursos físicos ou digitais devem ser preparados para a implementação da tarefa. Além disso, a forma de trabalho dos alunos também se faz imprescindível ser explicitada, para que o professor (que conheça a forma especializada que concebemos a implementação das tarefas) possa criar uma

imagem mental organizacional e metodológica do que se espera os alunos façam e como façam, pois, a intencionalidade da tarefa a ser resolvida (individualmente, em duplas ou grupos de quatro alunos, por exemplo) pode mudar a depender da forma de trabalho dos alunos que deve estar associada ao objetivo de aprendizagens matemáticas.

(3) **habilidade da Base Nacional Comum Curricular associada à tarefa**: tomando como referência o documento curricular oficial brasileiro a Base Nacional Comum Curricular – BNCC[37], elenca-se a habilidade que mais se relaciona a tarefa para o aluno. Ressalta-se que a habilidade apesar de associada é diferente do objetivo de aprendizagens matemáticas, pois esses objetivos associam-se ao conhecimento de médio e longo prazo e não a *saber fazer* como é o foco prioritário das habilidades indicadas na BNCC, o que demanda do professor um conhecimento especializado para efetuar discussões com os alunos que vão além de desenvolver competências e habilidades, mas sim o conhecimento matemático[38].

(4) **possíveis maiores dificuldades dos alunos**: antecipar as possíveis dificuldades matemáticas dos alunos para resolver a tarefa é um dos elementos centrais para uma prática especializada, permitindo antecipar e equacionar que perguntas matemáticas efetuar aos alunos e em que momento, de modo a erradicar essas dificuldades. Essas dificuldades podem partir dos erros que os alunos podem efetuar, pois esses erros sustentam-se em dificuldades matemáticas e garantir que os alunos não cometem o mesmo tipo de erro duas vezes é garantir que ultrapassam essas dificuldades. Aqui, devemos explicitar as dificuldades matemáticas específicas associadas à tarefa e não as possíveis dificuldades gerais como de motricidade ou de formas de trabalho. Essas dificuldades também não podem ser gerais da matemática, tais como dificuldades em resolver problemas ou interpretação matemática, por não serem específicas de uma tarefa e não serem erradicadas somente com essa tarefa.

(5) **comentários para a implementação**: aqui, cabe apresentar e discutir detalhadamente "tudo" que possibilita implementar a tarefa de forma associada a alcançar o objetivo de aprendizagens matemáticas delineado na sua

[37] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.
[38] Idem nota de rodapé 4.

conceitualização. Assim, consiste na parte mais robusta do documento, contendo o máximo de informações necessárias (e próximas das suficientes), que permitem criar uma imagem mental concreta de o que fazer, como fazer e por que fazer, a cada momento, incluindo um conjunto de questões que podem e devem ser efetuadas em determinados momentos da implementação da tarefa de forma a possibilitar que os alunos ultrapassem as suas dificuldades (indicando as possíveis respostas).

Dentre os vários tópicos da matemática, no âmbito da Geometria, a simetria é um dos muitos tópicos problemáticos em que alunos e professores apresentam dificuldades[39]. Uma das maiores dificuldades dos alunos nesse tópico é identificar e quantificar corretamente os eixos de simetria axial, pois, comumente, os alunos se confundem na contagem dos eixos de simetria, quando a figura possui mais de um eixo[40] e quando ele é inclinado[41], sendo essa uma dificuldade semelhante dos professores, que, muitas vezes, identificam apenas os eixos de simetria nas direções vertical e horizontal[42]. Outra dificuldade associa-se ao entendimento do que é simetria (propriedade de uma figura), relacionada a não diferenciar simetria da transformação geométrica que a resultou na figura[43]. Estas dificuldades dos alunos necessitam, portanto, ser consideradas nas propostas de tarefas que se conceitualizam e implementam com os alunos e nas Tarefas para a Formação que buscam desenvolver esse conhecimento especializado do professor para possibilitar implementar práticas matemáticas que levem os alunos a ultrapassarem essas dificuldades.

Exemplo de tarefa para o aluno como parte de uma tarefa para a Formação e das cinco dimensões para sua implementação

Uma das Tarefas para a Formação conceitualizadas no grupo CIEspMat no âmbito da simetria que compõe um itinerário de formação sustentado em Tarefas

---

[39] Idem notas de rodapé 12, 13, 15 e 16.

[40] LOPES, L. S.; ALVES, G. L. P.; FERREIRA, A. L. A. A Simetria nas Aulas de Matemática: uma proposta investigativa. *Educação e Realidade*, v. 40, n. 2, p. 549-572, 2015.

[41] Idem nota de rodapé 12.

[42] GOMES, A. Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. In: ATAS DO XXIII SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Lisboa: APM p. 233–243, 2012.

[43] Idem nota de rodapé 16.

Interpretativas[44] está associada ao objetivo formativo de possibilitar a melhoria da prática profissional do professor de matemática, por meio do desenvolvimento de seu Conhecimento Interpretativo no âmbito da simetria, com foco nas conexões com outros tópicos e a estrutura matemática que a permeia, além de diferenciá-la das transformações geométricas isométricas.

Apresentamos aqui uma abordagem metodológica para a conceitualização da TpF e da tarefa para o aluno dos Anos Finais que busca desenvolver o conhecimento especializado do professor para a implementação, de modo a maximizar as aprendizagens matemáticas dos alunos. Iniciamos pela apresentação da tarefa do aluno e das cinco dimensões fundamentais para otimizar a implementação em sala de aula e, posteriormente, discutimos o conteúdo da TpF associada a desenvolver as especificidades do conhecimento do professor para implementar essa tarefa do aluno e que podem ser também generalizáveis para outras tarefas e tópicos matemáticos.

Na Parte Preliminar desta TpF, efetuam-se algumas questões que buscam direcionar a atenção do professor para problematizar o seu entendimento do tópico matemático simetria e das diferenças entre esse tópico e as transformações geométricas isométricas.

A Parte I é constituída por uma tarefa para o aluno (dentro de um retângulo – Figura 1) de introdução à simetria, conceitualizada para alunos do 7.º ano (12 – 13 anos) e algumas questões para o professor. As questões para o professor têm por objetivo aceder e desenvolver o seu conhecimento especializado.

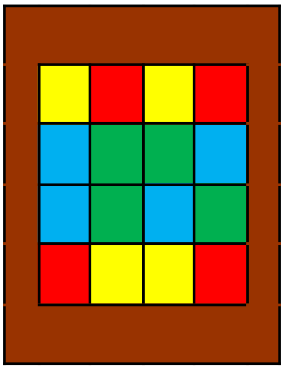
Figura 1 – Tarefa para o aluno que forma parte de uma TpF desenvolvida no CIEspMat

Tarefa: Em busca da simetria

(Você deve explicar sempre o seu raciocínio descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

[44] Essas TI estão sendo implementadas em um curso de extensão para professores de matemática e associadas a pesquisa de doutorado da primeira autora deste artigo.

1. O tabuleiro do jogo “Em busca da simetria” é um quadrado de 4 por 4, em que cabem 16 peças (quadrados menores coloridos de diferentes cores de um dos lados e todos da mesma cor do outro lado). A seguir, apresenta-se um tabuleiro cujas peças são coloridas com quatro cores diferentes:



Imagine que você está jogando e tem as peças organizadas como na imagem acima.

(a) Ela é simétrica ou não? Justifique sua resposta.

(b) Se considera que a imagem não é simétrica, é possível movimentar alguma(s) peça(s) para que passe a ter um eixo de simetria? Justifique a sua resposta.

(c) É possível movimentar as peças para ter:

(i) Dois eixos de simetria? Justifique e trace os eixos de simetria se for possível.

(ii) Quatro eixos de simetria? Justifique e trace os eixos de simetria se for possível

(iii) Mais do que quatro eixos de simetria? Justifique e trace todos os eixos de simetria que for possível.

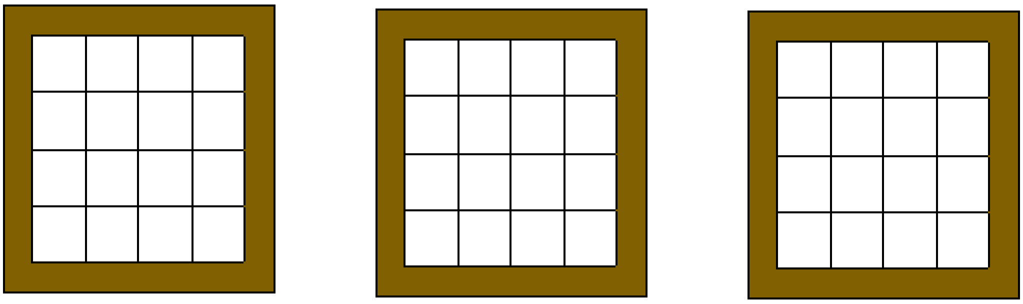
Fonte: arquivo dos autores

Associada a essa tarefa para o aluno, elencam-se as cinco dimensões fundamentais para a sua implementação. Aqui, por uma questão de espaço, apresentamos uma versão sintética, de modo a transmitir as ideias centrais do conteúdo de cada uma dessas dimensões[45]:

(1) **Objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue com a tarefa.** Com esta tarefa busca-se desenvolver o entendimento matemático dos alunos relativamente aos elementos fundamentais que sustentam entender o que é a simetria e a diferenciar a simetria das transformações geométricas isométricas.

(2) **Recursos necessários e forma de trabalho dos alunos**. Para a implementação dessa tarefa é necessária a tarefa impressa para cada aluno, de modo que os alunos possam responder na própria folha da tarefa (ou no verso), material de escrita, régua, transferidor, folha impressa com vários tabuleiros "em branco" para os alunos colorirem e responderem às questões (b) e (c) da tarefa (Figura 2). Assume-se que os alunos devem realizar a tarefa individualmente.

Figura 2 – Recurso para os alunos responderem à tarefa



Fonte: arquivo dos autores

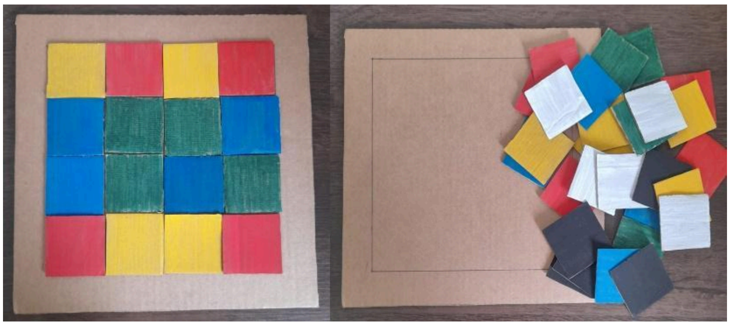
É essencial que também seja disponibilizado para cada aluno o tabuleiro do jogo "Em busca de simetria" com as peças coloridas[46] (Figura 3). Nota-se que apesar de a imagem presente na tarefa utilizar apenas quatro cores, deve-se

[45] Para uma perspectiva global do conteúdo de cada uma destas cinco dimensões associadas à implementação desta tarefa em sala de aula e uma discussão das especificidades do conhecimento do professor, consultar o livro da Coleção Práticas matemáticas especializadas que s foca este tópico.

[46] O tabuleiro e as peças foram confeccionados em papelão e as peças coloridas com tinta guache. Porém, podem ser confeccionados em papel cartão, cartolina ou outro material que o professor tenha disponível.

disponibilizar no mínimo cinco peças de cada cor (seis cores diferentes) em um total de 30 peças. O intuito é que os alunos tenham que experimentar diversas possibilidades de combinação de cores para responder à tarefa.

Figura 3 – Tabuleiro e peças para os alunos responderem à tarefa



Fonte: arquivo dos autores

(3) **Habilidade da Base Nacional Comum Curricular associada à tarefa**. Considerando as habilidades que se encontram expressas na BNCC[47], as que mais se aproximam do objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue são:

> (EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria[48].
> (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros[49].

Essas são, dentre as habilidades expressas na BNCC[50] as que mais se aproximam do objetivo de aprendizagens matemáticas que se pretende alcançar com a tarefa proposta.

(4) **Possíveis dificuldades dos alunos**. Associado ao objetivo de aprendizagens matemáticas da tarefa, os alunos podem apresentar várias dificuldades matemáticas e, dentre essas dificuldades, são elencadas algumas a serem discutidas para ampliar e aprofundar o conhecimento de acordo com os raciocínios dos alunos:

[47] Idem nota de rodapé 37.
[48] Idem nota de rodapé 37, p. 293.
[49] Idem nota de rodapé 37, p. 309.
[50] A BNCC denomina simetria como sinônimo de transformação geométrica isométrica ao associar a operação com seu resultado, o que é matematicamente inadequado, pois simetria não forma parte da classe de equivalência das transformações geométricas, uma vez que não corresponde a "algo" que se efetua na figura – transformação –, mas refere-se a uma propriedade que se procura na figura.

(1) Identificar se a figura possui ou não simetria, associado ao entendimento do termo “figura simétrica”;
(2) Identificar e traçar o eixo de simetria;
(3) Quantificar corretamente todos os possíveis eixos de simetria, o que se associa à compreensão do que é um eixo de simetria;
(4) Considerar a simetria como sinônimo da transformação geométrica isométrica reflexão.

Essas são algumas das dificuldades matemáticas que os alunos podem revelar ao resolver a tarefa (que foi conceitualizada para permitir ultrapassar essas dificuldades e desenvolver o conhecimento matemático associado), mas, obviamente, outras podem ocorrer, sendo essencial um conhecimento especializado por parte do professor relativamente ao que se espera os alunos já conheçam em termos matemáticos dos tópicos e conceitos acessórios aqui envolvidos, como sejam, por exemplo, as transformações geométricas isométricas (reflexão, rotação, translação) e eixo de simetria.

(5) **Comentários para a implementação**[51]. Essa tarefa foi pensada para ser implementada com alunos do 7.º ano (12 – 13 anos), durante duas aulas (90 minutos). De acordo com o objetivo de aprendizagens matemáticas delineado para a tarefa, são tecidos comentários para que o professor possa desenvolver as discussões matemáticas com os seus alunos, com foco no objetivo considerado para cada pergunta da tarefa e considerando as possíveis dificuldades dos alunos para ultrapassá-las.

Primeiramente, o professor deve entregar a tarefa impressa aos alunos (uma para cada) e os recursos e deixar que eles respondam sem intervenções (45 minutos). Após os alunos terminarem de responder, a discussão (45 minutos) deve ser iniciada efetuando algumas questões: a imagem que temos na tarefa é resultado de alguma transformação geométrica? Se sim, qual? Se não, por quê?

A partir das respostas dos alunos, a ideia é discutir que a imagem está sendo transformada, conforme o decorrer do jogo, mas do jeito que a imagem está apresentada na tarefa, ela não é simétrica. Assim, por meio da discussão da

[51] Aqui, por motivo de espaço apresentamos um recorte dos comentários para a implementação da tarefa para o aluno.

primeira questão, objetiva-se situar o aluno em um contexto de simulação do jogo, para que ele identifique se a figura dada possui ou não simetria.

Apesar de, pela BNCC[52] ser esperado que já se tenha abordado a simetria no 4.º ano, é usual que os alunos apresentem dificuldade em identificar a simetria em figuras[53], associado a entender o significado do termo "figura simétrica". Diante dessa dificuldade ser um empecilho para o aluno responder à questão a), devemos questioná-los: O que vocês associam a palavra simetria? Quando uma figura é simétrica? Quando uma figura não é simétrica?

Possivelmente, as respostas dos alunos estarão relacionadas à simetria em contextos não matemáticos (perfeição e beleza) e a simetria do tipo axial ou bilateral, o que precisa ser ampliado para os demais tipos de simetria ao longo da proposta de outras tarefas. Devemos validar as respostas relacionadas à simetria como uma propriedade de algumas figuras, podendo ser do tipo axial ou bilateral quando o eixo de simetria divide a figura em duas metades congruentes, pois, nesse caso, a figura é resultado da reflexão e, por isso, as partes são reflexos uma da outra. Assim, devemos retomar a questão (a), sendo esperado que eles concluam que a figura do jeito que está não é simétrica, pois uma figura simétrica (simetria axial) possui um eixo de simetria (pelo menos).

Em seguida, devemos discutir a questão (b), considerando que se a figura não é simétrica, o que podemos fazer para que ela se torne simétrica? Que procedimentos devem ser utilizados e quais movimentos mínimos podemos efetuar para que ela se torne simétrica? Após tornar a figura simétrica, devemos questioná-los, onde podemos traçar o eixo de simetria? incitando-os com as indagações sobre o que é um eixo? O que é um eixo de simetria? levando em conta que os alunos já devem estar familiarizados com o termo "eixo" ao terem já estudado nos 5.º e 6.º ano, por exemplo, plano cartesiano, ao menos relativo ao 1.º quadrante, conforme previsto pela BNCC[54]. Assim, devemos retomar com os alunos a partir do que eles já conhecem relacionado ao contexto do plano cartesiano o que são eixos, pois o plano cartesiano é composto por dois eixos perpendiculares e, a partir desse conhecimento, associar a ideia ao eixo de simetria.

---

[52] Idem nota de rodapé 37.
[53] Idem nota de rodapé 16.
[54] Idem nota de rodapé 37.

A discussão deve focar que o eixo é uma reta, ampliando a discussão de que o eixo de simetria é uma linha reta que divide uma figura em duas partes congruentes e simétricas em relação a esse eixo, podendo essa figura ser resultante da transformação geométrica isométrica reflexão. Ainda, é essencial discutir com os alunos o que é e o que não é um eixo de simetria, a partir da proposição de alguns exemplos envolvendo uma reta que não divide a figura em duas partes congruentes ou traçando uma linha curva e outras figuras que de fato contenha eixo de simetria – principalmente, eixos em posição distinta da horizontal e vertical – considerando que uma das principais dificuldades dos alunos se associa a visualizar e garantir a perpendicularidade entre o segmento de linha que une os pontos correspondentes em uma figura, sua imagem e o eixo de simetria[55].

Além disso, é essencial para o entendimento do eixo de simetria a equidistância entre figura, eixo de simetria e imagem[56] e, para isso, o professor deve escolher alguma produção de aluno que tenha traçado um dos eixos de simetria vertical corretamente (pois é mais intuitivo a visualização das medidas de distâncias, nesse caso) e, a partir dela, discutir se a medida da distância entre a figura e sua imagem são as mesmas em relação ao eixo de simetria.

Em continuação, devemos questionar os alunos se existem outras possibilidades de tornar essa figura simétrica, de modo a ter mais de um eixo de simetria, para responder à questão (c). Após os alunos esgotarem as possibilidades utilizando as quatro cores, considera-se que eles concluíram que não é possível a figura ter quatro eixos. Assim, devemos questioná-los como podemos proceder para encontrar mais eixos de simetria? Que mudanças é preciso fazer? de modo a concluírem que isso é possível se utilizarmos quadrados com três cores apenas e, a partir disso, discutir a última questão (c) – (iii).

Devemos incentivar os alunos a obterem diferentes figuras simétricas por meio da reflexão, por exemplo, se dois alunos considerarem a mesma figura, devemos pedir que eles juntamente tentem encontrar uma diferente. Também é essencial questionar os alunos sobre quantos eixos de simetria no máximo podem

[55] Idem nota de rodapé 12.
[56] Idem nota de rodapé 12.

ser traçados considerando diferentes formas de mover as peças do jogo, atentando-se que comumente os alunos contam os eixos como semirretas com origem no centro da figura (respondendo incorretamente oito eixos de simetria), o que se associa a dificuldade de quantificar corretamente os eixos de simetria[57] e que se relaciona ao entendimento do que é um eixo de simetria. Visando ultrapassar essa dificuldade, devemos retomar que um eixo de simetria é uma reta e não semirreta e por isso, nessa tarefa é possível traçar até quatro eixos de simetria a depender das mudanças de peças no jogo. Devemos explicitar aos alunos que existem diversas possibilidades de combinar de modo diferente as peças e tornar a figura simétrica, porém em alguns casos, são necessários mais procedimentos (mais trocas de peças de lugar).

Para finalizar a discussão, devemos discutir o porquê de não podemos denominar simetria como sinônimo de reflexão[58]. Alguns questionamentos a serem realizados com os alunos são: Podemos considerar que simetria e reflexão é a mesma "coisa"? Se sim, por quê? Se não, por quê? O que temos que fazer para que a figura tenha simetria?

A ideia a discutir é que sem se fazer "algo" na figura da tarefa, considerando a cor como um critério, ela não tem simetria, sendo esse "algo" algum tipo de transformação geométrica isométrica. Assim, devemos explicitar que, na tarefa, temos a simetria do tipo axial, também denominada como simetria bilateral, obtida por meio de reflexão axial, mas que existem outros tipos de simetria como a rotacional e a translacional obtidas pelas outras transformações, respectivamente, rotação e translação e que serão abordadas em futuras tarefas. Logo, para sistematizar a discussão, é preciso que fique claro aos alunos que, quando operamos nas figuras, estamos efetuando transformações geométricas isométricas, obtendo como resultado figuras com uma propriedade denominada simetria

Na TpF, após a tarefa para o aluno, e ainda na Parte I, incluem-se algumas questões para o professor que buscam desenvolver o seu conhecimento especializado. A primeira questão solicita que o professor resolva a tarefa destinada ao aluno sem pensar em um contexto de ensino e tem por objetivo

[57] Idem nota de rodapé 40.
[58] Idem notas de rodapé 15 e 16.

aceder ao conhecimento do professor associado ao *saber fazer.* Em continuação, é solicitado que descreva possíveis procedimentos corretos que um aluno do 7.º ano utilizaria para resolver a questão (b) da tarefa, visando assim aceder ao conhecimento do professor relacionado aos procedimentos que podem ser utilizados por alunos desse ano considerando o que se espera eles já conheçam. A última questão está associada às principais dificuldades matemáticas dos alunos do 7.º ano para resolver a tarefa, objetivando aceder o conhecimento do professor sobre as principais dificuldades dos alunos em simetria, para relacionar as dificuldades e erros presentes nas produções dos alunos na Parte II da Tarefa Interpretativa. (Estas questões associam-se, em um primeiro momento, a aceder ao conteúdo do conhecimento do professor para que, posteriormente, pela abordagem especializada que se considera, desenvolver esse conhecimento a partir do que já conhecem e como o conhecem.)

A Parte II contém produções de alunos e visa desenvolver o Conhecimento Interpretativo dos professores participantes do contexto formativo. A primeira questão apresenta um diálogo entre três alunos ao resolverem a tarefa para o aluno (proposta na Parte I), tendo como objetivo situar o professor em sua prática para que interprete as produções propostas, atribua significado às formas de pensar e de proceder dos alunos e proponham *feedback* para as formas de Pensar matematicamente que sustentam as produções apresentadas. Cada produção incluída na tarefa está associada a possibilitar discutir uma dimensão específica do tópico e do conhecimento e dificuldades dos alunos associadas a simetria.

A segunda questão objetiva que o professor interprete as produções dos alunos e desenvolva seu Conhecimento Interpretativo. São propostas duas produções, sendo apresentada a produção de Sofia por ser incompleta (identifica apenas dois eixos de simetria) e a produção de Inês, que não é apresentada, mas descreve-se que é resultado de uma pequena mudança da produção de Sofia. Assim, indaga-se ao professor sobre qual é a produção de Inês, bem como sobre os procedimentos e validade matemática de sua produção, com foco nos eixos de simetria do quadrado.

Considerações Finais

Caracterizamos a tarefa para o aluno – estrutura e conteúdo – e as cinco dimensões fundamentais para sua implementação, uma vez que são considerados elementos fundamentais das Tarefas para a Formação e apresentamos e discutimos um exemplo desses recursos no âmbito da simetria.

Esses recursos podem ser utilizados na prática de sala de aula para potenciar as discussões matemáticas com os alunos e inclusive o professor pode desenvolver o seu conhecimento especializado com a estrutura e conteúdo aqui apresentados e discutidos e elaborar tarefas em outros tópicos. Isso porque a estrutura das tarefas para os alunos e do documento das cinco dimensões fundamentais para sua implementação são generalizáveis, independente do tópico[59]. No que tange à estrutura das cinco dimensões fundamentais, a ordem de cada dimensão importa, pois, todas as dimensões estão associadas à primeira – objeto de aprendizagens matemáticas que se persegue com a tarefa – e permite uma visão global de sua implementação.

O conteúdo das cinco dimensões deve ser o mais detalhado possível, enquanto um recurso de planejamento, garantindo que as discussões matemáticas ocorram da forma como quem idealizou a tarefa e sua implementação. Percebe-se a necessidade de que todos os recursos tenham indicações explícitas que permitam trazer ideias de como podem ser utilizados de forma a potenciar alguma discussão matemática de forma matematicamente adequada.

Como parte do trabalho que desenvolvemos, sempre temos um olhar no futuro e no que necessita ser ainda desenvolvido, o que nos permite considerar sempre um conjunto de questões em aberto que necessitam ser respondidas para podermos avançar a cada momento na melhoria da qualidade da pesquisa e da formação. Assim, algumas questões em aberto que podem contribuir para guiar pesquisas futuras são:

(i) Considerando a possibilidade de generalizar a estrutura da tarefa para o aluno e das cinco dimensões, o que necessita ser considerado em relação à diversidade de contextos em que o tópico matemático necessita ser discutido com os alunos?

[59] Idem nota de rodapé 5.

(ii) Como integrar nos comentários para a implementação dessas diversidades culturais e contextuais e como elas se relacionam com o objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue com a tarefa?

Agradecimentos:

O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

Referências

BASTOS, R. Notas sobre o Ensino da Geometria: Simetria. *Educação e Matemática*, n. 88, p. 9-11, 2006.

BORASI, R. Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, v. 7, n. 3, p. 2-8, 1987.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. C.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAS-GONZÁLES, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÁN, C. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, v. 20, n. 3, p. 236–253, 2018.

DI MARTINO, P.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. Interpretative Knowledge. In: LERMAN, S. (Ed.). Encyclopedia of Mathematics Education. Cham: Springer International Publishing, p. 424-428, 2020.

GALLEGUILLOS, J.; RIBEIRO, M. Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: focus on the provided feedback. In: CERME, UTRECHT UNIVERSITY. ELEVENTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION. Utrecht: Utrecht University, 2019, p. 1-8.

GOMES, A. Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. In: ATAS DO XXIII SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Lisboa: APM p. 233–243, 2012.

GRILO, J. S. P.; BARBOSA, J. C.; LUNA, A. V. A. Princípios da Matemática Escolar Recontextualizados de Disciplinas Específicas. *Espaço Plural*, v. 18, n. 36, p. 12-40, 2017.

GROSSMAN, P. Learning to practice: The design of clinical experience in teacher preparation. *Policy Brief*, p. 1-8, 2010.

JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, v. 19, n. 3-4, p. 135-150, 2014.

LOPES, L. S.; ALVES, G. L. P.; FERREIRA, A. L. A. A Simetria nas Aulas de Matemática: uma proposta investigativa. *Educação e Realidade*, v. 40, n. 2, p. 549-572, 2015.

MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. *Designing and using mathematical tasks*. St Albans: Tarquin, 2006.

MELLONE, M.; RIBEIRO, M.; JAKOBSEN, A.; CAROTENUTO, G.; ROMANO, P.; PACELLI, T. Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education*, v. 22, n. 2, p. 154–167, 2020.

MONTES, M. M. C.; CARRILLO, C. E. S. Creencias y Concepciones de los Profesores de Secundaria sobre la Enseñanza de las Isometrías. El Caso de la Reflexión. *EPISTEMUS*, v. 18, n. 9, p. 29-36, 2015.

NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. V. How large are teacher effects?. *Educational evaluation and policy analysis*, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.

PACHECO-MUÑOZ, E.; JUÁREZ RUIZ, E.; FLORES-MEDRANO, E. Relaciones direccionales intra-dominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre localización en el plano. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, n. 24, p. 57–74, 2023.

RAMFUL, A.; HO, S. Y.; LOWRIE, T. Visual and analytical strategies in spatial visualisation: perspectives from bilateral symmetry and reflection. *Mathematics Education Research Journal*, v. 27, p. 443-470, 2015.

RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. In: PROCEEDINGS OF THE 37TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. Kiel: PME, 2013. p. 89-96.

RIBEIRO, M. Tarefas para a Formação e suas especificidades para desenvolver o conhecimento especializado do professor no âmbito do Pensamento Algébrico: entendendo regularidades de repetição. *Revista Espaço Plural*, v. 23, n.42, 2021.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. Tarefas para a Formação para desenvolver o Conhecimento Especializado do professor no âmbito do Pensamento Algébrico em contextos de regularidades de crescimento: exemplos de conteúdo de conhecimento a desenvolver. *Revista Espaço Plural*, v. 24, n.43, 2022.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.

RIBEIRO, M.; POLICASTRO, M. S.; CALDATTO, M. E.; ALMEIDA, A. R. Interpretative knowledge of prospective kindergarten and primary teachers in the context of subtraction. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 24, n. 3, p. 1-31, 2022.

RIBEIRO, M.; SILVA, C. Especificidades do Conhecimento Interpretativo do professor e das Tarefas para a Formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, v. 18, 2023. A aparecer.

RIBEIRO, M; GIBIM, G. F. B.; SOUZA, C. A. *Coleção CIEspMat Professor*: Reflexão e Simetria. Curitiba: CRV, 2021.

SILVA, C.; RIBEIRO, M. Relações Teóricas entre o Mathematics Teacher's Specialised Knowledge e o Conhecimento Interpretativo. In: VI CONGRESO IBEROAMERICANO SOBRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. A aparecer.

SILVA, D. F.; ROMÃO, E. C. O Erro no Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática: análises e potencialidades no Conjunto dos Números Inteiros. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, v. 5, n. 1, p. 160–187, 2022.

SOSA, L.; GUZMÁN, M. V.; RIBEIRO, M. Conhecimento do professor sobre dificuldades de aprendizagem no tópico adição de expressões algébricas no Ensino Médio. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 21, n.3, p. 369-397, 2019.

STYLIANIDES, G. J.; STYLIANIDES, A. J. Mathematics for teaching: A form of applied mathematics. *Teaching and Teacher Education*, v. 26, n. 2, p. 161-172, 2010.

Recebido em: 16/01/2024
Aprovado em: 02/05/2024