EL CONOCIMIENTO DEL HORIZONTE MATEMÁTICO EN EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA EN UN CONTEXTO DE NIVEL SUPERIOR

Leticia Sosa Guerrero[1]
María del Rosario Sandoval Cedillo[2]

Resumen: Esta investigación presenta una problemática teórica que refiere al reconocimiento de un modelo teórico que describe las conexiones matemáticas que se ejecutan en el principio de inducción matemática. La finalidad de este artículo es evidenciar las conexiones desde el subdominio del Horizon Content Knowledge (HCK) proveniente del modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). La metodología que se plantea es un estudio de caso intrínseco, donde se selecciona a dos profesoras de nivel superior; se realiza un análisis del subdominio HCK en sus tres dimensiones (prácticas, temas y valores), así como en el diseño de mapas mentales en los tres tipos de conexiones del HCK (intraconceptuales, interconceptuales y temporales). Entre los principales resultados se presentan indicadores del HCK que evidencian las profesoras en el principio de inducción matemática[3], los cuales reflejan el impacto en los contenidos curriculares, que desde la mirada de la formación de profesores es relevante por el ejercicio del análisis cualitativo puesto en un contexto matemático.

Palabras clave: Conocimiento del horizonte matemático; Conexiones; Práctica docente; Inducción matemática.

KNOWLEDGE OF THE MATHEMATICAL HORIZON IN THE PRINCIPLE OF MATHEMATICAL INDUCTION IN A HIGHER-LEVEL CONTEXT

Abstract: This research presents a theoretical problem that refers to the recognition of a theoretical model that describes the mathematical connections that are executed in the principle of mathematical induction. The purpose of this article is to highlight the connections from the subdomain of Horizon Content Knowledge (HCK) from the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model. The methodology proposed is an intrinsic case study, where two higher-level

[1] Doctora en Didáctica de las Matemáticas. Docente Investigadora de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. México. Email: lsosa@uaz.edu.mx

[2] Doctora en Desarrollo Educativo con Énfasis en Formación de Profesores. Docente Investigadora de la Facultad de Ciencias y Departamento Físico Matemático de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. México. Email: rosario@fciencias.uaslp.mx

[3] El principio de la inducción matemática llamado método de la inducción matemática (inducción completa) y basada en el principio siguiente: Una proposición se cumple para todo número natural n si se satisfacen las condiciones siguientes: Condición 1. La proposición se cumple para n = 1. Condición 2. La veracidad de la proposición para cualquier número natural n = K implica su veracidad para el número natural siguiente n = k+1 (Sominskii, 1959, p.14).
SOMINSKII, I.S. El método de la inducción matemática. Quinta edición. Editorial Limusa: Noriega Editores, 1959.

teachers in the area of mathematics are selected; and an interpretation and triangulation of data where recorded classes are examined, semi-structured interviews are applied and field notes are evidenced. Among the actions for the assessment of the research, the analysis of the HCK subdomain is deepened in its three dimensions (practices, themes and values), as well as the design of conceptual maps in the three types of connections of the HCK (intraconceptual, interconceptual and temporary). Among the main results, a large number of HCK indicators are presented that the teachers demonstrate in the principle of mathematical induction, which reflect the impact on the curricular contents in the area of science, which from the perspective of teacher training is relevant for the exercise of qualitative analysis placed in a mathematical context.

Keywords: Horizon Content Knowledge, Connections, Teaching practice, Mathematical Induction, Undergraduate level, Higher education.

Introducción

La práctica docente en las aulas educativas representa un reto intelectual, así como una responsabilidad humana y social en la formación de las futuras generaciones. Por ser una actividad dinámica, reflexiva, de interacción entre docente y alumno, ha llevado a jugar un papel significativo en el conocimiento matemático para la enseñanza. Esto es:

> El concepto del conocimiento matemático para la enseñanza surge de los estudios referentes a la práctica docente, en el ámbito matemático, y a la identificación de las tareas habituales que realizan los profesores que requieren conocimientos específicos, razonamiento y conocimiento del contenido[4].

En variadas investigaciones se describe el impacto e importancia que tiene la identificación de las prácticas docentes en cuestión de las actividades cotidianas del docente. En el cual: “La profesionalización del docente implica el reconocimiento de los conocimientos que están en juego durante el desarrollo de su tarea [...]” [5]. De esta forma se observa que un punto nodo de toda actividad docente, es el de tipificar el conocimiento puntual que debe utilizar en su práctica docente. Se describe que:

---

[4] ROJAS, Nielka; FLORES, Pablo. El análisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones. En: José Luis Lupiáñez, María C. Cañadas, Marta Molina, Mercedes Palarea, y Alexander Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática 2011*. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2011, p. 17 -28. p.18.

[5] REYES Ana María. *Conocimiento especializado de profesores en formación de primaria. Enseñanza del significado razón***.** Tesis Doctoral sin publicar, Universidad Pedagógica Nacional Unidad 321 Zacatecas, Zacatecas, 2018, p.62.

> El conocimiento especializado de un profesor de Matemáticas, en particular el relativo al contenido que trabaja, no solamente tiene sentido por su valor matemático, sino que aporta a la práctica docente herramientas con las que organizar, dar sentido y comunicar el contenido[6] .

Ahora bien, Shulman brinda a la investigación educativa un marco de referencia importante, en el cual nacen gran parte de las ideas y teorías relacionadas con el conocimiento profesional de un profesor. Shulman (1987)[7] realiza un análisis de la práctica del profesor para posteriormente caracterizar una base de los conocimientos que necesita el profesor, lo cual lo lleva a considerar siete tipos de conocimientos que son: Conocimiento del contenido, Conocimiento didáctico general, Conocimiento del currículo, Conocimiento didáctico del contenido, Conocimiento de los alumnos y de sus características, Conocimiento de los contextos educativos, Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos Partiendo de lo anterior BALL y colaboradores[8] proponen un modelo llamado el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) (en inglés, Mathematical Knowledge for Teaching [MKT]) que nace del modelo de Shulman (1986)[9], donde este describe los conocimientos necesarios para un profesor de matemáticas.

Un punto de estudio e interés de este modelo está presente en uno de sus subdominios llamado el Conocimiento del Horizonte Matemático (en inglés, Horizon Content Knowledge [HCK]) En donde se denomina un subdominio que ofrece características de análisis en la práctica docente; ya que permite observar "[…] una visión global de la educación matemática de los estudiantes, de manera que pueda ser utilizada por el profesor al enseñar matemáticas en el aula"[10].

Fundamentos teóricos

---

[6] MONTES, Miguel Ángel; CONTRERAS, Luis Carlos; LIÑÁN, María del Mar.; MUÑOZ-CATALÁN, María Cintia; CLIMENT, Nuria; CARRILLO, José. Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, 367, p. 36 – 62, Enero-marzo, 2015.

[7] SHULMAN, Lee S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22. p. 11.

[8] BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education,* 59 (5), p. 389-407, 2008.

[9] SHULMAN, Lee S. Those who understand knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association,* 15(2), p. 4-14, 1986.

[10] MARTÍNEZ, M.; GINE, Climent; FERNANDEZ, L.; FIGUEIRAS, Lourdes; DEULOFEU, Jordi. El conocimiento del horizonte matemático: Más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. *Investigación en Educación Matemática XV,* p. 429 – 438, 2011.

En esta sección se profundiza con respecto del modelo MKT, con especial énfasis en el subdominio HCK. El objetivo de esta investigación es utilizar un modelo teórico que describa específicamente las conexiones matemáticas que se ejecutan en un contexto educativo de nivel superior en el principio de inducción matemática.

Conocimiento Matemático para la Enseñanza

Actualmente el estudio de las prácticas docentes presta interés por los especialistas, y es común hablar del análisis entre las diferentes metodologías de enseñanza aprendizaje. Estos estudios determinan objetivos claramente definidos y consideran importante buscar alternativas serias que permitan perfeccionar y dimensionar la función docente en las matemáticas en todos los niveles educativos. Por tal motivo, se considera importante analizar los conocimientos que se desarrollan en los profesores de matemáticas, ya que su estudio da pie para las reflexiones de futuros docentes. Se describe que: "El conocimiento del profesor de matemáticas se ha convertido en el objeto de estudio de diferentes investigadores que tienen el propósito de caracterizar el conocimiento del contenido que deben tener los profesores […]"[11] .

Ante la búsqueda de respuestas, diversas investigaciones realizan esfuerzos significativos por ubicar y dar sentido a esta actividad, buscando estrategias idóneas para colocarlo en un marco teórico que lo identifique y posicione en búsqueda de mejorar las problemáticas que subyacen en la práctica docente. Se describe que:

> La Didáctica de la Matemática y Práctica Docente debe encararse potenciando el marco teórico de la didáctica especial como disciplina autónoma emergente, que aporta y problematiza a la práctica docente. Es altamente conveniente que la Didáctica de la Matemática y la Práctica Docente se proyecten en el propio diseño de la carrera de profesor de Matemática[12].

[11] REYES Ana María. *Conocimiento especializado de profesores en formación de primaria. Enseñanza del significado razón.* Tesis Doctoral sin publicar, Universidad Pedagógica Nacional Unidad 321 Zacatecas, Zacatecas, 2018, p.73.

[12] VILARÓ, Ricardo. Desafíos de la formación docente ante la realidad social y la sociedad del conocimiento. En: GÓMEZ, Inés M.; PLANCHART Enrique (Eds.). *Educación Matemática y Formación de Profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica*. Bilbao: HumanitarianNet, 2005, p. 51 – 71.

Una de las propuestas que ha impactado en el análisis de la práctica docente es lo definido por Shulman (1986), dado que él caracteriza los conocimientos necesarios que necesita un profesor para enseñar. Se consideran tres componentes:

> Content Knowledge. This refers to the amount and organization of knowledge per se in the mind of the teacher [El conocimiento del contenido. Se refiere a la cantidad y la organización de conocimiento de contenido en la mente del profesor]
> Pedagogical Content Knowledge. A second kind of content knowledge is pedagogical knowledge, which goes beyond knowledge of subject matter per se to the dimension of subject matter knowledge for teaching [Conocimiento didáctico del contenido. Un segundo tipo de conocimiento del contenido es el conocimiento didáctico, que va más allá del conocimiento de la materia per se a la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza]
> The curriculum is represented by the full range of programs designed for the teaching of particular subjects and topics at a given level, the variety of instructional materials available in relation to those programs […] [El plan de estudios está representado por la gama completa de programas diseñados para la enseñanza de materias y temas particulares en un nivel determinado, la variedad de materiales de instrucción disponibles en relación con esos programas (…)][13] .

Derivado de lo anterior, surge un modelo de estudio y análisis de la práctica del profesor en servicio denominado *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*[6] como se muestra en la Figura 1. En donde se divide en dos subdominios que son: Conocimiento del Contenido (en inglés, Subject Matter Knowledge [SMK]) y Conocimiento Didáctico del Contenido (en inglés, Pedagogical Content Knowledge [PCK]). El primer subdominio SMK contiene tres subdominios que son: Conocimiento Común del Contenido (CCC) (en inglés, Common Content Knowledge [CCK]), Conocimiento Especializado del Contenido (CEC) (en inglés, Specialized Content Knowledge [SCK]) y Conocimiento del Horizonte Matemático (en inglés, Horizon Content Knowledge [HCK]). El segundo subdominio PCK contiene tres subdominios que son: Conocimiento del Contenido y estudiantes (CC-Es) (en inglés, Knowledge Content and Students [KCS]), Conocimiento del Contenido y enseñanza (CC-En) (en inglés, Knowledge

[13] SHULMAN, Lee S. Those who understand knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), p. 4-14, 1986.

of Content and Teaching [KCT]) y Conocimiento Curricular (CC) (en inglés, Knowledge of Content and Curriculum).

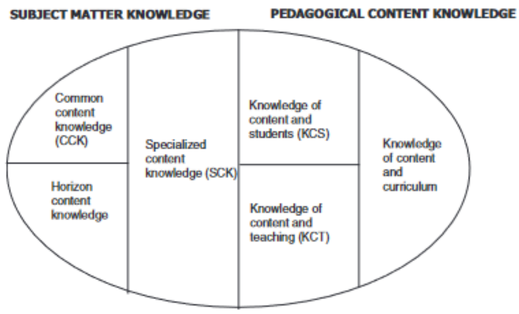


Figura 1- Dominios del modelo MKT. Fuente: BALL *et al.* [14][15]

Conocimiento del Horizonte Matemático

Existen muchas investigaciones donde se analiza cada una de las vertientes del modelo MKT, una investigación muy relevante lo realiza Sosa (2011), en donde hace un análisis a profundidad de cada uno de los subdominios de este modelo, aclarando que: "además, falta profundizar más en todos los subdominios y posiblemente más en aquellos de los que apenas obtuvimos información, por ejemplos, el CC y el HM[16]" (SOSA, 2011, p. 490)[17].

Martínez y colaboradores centraron su investigación en la importancia del conocimiento matemático que evidencia el profesor durante las etapas educativas, tomando como referencia el modelo del MKT[6]. Considerando como punto de análisis uno de los subdominios de este modelo es que el Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK), en el cual les permitió atender la problemática de la transición desde la perspectiva del conocimiento del profesorado. Esto es:

> Uno de los subdominios de dicho modelo, el Conocimiento del Horizonte Matemático, nos parece particularmente vinculado a nuestro problema de investigación. Esta es la razón por la cual hemos profundizado en el estudio de esta componente tratando de identificar manifestaciones de presencia o ausencia de este

[14] Nota: Esta figura es mencionada como Figure 5 [Figura 5] en la cita Ball et *al.* (2008)

[15] BALL Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. 2008. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education,* 59 (5), p. 389-407, 2008, p.403.

[16] Las insignias CC significa Conocimiento Curricular y HM significa Horizonte Matemático.

[17] SOSA, Leticia. *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos.* Tesis doctoral, Universidad de Huelva, Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía, Huelva, España. 2011.

> conocimiento a través de la observación y análisis de la práctica de profesores de primaria y secundaria[18]

Algunas investigaciones describen al HCK: "[…] as the place where advanced mathematical knowledge meets school curriculum" [(…) como el lugar donde las matemáticas avanzadas se encuentra con el currículo escolar][19] . Otras explican que el HCK es un conocimiento que da: "A sense of the mathematical environment surrounding the current "location" in instruction" [Un sentido del entorno matemático que rodea el actual "localización" en la instrucción][20] . Algunas describen que el HCK es un saber que "[…] they also need to have a broad perspective of the discipline and a sense of what is still to come" [(…) también necesitan tener una perspectiva amplia de la disciplina y un sentido de lo que está por venir][21] .

Se considera que estos elementos del HCK, permiten en esta investigación analizar en el profesor de matemáticas de nivel superior los saberes de los conceptos matemáticos que se ejecutan en su práctica docente, así como facilitar un sentido de ubicación de este conocimiento en un contexto de nivel superior por la especificidad de la disciplina. Dado que "[…] can support teachers in hearing students' mathematical insights, orienting instruction to the discipline, and making judgments about what is mathematically important." [(…) puede ayudar a los maestros a escuchar las percepciones de los estudiantes, orientando la instrucción en la disciplina, y hacer juicios sobre lo que es matemáticamente importante].[22]

Otro motivo por el cual se considera al conocimiento del horizonte matemático como foco de estudio en esta investigación es porque está considerado en un contexto de nivel superior, especificado desde la mirada de

---

[18] MARTÍNEZ, M.; GINE, Climent; FERNANDEZ, L.; FIGUEIRAS, Lourdes; DEULOFEU, Jordi. El conocimiento del horizonte matemático: Más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro**.** *Investigación en Educación Matemática XV,* p. 429 – 438, 2011.

[19] ZAZKIS Rina; MAMOLO Ami. Recoceptualizing knowledge at the mathematical horizon*. For the learning of mathematics.* 31(2), p. 8-13, 2011, p.9.

[20] BALL, Deborah Loewenberg.; BASS, Hyman. With an eye on the mathematical horizon. Know mathematics for Teaching to learner´s mathematical futures. En: *Paper presented at the 43rd Jahrestagung der Gessellschaft fur Didaktik der mathematik*, Oldenburg, Germany, p.6, 2009.

[21] WASSERMAN Nick; STOCKTON Julianna Conelly. Horizon content knowledge in the work of teaching: A focus on plannig. *For the Learning of Mathematics*. 33(3), p. 20-22, 2013, p.20.

[22] JAKOBSEN, Arne; THAMES, Marck Hoover; RIBEIRO, Miguel; DELANEY, Sean. Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. En: ICME (Ed*.), 12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME).* Seúl: ICME, 2012, p. 4635 – 4644, p. 4636.

Zazkis que reconoce al HCK [{…} como el lugar donde el conocimiento matemático avanzado se encuentra con el currículo escolar][23] Otra razón es porque el principio de inducción matemática es un conocimiento que presenta una riqueza en su transversalidad de los conceptos matemáticos, especificado desde la mirada de Martínez que describe al HCK como: "[…] una visión global de la educación matemática de los estudiantes, de manera que pueda ser utilizada por el profesor al enseñar matemáticas en el aula". [24] Partiendo de la relevancia que yace de este subdominio del HCK, algunas investigaciones han:

> […] concluido una caracterización del Conocimiento del Horizonte Matemático en términos de conexiones matemáticas que parecen fundamentales desde el punto de vista de la construcción del significado de los contenidos matemáticos escolares en términos de continuidad. [19]

Por otro lado, se determinan e identifican tres caracterizaciones del HCK en términos de conexiones matemáticas en la construcción de contenidos matemático. "Em especial, o padrão do processo tratado como conexões destaca a possibilidade de os alunos conectarem ideias matemáticas para construírem um entendimento mais profundo e duradouro da Matemática" [En particular, el patrón de proceso tratado como conexiones destaca la posibilidad de que los estudiantes conecten ideas matemáticas para construir una comprensión más profunda y duradera][25] . En donde: "Estas conexiones son de diferente naturaleza e implican enlaces hacia el interior de un mismo concepto (intraconceptuales), entre ideas o conceptos matemáticos diferentes (interconceptuales) y entre conocimientos previos y futuros (temporales)"[26]

Una aportación muy importante lo sustenta Sosa, donde describe una matización del modelo del MKT en nivel bachillerato, y con él una serie de descriptores o indicadores para identificar y comprender los distintos subdominios

---

[23] ZAZKIS Rina; MAMOLO Ami. Recoceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the learning of mathematics*, 31(2), p. 8-13, 2011, p. 9.

[24] MARTÍNEZ, M.; GINE, Climent; FERNANDEZ, L.; FIGUEIRAS, Lourdes; DEULOFEU, Jordi. El conocimiento del horizonte matemático: Más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. *Investigación en Educación Matemática XV,* p. 429 – 438, 2011.

[25] BORTOLI, Marcelo de Freitas; BISOGNIN, Vanilde. Conexões Matemáticas no Ensino de Progressões Aritméticas de Ordem Superior. *Bolema: Boletim de Educacão Matemática,* v. 37, n.75, p.250-270, jan., 2023, p. 252.

[26] MARTÍNEZ, M.; GINE, Climent; FERNANDEZ, L.; FIGUEIRAS, Lourdes; DEULOFEU, Jordi. El conocimiento del horizonte matemático: Más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. *Investigación en Educación Matemática XV,* p. 429 – 438, 2011.

del MKT. En lo que corresponde al HCK, Sosa describe los indicadores: “Conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo bloque o unidad (cuando la relación es entre conceptos de una misma unidad o bloque el HM es muy cercano al CEC[27])” (SOSA, 2011, p.64). Así como también: “Saber que un contenido está relacionado con otro más general (aunque no aborde esa forma más general en este grupo porque el programa no lo incluye)” (SOSA, 2011, p.64). Por lo anterior expuesto, se postula que esta investigación en el subdominio del HCK ofrece la oportunidad de investigar las acciones que realizan las profesoras de matemáticas en el nivel superior, porque el entorno mismo le exige tener un dominio extenso de la disciplina, un específico vocabulario para el contexto y una concreta razón de los resultados.

Metodología

Para analizar al objeto de estudio, y dadas las características de la investigación, el paradigma que se plantea es el interpretativo, dado que es aquel que permite observar “[…] las percepciones y representaciones de los actores de la investigación”[28] . La metodología que se usa es el estudio de caso dado que es: “El estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes”[29] . Por tal motivo, se concluyé que en esta investigación se considera como un estudio de caso intrínseco, ya que “no nos interesa porque con su estudio aprendamos sobre otros casos o sobre algún problema general, sino porque necesitamos aprender sobre ese caso particular. Tenemos un interés intrínseco en el caso, y podemos llamar a nuestro trabajo estudio intrínseco de casos”.

De esta forma, para analizar la particularidad de esta investigación, se selecciona a dos profesoras frente a grupo de un entorno de nivel superior, Aby y Lore (seudónimos). Teniendo las siguientes características: i) Tituladas de una escuela de nivel superior de las carreras en la Licenciatura en Matemáticas o carrera afín, ii) Experiencia docente menor a 5 años, iii) Docente frente a grupo,

[27] Las insignias CEC significa Conocimiento Especializado del Contenido.
[28] SÁNCHEZ, José. Paradigmas de Investigación Educativa: De las leyes subyacentes a la modernidad reflexiva. *ENTELEQUIA, Revista interdisciplinar,* n. 16, p. 91- 102, 2013, p. 95.
[29] STAKE, Robert E. *Investigación con estudio de casos.* Segunda edición. Madrid: Ediciones Morata, S.L., 1999.

teniendo por lo menos una materia de la especialidad de matemáticas en alguna carrera de áreas de ciencia, físico matemático, iv) Trabajar en un entorno de nivel educativo superior. Todas estas características, conjunto con los instrumentos de análisis (grabaciones de aula, notas de campo y una entrevista docente semiestructurada), proporciona al estudio una profundidad con respecto del subdominio HCK del modelo MKT.

Es importante señalar que en esta investigación se utiliza un modelo de análisis para organizar la información, este modelo es una adaptación que hizo Sosa (2011) al modelo de Ribeiro [30], dado que este modelo analiza el MKT puesta en acción. Este modelo consiste en formar "[...] episodios fenomenológicamente coherentes regidos por un objetivo declarado o interpretado por el investigador (referente a lo que el profesor pretende enseñar en la clase y moldeado por las acciones que el profesor desarrolle para la enseñanza)" (SOSA, 2011, p.52). La figura que muestra la adaptación que hizo Sosa (2011) para este modelo de Ribeiro, se describe en el Cuadro 1.

Esta adaptación contiene los siguientes elementos, como primera parte se tiene la notación: [i, j] indica la clase i y el episodio j que corresponde a alguna actuación específica en clase. Como segunda parte se describe el objetivo general que se pretende enseñar desde la mirada del contenido matemático. Como tercera parte se describe el evento que funge como causa de inicio de este episodio seleccionado que ha sido transcrito, a esta acción se le llama evento desencadenante. Como cuarta parte se describe la identificación de los conocimientos que se han presentado en las acciones de este episodio, esta parte es un punto primordial dado que se analizan el subdominio del conocimiento del horizonte matemático. Como quinta parte se describe el evento de término que será de utilidad para cerrar el episodio que se selecciona y se analiza.

En la cuarta parte de este modelo se describe el análisis de los conocimientos que se ejecutan en las acciones de un episodio de clase seleccionado, como punto de salida se considera la primera lista de descriptores postulado por Sosa (2011), dado que "[…] en este tipo de estudios cualitativos es

[30] RIBEIRO, Carlos Miguel. From modeling the teacher practice to the establishment of relations between the teacher actions and cognitions. En: JOUBERT, Marie (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics November 2008*, Londres: British Society for Research into Learning Mathematics, 28(3), p. 102 – 107, 2008.

muy importante exigirnos rigor en el análisis de la información para robustecer la credibilidad de los resultados de la investigación” (SOSA, 2011, p. 61). Por lo que, en los descriptores (denominados indicadores) evidenciados en esta investigación, se analizan los saberes adquiridos en términos del HCK que se reconocen en la práctica docente de estas profesoras de nivel superior.

Las características de la materia en el cual se observa y se realiza las transcripciones de clase es en la materia Álgebra A, cuya ubicación curricular se encuentra en el primer semestre de la Facultad de Ingeniería de una entidad de nivel superior. El contenido matemático que se seleccionó para analizar la práctica docente de ambas profesoras es el principio de inducción matemática.

Cuadro 1. Modelo de análisis de las clases transcritas, considerando la adaptación de Sosa (2011) al modelo de Ribeiro (2008).

Fuente: SOSA (2011)

Subdescriptores
Evento de término: Evento que funciona como causa de término de ese episodio.
[i.j.k] Descripción del subepisodio. (línea de inicio – línea de fin)
Objetivo particular: Identificación del objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor.
Evento desencadenante: Evento que funciona como causa de inicio del subepisodio.
[A, i.j.k] Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.
Conocimientos:
Identificación de los conocimientos del profesor evidenciados durante ese subepisodio.
CCC
Subdescriptores
CEC
Subdescriptores
HM
Subdescriptores
CC-Es
Subdescriptores
CC-En
Subdescriptores
CC
Subdescriptores
Evento de término: Evento que funciona como causa de término de ese subepisodio.
[i.j] Descripción del episodio. (línea de inicio- línea de fin)
Conocimientos:
Identificación de los conocimientos del profesor evidenciados durante ese episodio.
Conocimiento Común del Contenido (**CCC**)
Subdescriptores
Conocimiento Especializado del Contenido (**CEC**)
Subdescriptores
Horizonte Matemático (**HM**)
Subdescriptores
Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (**CC-Es**)
Subdescriptores
Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (**CC-En**)
Subdescriptores
Conocimiento Curricular (**CC**)

Análisis y resultados

Dado que el grosor del análisis es amplio y extenso, se presentan los resultados potencialmente más significativos de la investigación en las secciones 4.1.1, 4.1.2, 4.2.1, 4.2.2 y 4.3, considerando los instrumentos descritos en la metodología. Este análisis de resultados se desarrolla en 3 momentos en donde en la Figura 2, se muestra un mapa mental de los tres momentos que se ejecutan en la investigación.

El primer momento presenta la evidencia del análisis de los indicadores encontrados haciendo uso del modelo de Ribeiro correspondiente a cada una de las dimensiones del HCK (temas, prácticas y valores), así como también una tabla para cada ilustración donde se describe la evidencia, el indicio, la oportunidad y el conocimiento emergente de cada uno de los indicadores. En este primer momento, se considera para cada profesora (Aby y Lore) un total de 3 sesiones, donde cada sesión contiene 3 clases (acercamientos), obteniendo un total de 153 indicadores, esto es 17 indicadores para los 9 acercamientos. En estos acercamientos se evidencian los indicadores con respecto del HCK en sus tres conocimientos: con respecto de los temas HCK (T), con respecto de las prácticas HCK(P) y con respecto de los valores HCK(V), obteniendo 51 indicadores, de donde 18 corresponden para HCK (T), 18 para HCK (P), 15 para HCK (V).

El segundo momento, presenta tres mapas conceptuales donde se identifican las conexiones en sus tres vertientes: conexión intraconceptual, conexión interconceptual y conexión temporal, obteniendo 27 conexiones, de donde 9 corresponden para las conexiones intraconceptual, 9 para las conexiones interconceptual y 9 para las conexiones temporales.

El tercer momento es el punto medular de la investigación, ya que se evidencia la relación que sustenta las conexiones del HCK con sus tres dimensiones del conocimiento del horizonte matemático. Esta relación presenta los resultados del análisis donde se analiza las similitudes y diferencias conceptuales de las prácticas docentes de las profesoras, donde se tienen 54 relaciones (similitudes y diferencias) de los cuales 18 corresponden a las conexiones intraconceptuales, donde 6 corresponden a HCK (T), 6 corresponden a HCK (P) y 6 corresponden a HCK (V). Asimismo 18 corresponden a las conexiones interconceptuales en donde 6 corresponden a HCK (T), 6 corresponden a HCK (P) y 6 corresponden a HCK (V).

Finalmente 18 corresponden a las conexiones temporales en donde 6 corresponden a HCK (T), 6 corresponden a HCK (P) y 6 corresponden a HCK (V). Para describir esta relación se hace uso de tabla de análisis, esto es la Tabla 1, donde contiene el tipo de conexión del HCK (interconceptual, intraconceptual y temporal), el tipo de dimensión del HCK (temas HCK (T), practicas HCK (P), valores HCK(V)), el tipo de relación (similitudes y diferencias), el tipo de conocimiento (previos y futuros) con respecto al principio de inducción matemática.

Figura 2. Mapa mental de los tres momentos del análisis de datos. Fuente: Elaboración propia.

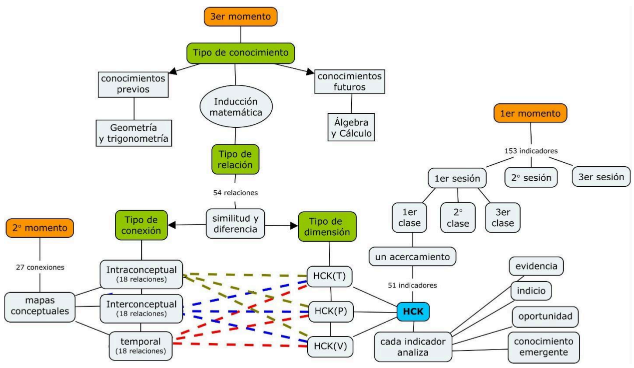


Tabla 1. Tabla de resultados de análisis de la práctica docente de Aby y Lore.

	Tipo de conexión				
	Conceptos				
Tipo de dimensión	previos		futuros		**Tipo de conocimiento**
	Geometría y Trigonometría	**Principio de inducción matemática**	Álgebra B	Cálculo A	
Similitudes	ST1		ST2	ST3	Acciones (evidencias de la práctica docente)
Diferencias	DT1		DT2	DT3	
Tipo de relación					

Fuente: Elaboración propia.

Primer momento del análisis de la maestra Aby

En esta sección se describe en el Cuadro 2, los resultados que se obtienen del primer momento del análisis en donde, haciendo uso del modelo de Ribeiro de la clase 1 de la sesión 1 de la maestra Aby (diálogo que se muestra a continuación); se describe el análisis del subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Aby: A ver dejen de escribir un poquito, necesito que me pongan atención. Les contaré una historia, un maestro les puso una actividad en clase a sus alumnos, y entonces les dijo que sumarán el 1, más 2, más 3 hasta el cien. Entonces los alumnos comenzaron a sumar 1+2 es 3, 3 + 3 es 6, y así sucesivamente. Entonces uno de los alumnos observo el primero y el último número y los sumo y esto le daba 101, y si sumaba el 2 y el 99 (penúltimo) le daba 101, y si sumaba 3 y el 98 (antepenúltimo) le daba 101, y así sucesivamente. Entonces se dijo entonces voy a formar parejas, si tengo 100 números, entonces ¿cuántas parejas serán?
Alumno: 50
Aby ¿Y cuánto dará la suma de todos los números?
Alumno: 50 por 101
Aby: ¿Por qué?
Alumno: Porque son 50 parejas y son 101 números los que tenemos que sumar
Aby: (la maestra continua con la historia que inicio) Entonces el maestro comenzó a sumar con el resto de sus alumnos 1 + 2 + 3 + 4 +… hasta 100 y se dieron cuenta que le daba lo mismo que había obtenido el alumno. Y de esta manera tenemos un ejemplo del principio de inducción matemática, Por ejemplo, en el examen psicométrico que les realizaron en la uni para ingresar les pusieron un sinónimo de ello, al solicitarles que encontraran el comportamiento de algunos números, como sucesiones, por ejemplo, si ustedes tenían unos ciertos números, ¿ustedes que buscaban?
Alumno: Encontrábamos un patrón, una fórmula.
Aby: Esto nos indican que una fórmula, nos dará un comportamiento más rápido para encontrar un número más grande. Por ejemplo, si ustedes quieren encontrar la suma de los primeros 25mil números enteros, entonces usando la formula $1+2+3+\ldots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}$ *¿que valor dará?*
Alumno:
$1+2+3+\ldots+25000=\frac{25000\ (25000+1)}{2}=312,512,500$
Aby: Entonces para eso nos sirve la formula, para encontrar la suma de un número concreto de números. (Diálogo entre la profesora Aby y el alumno, 2018*).*

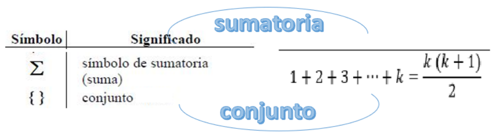
Cuadro 2. Análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1 de Aby. Fuente: Elaboración propia.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1. [1.1] Descripción del episodio (21-24) **Objetivo general:** Describe el uso y manejo de notación matemática, así como la relación que tienen los procedimientos matemáticos del principio de inducción matemática. **Evento desencadenante:** Inicia la clase presentado un ejemplo introductorio de inducción matemática. Se presenta la especificidad del principio, además del cuidado del uso y manejo de la notación matemática. [A, 21.24] Aby presenta un ejemplo introductorio del principio de inducción matemática descrito en el pizarrón. Se hace énfasis en la notación matemática y especificidad de los pasos. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de los temas HCK (V) **Subdescriptores:** Conoce la especificidad de los valores principales al aplicar la demostración por medio del principio de

inducción matemática.
Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el principio de inducción matemática.
Evento de término: Aby concluye en mencionar la importancia de reconocer el uso y manejo de la notación matemática, así como en el manejo de esta notación en otras áreas de conocimiento.

En la Tabla 2 se muestra la evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de uno de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 1 de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

Tabla 2 - Tabla de resultados de análisis de la práctica docente de Aby donde se muestra la evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente con la dimensión de los valores.

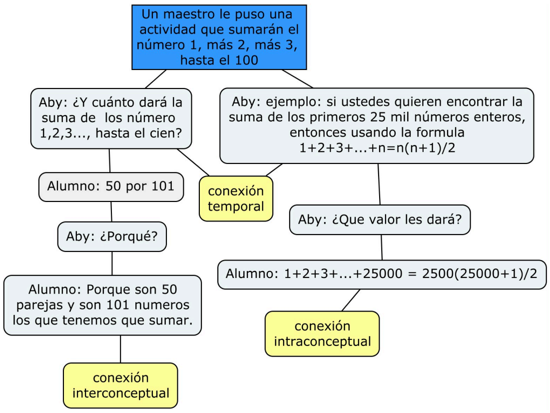
Subdescriptor HCK (V)	**Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el principio de inducción matemática.**
Evidencia	Se evidencia que Aby conoce la precisión algebraica que se requiere para poder aplicar el principio de inducción matemática, dado que describe a sus estudiantes como se demuestra para la suma de los n-números naturales. Esto es para n = 1, se tiene $1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$ Entonces; se cumple para n = k, esto es: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k\,(k+1)}{2}$ Por lo tanto, es válido para n= k+1.l.
Indicio	Se da indicio que Aby conoce y sabe determinar el lenguaje matemático al desarrollar el ejercicio. Así como el uso adecuado de la representación matemática. Se considera que se presenta un indicio dado que está usando la simbología matemática común en la teoría de conjuntos.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Aby conoce la simbología matemática y hace uso de la notación matemática. 
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Aby usa un ejemplo introductorio para el principio de inducción matemática, presenta los valores centrales, así como la precisión y cuidado del lenguaje matemático. Aby propicia ejemplos donde se manifiestan estos elementos, tal es el caso de las funciones trigonométricas donde se utiliza el principio de inducción matemática para utilizar sus identidades básicas. Tal y como se muestra en el siguiente ejemplo: Probar la identidad $\cos cos\ \alpha \cos cos\ 2\alpha \cos cos\ 4\alpha \ldots \cos cos\ 2^{n}\alpha = \frac{sen\ 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\ sen\ \alpha}$ Solución. 1) La fórmula se cumple n = 0, ya que $\cos cos\ \alpha = \frac{sen\ 2\ \alpha}{2\ sen\ \alpha}$ 2) Supóngase que la fórmula se cumple para n = k; es decir, $\cos cos\ \alpha \cos cos\ 2\alpha \ldots \cos cos\ 2^{k}\alpha = \frac{sen\ 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\ sen\ \alpha}$ Entonces debe mostrarse que la fórmula también se cumple para n = k+1. En efecto, $\cos cos\ \alpha \cos cos\ 2\alpha \ldots \cos cos\ 2^{k}\alpha \cos cos\ 2^{k+1}\alpha = \frac{sen\ 2^{k+1}\alpha coscos\ 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\ sen\ \alpha} = \frac{sen\ 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\ sen\ \alpha}$

Fuente: Elaboración propia.

Segundo momento del análisis de la maestra Aby

En este apartado, se representan el mapa mental de las tres conexiones matemáticas que se evidencian en la práctica docente de Aby. En la Figura 3, se muestran las conexiones intraconceptuales, interconceptuales y temporales de la clase 1 de la sesión 1, de Aby mediante el subdominio HCK del modelo MKT.

Figura 3. Mapa mental de las conexiones intraconceptuales, interconceptuales y temporales. Fuente: Elaboración propia.



En esta figura anterior se presenta el conocimiento del horizonte matemático como un enfoque particular de cómo se relacionan con algunos temas presentados en la práctica docente de Aby con otros temas que se presentan en el currículo. Aby presenta el tema de inducción matemática, en el cual se evidencia algunas acciones durante el análisis. La primera acción que se presenta durante la clase es indagar los conocimientos previos de sus estudiantes, donde describe en el pizarrón los números naturales del 1, 2, 3…,100. Y enfatiza la pregunta: ¿Cuánto dará la suma de los primeros 100 números naturales?, en donde Aby justifica la necesidad y él porqué es importante sumar de una manera controlada y especifica los primeros números naturales, y la importancia de conocer la naturaleza matemática de sus propiedades que debe cumplir (asociativa, conmutativa, distributiva, existencia del neutro).

Como segunda acción, Aby describe la fórmula matemática para sumar los números naturales, el cual se determina como: $1 +2 +3 + ... + \eta = \eta (\eta+1) /2$. Se presentan las premisas que determinan el principio de inducción matemática, en donde se cumple para n = 1 (caso inicial), y se asegura que se cumple para n= K (caso finito dentro de la infinitud de la demostración), y se verifica para n= k+1 (caso infinito), en este momento crítico del análisis de la práctica docente de Aby, se describen las conexiones de este procedimiento, esencia principal de este concepto, a este proceso se le llama una *conexión intraconceptual*.

Otro elemento de esta segunda acción se especifica cuando 1 +2 + ... + η = η(η+1) /2 se representa como la suma de los n-números naturales. Aby indaga en sus alumnos el resultado que se obtiene de la suma de los primeros 100 números naturales, algunas de las argumentaciones se presentan cuando se suma el primero y último término, posteriormente el segundo y antepenúltimo término, después el tercero y ante antepenúltimo término, etc., obteniendo siempre como resultado 101. Aby promueve en sus alumnos el uso de la fórmula matemática 1 +2 +3 + ... + η = η (η+1) /2, establece las conexiones entre los conceptos matemáticos entre lo que se está estudiando y lo que se estudiará, a este tipo de conexión se le llama *conexión temporal.*

En la práctica docente con respecto de la explicación del ejercicio $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, Aby corrige los errores efectuados de los estudiantes durante la ejecución de la demostración, estos van desde errores de forma (operatividad en cuando se le agrega el (k+1) -término), hasta errores de fondo (errores comunes de factorización y productos notables). Este proceso permite establecer conexiones con los diferentes conceptos del tema, en el cual se le llama conexión *interconceptual.*

Primer momento del análisis de la maestra Lore

En esta sección se describe en el Cuadro 3, los resultados que se obtienen del primer momento del análisis de la maestra Aby (diálogo que se muestra a continuación); se describe el análisis del subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

> *Lore: Inducción Matemática es un principio matemático que sirve para generalizar. Tú sabes que algo pasa para una cantidad de*

elementos, y deseas saber si va a pasar para una cantidad grande de ellos, como sabes si eso sucederá, a eso se le llama Principio de Inducción Matemática
Alumno: ¿Es una proposición?
Lore: Ahhh, ¡Proposición! No, quiere decir, por ejemplo, si tengo una pieza y la aviento, digo ¡Hay se va a caer! Si tengo dos y la aviento digo, ¡Ah, también, se van a caer! Entonces supongo la hipótesis de inducción que describe, que se cumple para una cierta cantidad de objetos, que, al aventarlos, ¡ahhhh! se van a caer. Entonces la hipótesis de inducción supone que se cumple para una cierta cantidad, y lo que se demuestra es que se cumple para el que le sigue. Y eso se demuestra, y si se demuestra se concluye que se cumple para una cierta cantidad. ¡Y ya, eso es todo!
Lore: Propongamos un ejemplo, suponemos que se cumple para todo n > 0, que:

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2\left(2^n - 1\right)$$

Primero verifico que se cumple para n =1
Dos, asumo que se cumple para n =k
Tres, ¿Que quiero hacer?, quiero demostrar que para un valor de k+1 se cumple también, esto es:

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2\left(2^{k+1} - 1\right)$$

Se checa que el valor de n es el que cambia, primero fue 1, después 2, después 3 y después n.
Alumno: ¿El valor de la n se tiene que cambiar por el valor de K?
Lore: Si y después cambiar al valor de k+1
Alumno: ¿Hasta cuantos valores debe de llegar el valor de K?, ¿Son números infinitos?, ¿Son reales?
Lore: No son números enteros, y se llega hasta k+1
Lore: Buena para poderlo demostrar, se realiza por pasos.
Paso uno se cumple para n=1, esto es: $2 = 2\left(2^1 - 1\right)$

Después para n=k; esto es:

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k = 2\left(2^k - 1\right)$$

Hasta aquí, yo utilice la hipótesis de inducción que es el paso 2. Si yo no utilizo mi hipótesis de inducción, significa que mi demostración no está correcta. Hasta aquí, ya la utilicé.
Lore: De aquí quiero llegar a esta parte

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2\left(2^{k+1} - 1\right)$$

Entonces tomamos esta parte; (señala la hipótesis de inducción)

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2\left(2^k - 1\right) + 2^{k+1}$$

Y empezamos a multiplicar. Encontrando $2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$
Alumno: Porqué queda $2^{k+1} - 2$*, debería ser* $4^k - 2$*, se supone que estamos multiplicando.*
Lore: ¡Mande!
Alumno: no tiene potencia, entonces el 2 multiplica a 2^k*, y nos queda* 4^k
Lore: ¡No!, Porqué si se tiene misma base, por consecuencia se

suman los exponentes, $a^n * a^m = a^{n+m}$ *Esto es:* $2 * 2^k = 2^{k+1}$ *¡Va!*
Alumno: ¿Cuándo se multiplican las bases, entonces se suman los exponentes?
Lore: Por ejemplo, si tienes $a^2 * a^3 = a^{2+3}$*. Se suman las potencias, porque tienen misma base, en este caso a. Lo mismo sucede con* 2 *y* 2^k*, uno tiene potencia 1 y el otro tiene potencia k, por consecuencia se suma 1 + K, quedando* 2^{k+1} *¡Va!*
Entonces $2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$ *es igual a* $2\left(2^{k+1}\right) - 2$
Ahora, en estos términos se puede factorizar el número 2, quedando $2(2^{k+1} - 1)$ *y me queda a lo que quería llegar.*
Alumno: ¿Por qué maestra?, ¿No tienen la misma potencia?
Lore: Porque, se tienen dos términos y el término común es el número 2 en ambas partes. (Diálogo entre la profesora Lore y el alumno, 2018).

Cuadro 3 - Análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1 de Lore
Fuente: Elaboración propia.

Descripción del análisis del HCK (V) en lo que corresponde a la clase 1 de la sesión 1. [1.1] Descripción del episodio (1-19) **Objetivo general:** Ubicar el concepto de inducción matemática, demostrando la sumatoria de las potencias del número 2. **Evento desencadenante:** Iniciar la clase presentando un ejemplo de las potencias del número 2, tomando como referencia los ejemplos anteriores, donde se describen el uso del método de inducción matemática. [A, 1.19] Lore presenta un ejemplo de la sumatoria de las potencias del número 2 describiéndolo en la pizarra. Se hace énfasis en los pasos del método inductivo para evidenciarlo con algunas reglas de factorización y productos notables, así como de potenciación. **Conocimientos:** Conocimiento del horizonte matemático de las prácticas **HCK (V)** Subdescriptores; Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2. Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el concepto de la representación de la suma de las potencias del número 2. **Evento de término**: Lore termina de explicar la importancia de reconocer los pasos que implica el método inductivo (en este caso la sumatoria de las potencias del número 2), parte sustancial para utilizar el proceso de inducción matemática.

En la Tabla 3 se muestra la evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente de uno de los subdescriptores de la clase 1 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT donde se hace presente la dimensión de los valores.

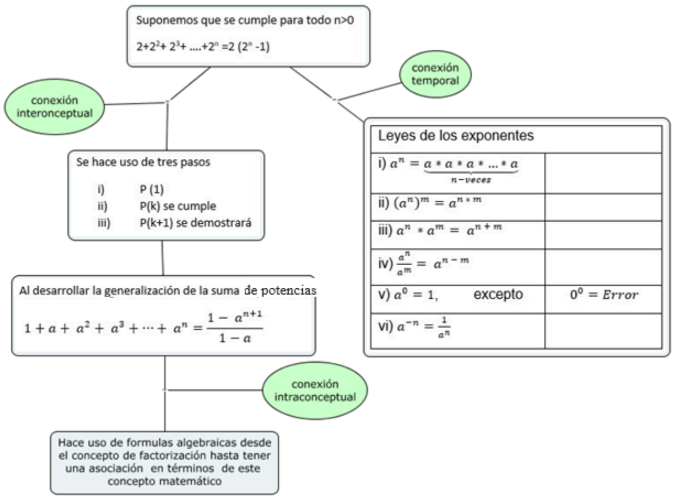
Tabla 3 - Tabla de resultados de análisis de la práctica docente de Lore donde se muestra la evidencia, indicio, oportunidad y conocimiento emergente con la dimensión de los valores

Subdescriptor HCK (V)	**Conoce la especificidad de los valores principales al desarrollar el principio de inducción matemática en la suma de las potencias del número 2.** **Conoce la precisión y el cuidado del lenguaje matemático que se usa en el principio de inducción matemática en la suma de las potencias del número 2.**

Evidencia	Se evidencia que Lore conoce el principio de inducción matemática, ya que se establece una relación entre la suma de los números naturales con la representación de la suma de las potencias del número 2. Se considera que está asociación se establece ya que el tema principal es el mismo “suma de números enteros”, pero las propuestas son distintas, por un lado, la suma de 1+2+3+4+…+n, y por otro lado $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n.}$
Indicio	Se da indicio que Lore conoce y sabe determinar la precisión y lenguaje matemático al describir de forma tácita la notación matemática que representa la suma de los números naturales, así como la representación matemática de la suma de las potencias del número 2.
Oportunidad	Se da una oportunidad ya que Lore conoce y sabe usar la notación y simbología matemática que está usando para demostrar el principio de inducción matemática, brindando la oportunidad de indagar en las propuestas de las sumas de los términos de potencias de 3, o en las potencias de 4, o de las potencias de n.
Conocimiento emergente	Se presenta un conocimiento emergente dado que Lore hace uso de una estrategia para la representación de la suma de las potencias del número 2. Conforme al análisis se permite indagar la relación matemática que sustenta con la representación general de su sumatoria. $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = 2\,(2^n - 1)$

Segundo momento del análisis de la maestra Lore

Esquema 10. Mapa mental de las conexiones temporales, intraconceptuales e interconceptuales de la clase 1 de la sesión 1 de Lore mediante el subdominio HCK del modelo MKT.



En el esquema anterior se describen las conexiones intraconceptuales, interconceptules y temporales de la sesión 1 de la clase 1 de la práctica docente de Lore. En este esquema se presenta al conocimiento matemático como un enfoque particular de cómo se están relacionando con los distintos temas revisados en clase con otros temas que se presentan a través del currículo. En el caso de Lore se está revisando el tema de inducción matemática, las transcripciones de las grabaciones de clase manifiestan una **conexión interconceptual** dado que en la expresión algebraica $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n} =$

$2(2^n - 1)$ se hace uso de tres pasos para poder generalizar que se cumple para cualquier número natural n lo que evidencia conexiones entre el concepto de “sumatoria de potencias de número 2” con el concepto de “la generalización de una expresión matemática”.

Ahora bien, dado la naturaleza del ejercicio se hace presente una **conexión temporal** dado que en la expresión $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + . . . + 2^n = 2(2^n - 1)$ se hace uso de las leyes de los exponentes, para poder desarrollar y aplicar el método inductivo. En lo que compete a la sumatoria de potencias del número 2, se hace uso de leyes de potencias, que son necesarias para entender la naturaleza matemática de la demostración.

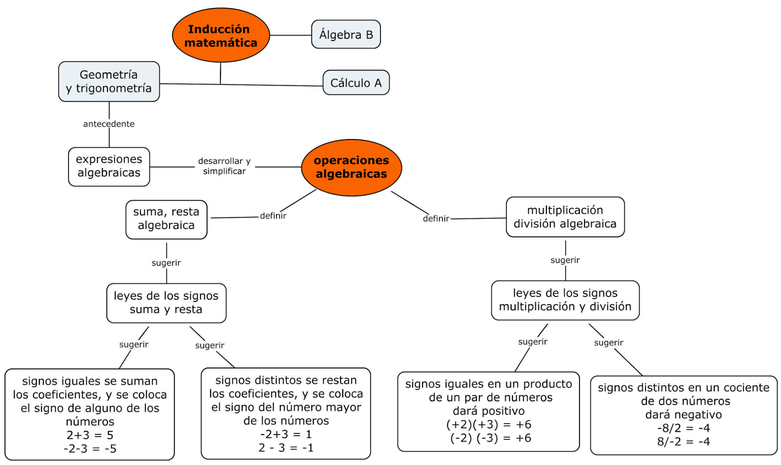
También se hace presente una **conexión intraconceptual** dado que en la representación de la suma de potencias del número 2, se está evidenciando el uso de fórmulas matemáticas álgebraicas, considerando desde el concepto de factorización hasta tener una asociación en términos de este concepto matemático. Por lo cual el tener la expresión $1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ muestra la esencia de la aplicación de estos conceptos.

Tercer momento del análisis. **Resultados y conclusiones de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión intraconceptual y la dimensión del HCK (T)**

En este bloque se presentan los resultados y conclusiones más representativas de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión intraconceptual y la dimensión del HCK (T). El tema principal es inducción matemática, se evidencia que se generan conexiones intraconceptuales entre los conceptos que se revisan en las materias de Algebra B, Cálculo A y Geometría y Trigonometría como se describe la Figura 4.

En esta Figura, se presenta la descripción de las relación de los conceptos del conocimiento del horizonte matemático en las dimensiones HCK (T). Donde en las transcripciones de las grabaciones de la practica docente de Aby y Lore presentan conexiones similares entre las ideas principales del principio de inducción matemática, tal como el uso frecuente del concepto de expresiones algebraicas, operaciones algebraicas, que incluye la suma, resta, multiplicación y división algebraica de términos. Así como también conocimientos previos básicos similares como las leyes de los signos para la multiplicación y división, así como las leyes de los signos para la suma o resta.

Figura 4 - Conexiones intraconceptuales de la relación de la practica docente de Aby y Lore



Fuente: Elaboración propia.

Dado la Figura 4, en la Tabla 5 se presentan los resultados más representativos de las similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del principio de inducción matemática, en lo que corresponde a la dimensión del conocimiento matemático de los temas HCK(T).

Tabla 5- Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del principio de inducción matemática dado el Figura 4 con respecto del HCK(T)

Conexiones Intraconceptuales				
	Conceptos			
HCK (T)	previos		futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Principio de Inducción matemática**	Àlgebra B	Cálculo A
Similitudes	Aby y Lore presentan el uso de las expresiones algebraicas para llegar a la demostración inductiva para el caso n=k+1		Aby y Lore presentan el uso de expresiones algebraicas para conectarlo con el concepto de factorización y producto notable.	Aby y Lore presentan el uso del concepto de ecuación algebraica y su desarrollo matemático en la simplificación de

				expresiones algebraicas
Diferencias	Aby y Lore presentan formas distintas de plantear el principio de inducción matemática , dado que Aby hace uso de una historia hipotetica de un maestro y sus alumnos para presentar la suma de los 100 primeros numeros naturales, mientras Lore hace uso de las leyes de los exponentes, para encontrar la suma de los numeros naturales de la forma 2^n .		Aby y Lore presentan conocimientos diferentes con respecto del tema de inducción matemática. Aby lo orienta hacia el proceso intuitivo de la suma inmediata de los numeros naturales, mientras Lore confronta su conocimeinto hacia la suma de potencias de 2.	Aby y Lore presentan conocimientos distintos con respecto del principio de inducción matemática, Aby lo vincula con el proceso mental de contar numeros de forma organizada. Lore lo orienta a la importancia que tiene para el alumno entender la resolución algebraica de la expresión $2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$

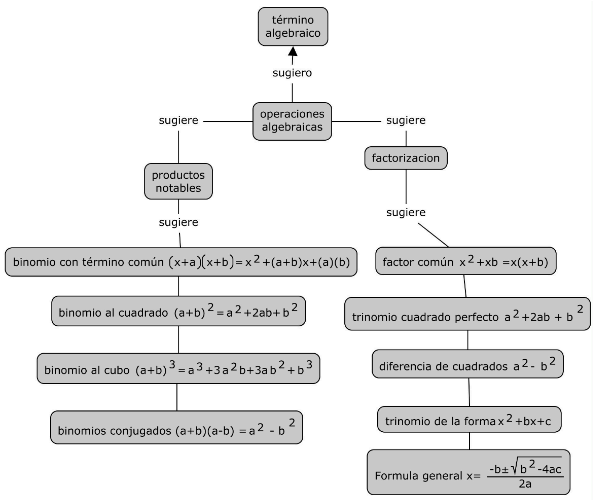
Fuente: Elaboración propia.

Resultados y conclusiones de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión interconceptual y la dimensión del HCK (P)

En este bloque se presenta los resultados y conclusiones más representativos de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión interconceptual y la dimensión del HCK (P). El tema principal es inducción matemática, se evidencia que se generan conexiones interconceptuales entre los conceptos término algebraico, operaciones algebraicas, productos notables y factorización como lo describe la Figura 5.

En esta Figura, se presenta la descripción de la relacion de los conceptos del conocimiento del horizonte matemático HCK (P). En donde derivado de las transcripciones de las grabaciones de la práctica docente de Aby y Lore, se presentan evidencias similares entre las conexiones de las ideas principales del principio de inducción matemática, tal como el uso frecuente de los conceptos de expresiones algebraicas, operaciones algebraicas, leyes de los signos y leyes de las potencias. Así como tambien similitud entre conocimientos previos tal como la identificación de nombre y fórmula de los casos posibles de productos notables (binomio con término común, binomio al cuadrado, binomio al cubo, binomios conjugados), así como los casos posibles de factorización (factor común, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio de la forma, formula general).

Figura 5 - Conexiones interconceptuales de la relación de la practica docente de Aby y Lore



Fuente: Elaboración propia.

Dado la Figura 5, en la Tabla 6 se presentan los resultados mas representativos de las similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática, en lo que corresponde en la dimensión del conocimiento matemático de las practicas HCK(P).

Tabla 6 - Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del principio de inducción matemática dado el Figura 5 con respecto del HCK(P)

Conexiones Interconceptuales				
	Conceptos			
HCK (P)	previos		futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Principio de Inducción matemática**	Algebra B	Cálculo A
Similitudes	Aby y Lore presentan similitudes en el principio de inducción matemática con respecto del razonamiento y la prueba. Así como el buen uso de las definiciones.		Aby y Lore presentan similitudes en los aspectos del razonamiento matemático con respecto a a la utilización de ejemplos introductorios para explicar el proceso inductivo.	Aby y Lore presentan similitudes en la comunicación matemática ya que hacen uso de de las operaciones algebraicas, con la expectativa del impacto y utilidad que tienen para temas posteriores
Diferencias	Aby y Lore presentan formas distintas en los aspectos de la comunicación, dado que Aby aborda ejercicios introductorios del principio de inducción matemática, y Lore considera ejemplos con mayor dificultad, ya que no es tan obvio calcular la suma de las		Aby y Lore presentan conocimiento diferente en la selección de ejemplos al presentar por primera vez el principio de inudcción matemática. Aby utiliza un ejemplo de exploración inmediata,	Aby y Lore presentan conocimiento distinto en la forma de conocer, crear o producir los temas, dado de Aby presta mayor

potencias de 2.		que se puede resolver con mucha paciencia escribiendo en la libreta los primeros 100 números naturales. Lore hace uso de un ejemplo donde confronta al estudiante en la reflexiòn del uso del concepto de 2^n .	importancia a la forma adecuada de uso que tiene la formula 1 +2 +3 + ... + η = η (η+1) /2 . Mientras Lore hace énfasis en la forma de ejecución algebraico que realiza el alumno en la suma de las potencias de 2.

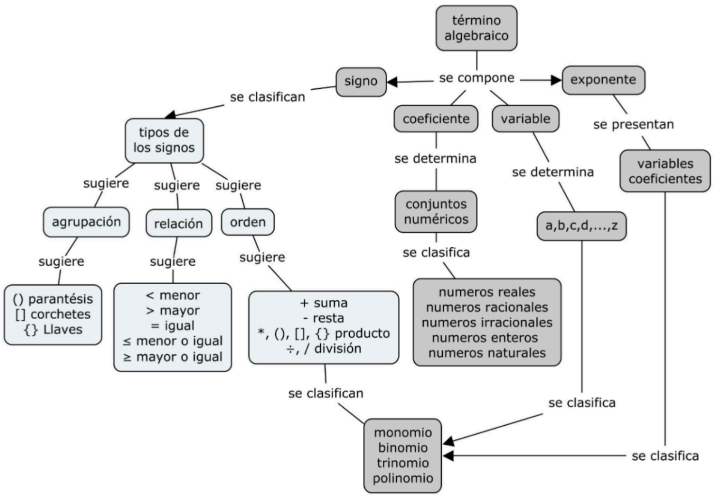
Fuente: Elaboración propia.

Resultados y conclusiones de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión temporal y la dimensión del HCK (V)

En este bloque se presenta los resultados y conclusiones más representativas de la relación (similitud-diferencia) entre la conexión temporal y la dimensión del HCK (V). El tema principal es el principio de inducción matemática, se evidencia que se genera conexiones temporales entre los conceptos de término algebraico, operaciones algebraicas, productos notables y factorización como lo describe la Figura 6.

En esta Figura se presenta la descripción de las relaciones de los conceptos del conocimiento del horizonte matemático HCK (V). Donde en las transcripciones de las grabaciones de la práctica docente de Aby y Lore, se presentan las conexiones entre conceptos matemáticos en diferentes etapas del currículo.

Figura 6 - Conexiones temporales de la relación de la practica docente de Aby y Lore



Fuente: Elaboración propia.

Los conocimientos que evidencian Aby y Lore corresponden a los conceptos de: signo, coeficiente, variable y exponente. En el concepto de signo se tienen los signos de agrupación, de relación y de orden. En el concepto de variable se tienen las variables semejantes y no semejantes. En el concepto de coeficiente se determinan los conjuntos numéricos, donde se hace énfasis en el conjunto de números naturales (tema principal de estudio de Aby y Lore). En el concepto de exponente se determinan de carácter numérico y de variable, en el tipo de variable se determinan de carácter en monomio, binomio, trinomio y polinomio.

Dado la Figura 6, en la Tabla 7 se presentan los resultados mas representativos de las similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del principio de inducción matemática en lo que corresponde en la dimensión del conocimiento matemático de los valores HCK(V).

Tabla 7- Similitudes y diferencias entre los conocimientos previos y futuros del tema de inducción matemática dado el Figura 6 con respecto del HCK(V)

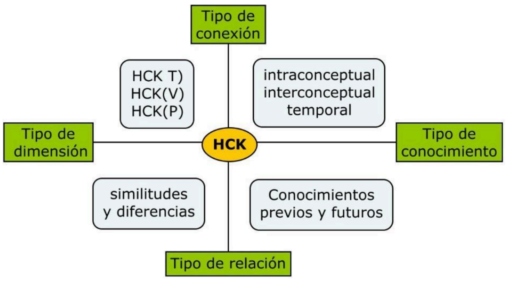
Conexiones Temporales				
HCK (V)	Conceptos			
	previos		futuros	
	Geometría y Trigonometría	**Principio de**	Álgebra B	Cálculo A

Similitudes	Aby y Lore presentan similitudes en el uso del lenguaje matemático, con respecto de las partes que compone un término algebraico (signo, numero, letra y exponente) .	**Inducción matemática**	Aby y Lore presentan similitudes en el uso de la simbología y la notación matemática.	Aby y Lore presentan similitudes en la comunicación matemática del principio de inducción matemático, haciendo énfasis en las premisas que cumple; para n = 1, n= k y n = k+1.
Diferencias	Aby y Lore presentan formas diferentes en guiar las correcciones y argumentaciones matemáticas que presentan durante la ejecución de los ejemplos. Aby hace una corrección del uso que se le da a la fórmula 1 +2 +3 + ... + η = η (η+1) /2, con respecto de localizar la suma de los primeros 25 mil números naturales. Lore hace una corrección a uno de sus estudiantes con respecto del uso adecuado de las leyes de los exponentes; esto es $2^* 2^k$ no es igual a 4^k, esto es igual a 2^{k+1}			

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, desde la Figura 3 hasta la Figura 6, se evidencia esquemáticamente la ruta investigativa que se derivó del análisis de los cuatro tipos de acciones que se desarrollan de la práctica docente de las profesoras, en el cual se ejemplifica en la Figura 7. Este mapa mental muestra un camino metodológico, comenzando con el reconocimiento de los tipos de dimensión, que a su vez va enlazado con el tipo de conexión, para a su vez colocarlo en un tipo de conocimiento, y concluir en el tipo de relación que sustenta ambas profesoras en su práctica docente (Tabla 1). Por lo que sería muy relevante presentar en futuras investigaciones la continuidad de este análisis, dado que solo se presentan los resultados más representativos.

Figura 7 - Mapa mental de los cuatro tipos de acciones del análisis de datos



Fuente: Elaboración propia.

Discusiones finales

En este espacio se hace un apartado a la reflexión crítica con respecto de los aportes que se derivan de esta investigación, dado que el grosor de sus resultados manifiesta una profundidad en el tema del Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK). Se parte de la reflexión del impacto que tiene la obtención de los indicadores con respecto al HCK en el modelo del MKT en el principio de inducción matemática, se describe que este principio se presenta en los contenidos curriculares de estudiantes de nivel superior, con un enfoque en el área de la ciencia. Se determina que este principio es complejo y difícil por la disciplina de demostración que exige su desarrollo. Por lo cual, el que se muestre evidencias de su relación con temas anteriores y posteriores al principio principal es totalmente atractivo, dado que existe una necesidad muy amplia de los profesores por evidenciar que este principio es útil en la formación de sus estudiantes.

Una aportación relevante al campo de estudio de formación de profesores se presenta en los mapas mentales que describen las relaciones intra, inter y temporales con respecto al principio de inducción matemática, ya que por medio de un mapa describe los diálogos más detonantes de la práctica docente, ejercicio que involucra un análisis cualitativo de las clases grabadas, dejando ver en claro las relaciones entre las ideas principales del concepto entre los temas principales del currículo y sus diferentes etapas.

Finalmente, una aportación a la matemática educativa es dejar abierto un abanico de oportunidades para estudiar el HCK desde la mirada de otro concepto matemático. Dado que la selección de este concepto central, equilibrio y dio ruta a la vinculación de otros temas.

Referencias Bibliográficas

BALL Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. 2008. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education***,* 59 (5), p. 389-407, 2008, p.403.

BALL, Deborah Loewenberg.; BASS, Hyman. With an eye on the mathematical horizon. Know mathematics for Teaching to learner´s mathematical futures. En: **Paper presented at the 43rd Jahrestagung der Gessellschaft fur Didaktik der mathematik,** Oldenburg, Germany, p.6, 2009.

BORTOLI, Marcelo de Freitas; BISOGNIN, Vanilde. Conexões Matemáticas no Ensino de Progressões Aritméticas de Ordem Superior. **Bolema: Boletim de Educacão Matemática***,* v. 37, n.75, p.250-270, jan., 2023, p. 252.

JAKOBSEN, Arne; THAMES, Marck Hoover; RIBEIRO, Miguel; DELANEY, Sean. Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. En: ICME (Ed.*),* **12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME)***.* Seúl: ICME, 2012, p. 4635 – 4644, p. 4636.

MARTÍNEZ, M.; GINE, Climent; FERNANDEZ, L.; FIGUEIRAS, Lourdes; EULOFEU, Jordi. El conocimiento del horizonte matemático: Más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro**. Investigación en Educación Matemática XV***,* p. 429 – 438, 2011.

MONTES, Miguel Ángel; CONTRERAS, Luis Carlos; LIÑÁN, María del Mar.; MUÑOZ-CATALÁN, María Cintia; CLIMENT, Nuria; CARRILLO, José. Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. **Revista de Educación**, 367, p. 36-62, Enero-marzo, 2015.

REYES A. M. **Conocimiento especializado de profesores en formación de primaria. Enseñanza del significado razón.** Tesis Doctoral sin publicar, Universidad Pedagógica Nacional Unidad 321 Zacatecas, Zacatecas, 2018, p.62.

RIBEIRO, C. Miguel. From modeling the teacher practice to the establishment of relations between the teacher actions and cognitions. En: M. Joubert (Ed.) **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics November 2008**, Londres: British Society for Research into Learning Mathematics, 28(3), p. 102 – 107, 2008.

ROJAS, Nielka; FLORES, Pablo. El análisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones. En: José Luis Lupiáñez, María C. Cañadas, Marta Molina, Mercedes Palarea, y Alexander Maz (Eds.), **Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática 2011**. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2011, p. 17 -28. p.18.

SÁNCHEZ, J. Paradigmas de Investigación Educativa: De las leyes subyacentes a la modernidad reflexiva. **ENTELEQUIA***, Revista interdisciplinar,* n. 16, p. 91-102, 2013, p. 95.

SHULMAN, Lee S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. **Harvard Educational Review**, 57(1), 1-22. p. 11.

SHULMAN, Lee S. Those who understand knowledge growth in teaching. *American* **Educational Research Association**, 15(2), p. 4-14, 1986.

SOMINSKII, I.S. **El método de la inducción matemática**. Quinta edición. Editorial Limusa: Noriega Editores, 1959.

SOSA, L. **Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos**. Tesis doctoral, Universidad de Huelva, Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía, Huelva, España. 2011.

STAKE, Robert E. **Investigación con estudio de casos**. Segunda edición. Madrid: Ediciones Morata, S.L., 1999.

VILARÓ, Ricardo. Desafíos de la formación docente ante la realidad social y la sociedad del conocimiento. En: I. Gómez, Planchart E. (Eds.), **Educación Matemática y Formación de Profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica**. Bilbao: HumanitarianNet, 2005, p. 51 – 71.

WASSERMAN Nick; STOCKTON Julianna Conelly. Horizon content knowledge in the work of teaching: A focus on plannig. **For the Learning of Mathematics**. 33(3), p. 20-22, 2013, p.20.

ZAZKIS Rina; MAMOLO Ami. Recoceptualizing knowledge at the mathematical horizon. **For the learning of mathematics**. 31(2), p. 8-13, 2011, p.9.

Recebido em:15/01/2024
Aprovado em: 24/02/2024