

# Planejamento da produção e gerenciamento de materiais através da programação dinâmica<sup>1</sup>

Hieronim Napierala<sup>2</sup>

## Resumo

<sup>1</sup>Recebido:05-06-2008  
Aprovado: 19-07-2008

<sup>2</sup>Doutor em Engenharia de Produção pela UFSC; professor Adjunto do Centro de Ciências Sociais Aplicadas - CCSA, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Campus de Marechal Cândido Rondon – PR, E-mail: hnapierala@terra.br

Nos últimos anos deu-se grande ênfase ao controle de recursos materiais em um sistema produtivo. Isto se deve a várias razões. Se, por um lado, os recursos materiais mantidos em estoque proporcionam segurança em um ambiente complexo e incerto, por outro, implicam custos, congelam o capital financeiro da empresa, ocupam espaço destináveis à produção, deterioram-se e tornam-se obsoletos. Há uma vasta bibliografia referente aos sistemas de manutenção de estoques, cujos estudos visam projetar, implementar e gerenciar um sistema de estoque, considerando suas diferentes características, tais como: tipos de demanda, prazo de planejamento, restrições e custos relevantes de estoque. Neste trabalho pretende-se elaborar um modelo que leva em consideração a capacidade de uma empresa ajustar seu processo produtivo para atender à demanda variável. Para solucionar o problema recorre-se a uma técnica aplicada à otimização dos problemas que podem ser modelados por uma seqüência de estados (programação dinâmica).

Palavras-chave: Controle de estoques; tamanho do lote; programação dinâmica.

## Production planning and material management through dynamic programming

### Abstract

In the last years it has been given a lot of emphasis to the control of material resources in a productive system. This is due to several reasons. If on the one hand the material resources kept in stock provide security in an uncertain and complex environment, on the other, represent costs, freeze the financial capital of the company, occupy space for the production, deteriorate up and become obsolete. There is a vast bibliography regarding the system maintenance of stock. In these studies to design, implement and manage a system of

stock were considered different characteristics of the system of stock, such as types of demand, time of planning, restrictions and the relevant costs of stock. This work intends to develop a model that takes into account the ability of a company to adjust its production process to meet the variable demand. To resolve the problem, it is using an applicable technique to the optimization of the problems that can be modeled by a sequence of states (dynamic programming).

Key-words: Inventory control; size of the lot; dynamic programming.

## Introdução

As atividades de gerenciamento de materiais complementam a gestão do processo produtivo. Os sistemas produtivos, mesmo aqueles aparentemente mais simples, podem evolver uma série de questões que precisam ser adequadamente equacionados. É importante não apenas garantir que o produto final esteja disponível para a comercialização dentro do prazo previsto, mas também se certificar de que o investimento realizado seja rentável para a empresa.

Para compreender a relevância estratégica e reguladora do estoque é importante considerar alguns conceitos. Segundo Davis *et al.* (2001, p.469), estoque é definido como sendo “a quantidade de qualquer item ou recurso usado em uma organização”. Por sua vez, Moreira (1993, p.463), entende por estoque “quaisquer quantidades de bens que sejam conservados, de forma improdutivo, por algum intervalo de tempo”.

As empresas precisam administrar vários tipos de materiais necessários à realização das suas atividades. Os estoques podem ser classificados, ainda, de três formas: estoques de matérias-primas, estoques de produtos em processo de produção e estoques de produtos acabados. A razão para manutenção de estoques depende fundamentalmente da natureza desses materiais.

Para a manutenção dos estoques de matérias-primas, são utilizadas justificativas, como a facilidade para o planejamento do processo produtivo, a manutenção do melhor preço deste produto, a prevenção quanto à falta de materiais e, eventualmente, a obtenção de descontos por aquisição de

grandes quantidades, estas razões são contra-argumentadas de várias formas. Atualmente, as modernas técnicas de administração de estoques, o conceito do *Supply Chain Management*, que ajuda a reduzir custos, representam alternativas eficientes para evitar a falta de materiais. Adicionalmente, a realização de contratos futuros pode representar um instrumento eficiente para proteger a empresa de eventuais oscilações de preços de seus insumos básicos.

Para a manutenção de estoques de materiais em processos, justifica-se a maior flexibilidade do processo produtivo, caso ocorra interrupção em alguma das linhas de produção da empresa. Obviamente, essa questão deve ser substituída pela adoção de processos de produção mais confiáveis, para se evitar a ocorrência dessas interrupções.

A manutenção de estoques de produtos acabados é justificada por duas razões: garantir atendimentos efetuados para as vendas realizadas e diminuir os custos de mudança na linha de produção.

A administração dos estoques desses materiais é uma função rotineira e, dependendo do tipo de empresa, terá maior ou menos relevância no seu funcionamento e eficiência. Nas empresas industriais, por exemplo, os inventários são bastante representativos, enquanto em determinadas empresas de serviços podem ser quase inexistentes, restringindo-se ao material de limpeza e a alguns itens de escritório. Os tipos de materiais comumente encontrados em empresas do tipo industrial são matérias-primas, componentes, materiais em processo e produto acabados, ou mercadorias. Além destes materiais ligados ao processo produtivo, podem, ainda, existir outros tipos de materiais complementares, os quais devem ser estocados e, administrados como peças de reposição para equipamentos e materiais de manutenção, de expediente, de limpeza e de segurança.

### **Gestão de estoques**

A gestão de estoques é uma área crucial a boa administração de uma empresa voltada à produção ou à venda de produtos, uma vez que o desempenho desta área tem reflexos imediatos nos resultados comerciais e

financeiros da empresa (FRANCISCHINI *et al.*, 2002). Segundo Dias (1995), o principal objetivo do controle de estoque é otimizar o investimento em estoques – aumentando o uso eficiente dos meios internos de uma empresa – e minimizar as necessidades de capital investido em estoque.

Como observa Moreira (1993), os materiais são formadores naturais de estoques que, muitas vezes, acarretam um elevado valor de capital e precisam ser administrados de forma correta, sob pena de afetarem negativamente o desempenho da empresa, comprometendo sua lucratividade. Portanto, a atividade de gerenciamento de materiais consiste em determinar: (i) os níveis de estoque a serem mantidos; (ii) o tamanho dos lotes de compra e (iii) a frequência de aquisição, para garantir o processo produtivo e, principalmente, o abastecimento do mercado.

De acordo com Peinado e Graeml (2007), Davis *et al.*, (2001) e Moreira (1993), são três os principais motivos para a formação de estoques de materiais em uma empresa e cada um destes três processos tem uma denominação específica, a saber:

a) No processo produtivo, vários produtos implicam a utilização dos mesmos recursos (equipamentos) e para tal são alocadas janelas de tempo para produzir determinadas quantidades de cada produto, que deverá suprir a demanda até que venha a ser novamente produzido. Esse tipo de estoque existe porque a produção, ou a compra de material, se dá em lotes, ou bateladas. Esta estratégia, geralmente, visa proporcionar economias como forma de compensar os altos custos de preparação de máquinas (*setup*), mas também considera os custos associados à manutenção de estoque. Em muitos casos, além da economia obtida na produção e transporte, também é possível obter descontos por quantidade, o que reforça os motivos para a produção ou compra em lotes e, conseqüentemente, a manutenção deste tipo de estoque. Os estoques deste tipo são classificados como sendo de *natureza determinística*, visto que esta estratégia parte da premissa de que o suprimento e a demanda vão se manter constantes e invariáveis ao longo do tempo:

b) Como há incerteza quanto ao volume do produto demandado, ou quanto à capacidade de produção para atender à demanda em tempo

hável, a empresa conta com estoque adicional para compensar um eventual atraso na produção, na entrega, ou mesmo um aumento inesperado na demanda. Os estoques adicionais visam proporcionar um certo nível de atendimento exigido, neutralizando os riscos impostos pela possível flutuação do suprimento ou da demanda. Os estoques desse tipo levam em consideração as incertezas, por esta razão, são classificados como de *natureza probabilística*;

c) A demanda é sazonal, mas a capacidade produtiva está disponível de forma constante, o que pode justificar a produção uniforme ao longo do tempo para atender às necessidades concentradas em determinados períodos. Estoques sazonais podem ser necessários para atender as oscilações implícitas na sazonalidade tanto da demanda pelo produto acabado, quanto da oferta de matéria-prima. Nem sempre a demanda anual ocorre de forma linear ao longo dos meses, entretanto, as indústrias tendem a produzir uma quantidade relativamente constante de produtos por mês. Assim, nos meses de baixa demanda, podem ser formados estoques de produtos acabados para atender os períodos de alta demanda. Esses estoques são denominados *estoques sazonais*.

A administração de materiais na empresa é um conjunto de atividades com a finalidade de assegurar o suprimento de materiais necessários ao funcionamento da organização, no tempo correto, na quantidade necessária, na qualidade requerida e pelo melhor preço (BALLOU, 2001). O suprimento antes do tempo correto ocasiona estoques altos, acima da necessidade da empresa, no entanto, após o tempo correto, ocasiona falta de material para o atendimento das necessidades. Além da quantidade necessária, os materiais representam imobilizações em estoque ocioso. Os materiais sem atributos de qualidade acarretam custos maiores e menor lucratividade; aquém da quantidade necessária, podem levar à insuficiência de estoque. O grau de importância da gestão de materiais está diretamente relacionado com o ramo de atividade da empresa.

A armazenagem de mercadorias prevendo seu uso futuro exige investimento por parte da organização. O ideal seria a perfeita sincronização entre a oferta e a demanda, de maneira a tornar a manutenção

de estoques desnecessária. Entretanto, como é impossível conhecer exatamente a demanda futura, e como nem sempre os suprimentos estão disponíveis a qualquer momento, deve-se acumular estoque para assegurar a disponibilidade de mercadorias e minimizar os custos totais de produção e distribuição.

Segundo Ballou (2001), estoques servem para uma série de finalidades, ou seja: (i) melhoram o nível de serviço; (ii) incentivam economias na produção; (iii) permitem economias de escala nas compras e no transporte; (iv) agem como proteção contra aumentos de preços; (v) protegem a empresa das incertezas na demanda e no tempo de ressuprimento; (vi) servem como segurança contra contingências.

A administração de estoques é de importância significativa na maioria das empresas, tanto em função do valor dos itens mantidos em estoque, quanto da associação direta com o ciclo operacional da empresa. A necessidade de prever as vendas antes de se estabelecer os níveis desejados de estoques torna sua administração uma tarefa difícil. Deve se observar também que os erros na fixação dos níveis de estoque podem levar à perda das vendas ou a excessivos custos de estocagem, caso tenham sido dimensionados de uma forma inadequada. Portanto, na correta determinação dos níveis de estoques fundamenta-se a importância da sua administração, cujo objetivo é garantir que os estoques estejam disponíveis quando necessários para manutenção do ritmo de produção e minimizar os custos de aquisição e manutenção de estoques de segurança.

Conforme foi mencionado, os estoques regulam diferentes fluxos ou taxas de produção entre equipamentos ou processos diferentes. Além disso, são importantes para o correto atendimento de demandas, sejam estas regulares ou não. Estas possibilidades devem ser previstas pela produção, buscando disponibilizar eficazmente matérias-primas, itens diversos, produtos semi-acabados e/ou acabados, evitando prejuízos, como a paralisação de linha de produção, ou a falta de produtos para atender a encomendas já realizadas. Por outro lado, é fundamental considerar as questões financeiras envolvidas no estabelecimento de estoques estratégicos ou reguladores, evitando o acúmulo de custos para a empresa.

Para melhor entendimento das questões relativas ao gerenciamento de estoques, é necessário considerar duas principais categorias de demandas de estoque: dependente e independente. Com a demanda independente, as demandas por vários itens não se relacionam umas às outras e, desta forma, as quantidades devem ser determinadas separadamente ou independentemente. Na demanda dependente, a necessidade por qualquer item é um resultado direto da necessidade por qualquer outro item, normalmente, um item de nível mais alto, do qual ele é componente (DAVIS *et al.*, 2001).

Conforme Bertaglia (2003, p.312) há várias situações que dificultam as atividades da gestão de estoques: (i) ciclo de vida cada vez mais curto dos produtos, tornando-os rapidamente obsoletos; (ii) flutuação da demanda; (iii) processo cada vez mais comum de personalização do produto, causando dificuldades de planejamento. É necessário usar todos os princípios, conceitos, e técnicas para saber que itens pedir ou produzir, quanto produzir, quando os produtos dever estar disponíveis e como e onde armazená-los.

### **Modelos de gestão de estoques**

Existem dois tipos gerais de sistemas de estoque para a demanda independente: (i) a quantidade fixa de pedido (sistema Q) e (ii) o período de tempo fixo (sistema P). A diferença entre estes dois sistemas é o momento do início da produção com vistas a atender determinado pedido. Enquanto o modelo de quantidade fixa inicia o pedido quando o estoque atinge um nível de pedido específico, o modelo de período de tempo fixo inicia a produção para atender a um pedido ao final de um período predeterminado.

Todos os modelos clássicos de estoque operam sob uma suposição inerente da demanda independente e constante. Contudo, esta hipótese não é válida para as empresas que controlam materiais necessários à produção do produto final. Conforme Pajak (2006), – a partir dos anos 60 – para resolver questões relacionadas ao gerenciamento de estoques, controle de matérias e, posteriormente, necessidade de produção, a indústria passou a contar com alguns sistemas que, progressivamente, foram agregando funções, passando a subsidiar processos completos. Esses sistemas – *Bill of*

*Material (BOM), Material Requirements Planning (MRP), Manufacturing Resource Planning (MRPII) – serviram de base para o desenvolvimento do Enterprise Resource Planning (ERP).*

A competitividade de muitas empresas está associada à sua capacidade de produzir produtos personalizados que atendem as necessidades individuais dos clientes. A capacidade de uma empresa ajustar os processos de transformação para atender as demandas sempre variáveis e fornecer os produtos aos clientes é medida em flexibilidade.

A produção flexível caracteriza-se por constantes mudanças relacionadas ao projeto do produto, assim como pela diminuição dos lotes de produção (PAJAK, 2006). Esta política de produção implica mudanças e adaptações, de acordo com a dimensão das necessidades materiais, porque as tradicionais concepções de compras econômicas podem, muitas vezes, resultar em elevados níveis de estoques. O suprimento dos materiais e outros recursos necessários para a produção não são valores constantes no decorrer do tempo e o problema fundamental é, nestas condições de contínuas mudanças, determinar – do ponto de vista financeiro – o tamanho ótimo de pedido, ou da produção ( $Q_{\text{ótimo}}$ ).

A discussão sobre a determinação da quantidade ótima de produção ( $Q_{\text{ótimo}}$ ) está baseada nas seguintes pressupostos: (i) a demanda pelo produto é conhecida em cada período  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) e é dada sob a forma  $D(n)$ . O último horizonte de planejamento é o período  $N$ ; (ii) as quantidades demandadas devem estar disponíveis no início de cada período  $n$ ; (iii) os custos de produção não dependem da quantidade encomendada e não existem descontos de quantidade; (iv) o prazo de entrega é conhecido com exatidão; (v) a quantidade total de cada encomenda é entregue de uma só vez; (vi) os custos de armazenagem só se aplicam à quantidade estocada para o período seguinte.

Para solucionar o problema alguns modelos baseiam-se na taxa média de demanda. Ou seja, encomenda-se para um determinado período, cuja quantidade esteja o mais próximo possível da quantidade obtida através da utilização da taxa média da demanda:



$$\bar{D} = \frac{1}{N} \sum_n D(n)$$

Quando a demanda pelo produto deixa de ser constante, o método de lote econômico não é recomendável, especialmente quando a variação da demanda for muito grande.

Em outro modelo, conhecido como heurística de Silver-Meal, seleciona a quantidade a ser produzida, baseando-se na seguinte função do custo total por unidade de tempo:

$$\mathcal{C}(t) = \left( s + h \sum_{n=1}^t D(n) \right) / t,$$

em que  $t$  representa o número de períodos de tempo ao longo do qual a produção atenderá a demanda;  $s$  é o custo de encomenda;  $h$  é o custo de manutenção em fração do custo unitário  $p$  e  $D(n)$  é a demanda ao longo do período  $n$ .

O objetivo é selecionar o  $t$  que minimize os custos relevantes totais por unidade de tempo. A heurística avalia valores crescentes de  $t$  e seleciona o menor valor de  $t$  para o qual  $\mathcal{C}(t+1) \geq \mathcal{C}(t)$  (SILVER e MEAL, 1998). A justificativa para usar a heurística de Silver-Meal é que esta conduz aos resultados superiores do lote de produção, baseado na taxa média da demanda, e o algoritmo é mais viável operacionalmente do que o algoritmo de Wagner-Whitin, que é baseado no uso dos elementos da programação dinâmica (PAJAK, 2006), que será discutida a seguir.

O algoritmo de Wagner-Whitin foi criado em 1958 e é um procedimento matemático complexo para o dimensionamento de lotes de produção e avalia as várias formas possíveis de efetuar uma encomenda de maneira a satisfazer as exigências em cada período do horizonte de planeamento. Este algoritmo se aplica a produtos com procura determinística discreta, utilizando a programação dinâmica para minimização dos custos associados à gestão dos estoques com vistas a obter as quantidades ótimas de encomenda (PAJAK, 2006).

## Construção do modelo

Neste estudo, objetivando solucionar o problema descrito acima, recorre-se a uma técnica aplicada à otimização dos problemas que podem ser modelados por uma seqüência de estados. Este método, que envolve relações algébricas de recorrência desenvolvidas por Bellman, evoluiu a partir dos estudos de problemas de programação, nos quais as decisões são tomadas ao longo do tempo. A técnica pode ser aplicada a problemas estáticos, isto é, que se referem a um lapso de tempo determinado.

A programação dinâmica é um processo que pode ser desdobrado segundo certo número de etapas seqüenciais, ou estágios ( $n$ ), os quais podem ser completados tomando uma decisão ( $k$ ). Um estágio compreende vários estados ( $i, j$ ). Cada decisão efetua uma transição do estado corrente ( $i$ ) para o estado ( $j$ ), associado ao estágio seguinte. O processo apresenta um retorno ( $r$ ), associado a cada decisão ( $k$ ), e um estágio ( $n$ ). Esse retorno – custo ou benefício – pode variar, simultaneamente, de acordo com o estágio e com o estado do processo. O objetivo de análise do processo é determinar um plano ótimo que resulte no melhor retorno total

$$f(n, i) = r(i, j, k) + f(n - 1, j)$$

A programação dinâmica baseia-se no princípio da condição de otimalidade de Bellman. Este princípio estabelece que o plano ótimo para o estado  $i$ , no  $n$ -ésimo estágio, é composto de uma ação que, no estágio seguinte, leva o sistema para o estado  $j$ , seguido de um plano que é ótimo neste estado  $j$ . Aplicando-se esse princípio recursivamente, obtém-se, para cada estado, em cada estágio, uma ação que é ótima dentre todas as ações viáveis neste estado. Nos modelos determinísticos pode-se prever a melhor seqüência de decisões para um estado inicial, que é determinada do plano ótimo. O modelo proposto é fundamentado na estrutura dos modelos de programação dinâmica com horizonte limitado. Para este modelo é necessário definir os seguintes elementos básicos: sistema, estágio, estado, ações, funções de retorno, valores de estado, conjunto de ações viáveis e a função de recorrência (ARENALES *et al.*, 2007).

*Sistema*

O modelo proposto tem por objetivo planejar a produção flexível – caracterizada pelas constantes modificações no projeto do produto e de pequenos lotes de produção – e controlar o estoque ao longo do tempo, sujeito à restrição de que toda a demanda variável e conhecida seja satisfeita. Portanto, é o modelo de estoque determinístico e de produto único.

*Estágio*

Periodicamente, deve-se decidir qual a quantidade do produto que deve ser produzida para atender a demanda do período. Os períodos considerados para esta tomada de decisão são definidos com base no tempo decorrido a partir da última demanda do produto. Estes intervalos podem ser estabelecidos de acordo com a precisão que se deseja dar aos resultados. Assim, pode-se considerar como um intervalo entre tomada de decisão períodos diários, semanais, mensais, etc. Para o modelo de programação dinâmica determinística com o horizonte limitado são necessários  $n$  períodos que marcam a demanda conhecida em cada período. Desta forma, tem-se  $n = 1, 2, \dots, N$  períodos para a variável estágio.

*Estado*

Para caracterizar o sistema, isto é, a quantidade do produto estocado no fim de cada período  $n$ , são definidas informações relativas à demanda do período  $D(n)$ , à quantidade  $k$  produzida no período  $n$  e às quantidades estocadas no período anterior  $n - 1$ . Assim, o estado do sistema, para fins do modelo, será descrito pela seguinte equação:

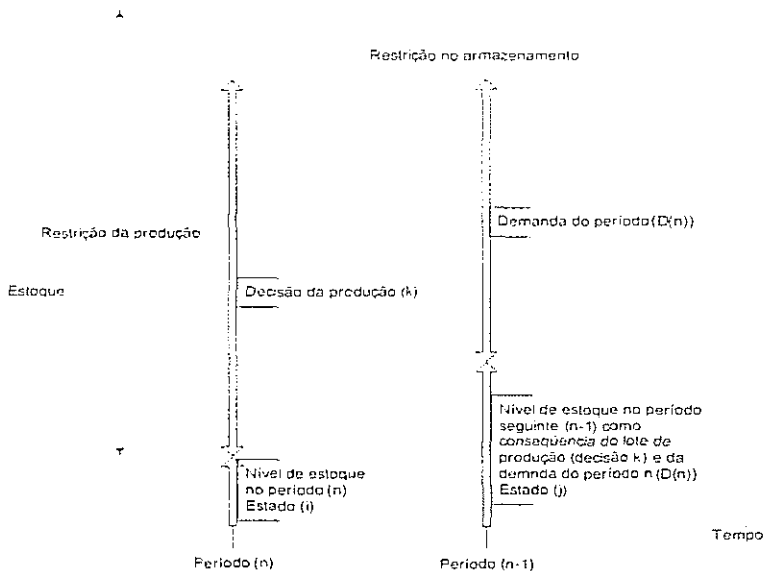
$$j = i + k - D(n)$$

*Ação*

Em cada estágio deverá ser tomada uma nova decisão acerca da produção. Essa decisão, no âmbito gerencial, consiste em definir a dimensão do lote de produção ( $k$ ) para satisfazer a demanda do período (Figura 01). Uma vez que a demanda varia de um período para outro, há a tendência de produzir mais do que é necessário em um período e estocar o excesso,

até que, posteriormente, este seja necessário – economias de produção em lote relacionadas ao alto custo de formação de estoque – porém, há um custo implícito à manutenção deste estoque. Este custo é atribuível a fatores tais como: juros sobre o capital emprestado para financiar a formação do estoque, taxas de aluguel de armazenagem, seguro e manutenção. Esse custo de manutenção de estoque deve ser levado em conta na determinação do tamanho do lote de produção.

Figura 01 - Diagrama de relações de estoque.



Fonte: Adaptação de MOORE *et al.*, 2005.

Além disso, a capacidade de produção e o espaço de armazenagem são restrições adicionais do modelo que devem ser consideradas. Se o custo de preparação for relativamente alto, quando comparado aos outros custos, devem ser evitadas as produções frequentes, uma ação tentará evitar a produção freqüente, desde que estas não excedam o limite da sua capacidade produtiva e do espaço de armazenagem.

*Função de retorno*

A função de retorno corresponde aos custos de formação e manutenção de estoque que dependem, essencialmente, do estoque inicial, da decisão tomada em relação ao tamanho do lote de produção e da demanda do período. Assim, a função de retorno é a soma de um termo devido à produção e um custo linear de manutenção de estoque:

$$r(n, i, j, k) = C(k) + h \cdot i,$$

O custo de produção,  $C(k)$  pode ser visto como um custo de preparação da produção ( $s$ ), acrescido de um custo unitário variável ( $c$ ) por item produzido, sucintamente,  $C(k) = s + ck$  para  $k > 0$ . Para  $k = 0$  a função de retorno restringe-se, apenas, ao custo de manutenção de estoque ou seja

$$r(n, i, j, k) = h \cdot i,$$

onde  $h$  é o custo de manutenção de uma unidade do produto por mês.

*Valor do estado*

Em uma programação o valor do estado do sistema costuma ser definido como sendo o valor da função objetivo, que agrega os retornos a partir de um estado particular, até o fim do período de planejamento. Nestas condições o valor do estado corresponde ao cômputo dos custos de produção e de manutenção. O valor do estado será denotado por  $f(n, i)$  e está definido para o estágio final, como:

$$f(0, 0) = 0.$$

Nesta expressão, o estágio  $n = 0$  corresponde a um momento futuro de tomada de decisão, situado no fim do horizonte de planejamento, e o estado  $i = 0$  determina que no fim do horizonte de planejamento o estoque do produto é igual a zero.

*Conjunto de decisões viáveis*

Em cada estágio e estado, quando da tomada de decisão, a gerência deve definir o tamanho do lote de produção. Em princípio, toda a demanda do período deve ser atendida levando em consideração a restrição da capacidade de produção e de limite do espaço de estocagem. Assim, o tamanho do lote de produção ( $k$ ) para período  $n < 2$  deve ser o valor inteiro, não negativo na faixa:

$$\max(0, D(n) - i) \leq k \leq \min(k_{\max}, D(n) + i_{\max} - i).$$

A restrição de produção impede que  $k$  exceda a  $k_{\max}$  e a restrição de estoque no fim do período impede que  $k$  exceda a  $D(n) + i_{\max} - i$ . No período  $n = 1$ , o estoque máximo deve ser igual à demanda do período, isto é,  $i_{\max} = D(n)$ , para garantir o estoque zero no fim do horizonte de planejamento,  $f(0,0) = 0$ .

#### Função de Recorrência

A função de recorrência tem por objetivo determinar o valor dos estados situados nos estágios  $n > 0$ . Ao determinar este valor obtém-se, também, a ação ótima a ser tomada. No modelo proposto, a função de recorrência assume a seguinte forma:

$$f(n, i) = \underset{1 \leq k}{\text{Min}} \{v(n, i, j, k) + f(n-1, j)\}.$$

Uma vez obtido o valor de todos os estados para todos os estágios  $n > 0$ , obtém-se um plano ótimo de produção.

#### Exemplo numérico e validação do modelo

Para validar o modelo descrito acima considere os seguintes dados:

(i) a demanda de um produto ao longo dos próximos 6 meses é a seguinte:

Período - $n$	1	2	3	4	5	6
Demanda - $D(n)$	1	5	2	1	3	4

(ii) o custo de preparação das máquinas ( $s$ ) é R\$ 13,00; (iii) o custo unitário variável ( $c$ ), por item produzido, é R\$ 2,00 e (iv) o custo de manutenção ( $h$ ) de uma unidade do produto por mês é R\$ 1,00.

Além de apresentar a solução ótima do problema de produção descrito acima, o propósito é mostrar detalhes da programação dinâmica. Há duas situações conflitantes: (i) o custo total da produção é composto por um valor fixo ( $s$ , custo de preparação das máquinas) mais a parte variável ( $k$ ), de modo que, quanto maior nível de produção ( $k$ ), menor o custo da produção por unidade, portanto, a melhor solução, sob o ponto de vista da produção, é produzir um lote em quantidade maior e, ao mesmo

tempo. manter o alto nível de estoque; (ii) quanto maior o estoque, maior custo de capital incorrido na manutenção deste estoque, portanto, a melhor solução, sob o ponto de vista do administrador de estoques, é produzir em pequenas quantidades, suficientes, apenas, para atender à demanda e manter o mínimo possível de estoques. Pressupõe-se que as decisões em relação à produção são tomadas mensalmente e que as demandas futuras da produção para os próximos seis meses sejam conhecidas por meio de um modelo de previsão. No começo de cada período, é preciso decidir se deve ser feita uma nova produção e em que quantidade. Os pedidos devem ser atendidos pelos produtos em estoque ou pela produção do mês. Há duas restrições que devem ser observadas: (i) limitação de espaço para estocagem (até quatro unidades/mês) e (ii) restrição da capacidade de produção (seis unidades/mês). O objetivo é determinar as quantidades a serem produzidas em cada mês, de modo que os custos totais do sistema sejam minimizados.

Em programação dinâmica o problema começa a ser resolvido de trás para frente. Pressupõe-se que no fim do horizonte de planejamento não haja nenhum produto estocado e que toda demanda do mês seja atendida pelo estoque do mês anterior e pela produção do mês.

A expressão  $f(n, i)$  define o custo mínimo de atendimento da demanda quando faltam  $n$  períodos (meses) até o fim do horizonte de planejamento. Como se pode observar pela notação da função de retorno,  $r(n, i, j, k) = C(k) + h$ , descrita anteriormente, o custo mínimo do estágio  $n$  depende tanto do estoque no fim do mês anterior como da decisão da produção do mês atual. Dado que todos os estados do problema foram definidos, a solução pode ser encontrada no último estágio, ou seja, quando faltam  $n$  estágios até o fim do horizonte de planejamento.

A função objetivo é chamada de função recursiva porque depende de si mesma, ou seja, sua solução requer a análise de recorrência. Nota-se que cada estágio ( $n$ ) tem apenas uma variável de decisão – a quantidade ( $k$ ) de produzir –, mas que deve ser resolvida para todos os valores possíveis de estado ( $i$ ).

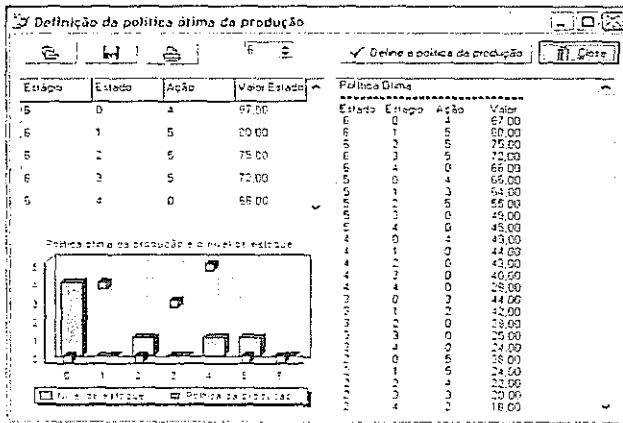
Utilizando o princípio da otimalidade de Bellman – em um conjunto de decisões ótimas tem-se a propriedade de que qualquer que seja a primeira decisão e o estado inicial, as decisões subsequentes têm de ser ótimas com

relação ao estado resultante dessa primeira decisão (ARENALES, 2007, p.387) – o problema de otimização é decomposto em subproblemas, desenvolvendo uma função de recorrência para calcular políticas ótimas, construindo-as a partir de políticas ótimas para problemas menores.

No problema descrito acima foi definido o valor do estado do sistema no fim do horizonte de planejamento. Considerando  $f(n,i)$  o menor custo possível em que se pode incorrer nos estágios  $n = 0,1,...,N$ , dado que o estado observado do sistema no estágio corrente  $n$  é  $i$ , deve-se tomar uma decisão  $k$  de um conjunto de  $K$  decisões viáveis. Com esta decisão, estando no estágio  $n$  e no estado  $i$ , tomando a decisão  $k$ , incorre-se em um custo  $r(n,i, j, k)$ , e o sistema evolui para um novo estado  $j$ . Assim, avaliam-se os custos de todas as decisões possíveis no estágio  $n$  dado que o estado observado é  $i$ , e toma-se a decisão de menor custo. Para recuperar as decisões tomadas que levam ao menor custo, escolhe-se a decisão ótima do primeiro estágio. Esta decisão leva a um estado de menor custo do estágio seguinte e assim sucessivamente até serem determinadas todas as decisões em cada um dos  $n$  estágios do problema.

A política de produção e os custos implícitos a ela podem ser organizados na forma de um gráfico, como exemplifica a Figura 02, ou de uma tabela (Tabela 01), facilitando a compreensão.

Figura 02 - Plano ótimo de produção.



Fonte: Elaborada pelo autor.



A implementação das equações recursivas da programação dinâmica em um computador é simples, o que é uma vantagem sobre outras técnicas de solução.

Como resultado obtém-se o plano de produção ( $Q_{ótima}$ ), que minimiza o custo total composto pelos custos de produção e de manutenção (Figura 02).

Tabela 01- Determinação da política ótima em um horizonte limitado.

Estoque inicial	1	2	3	4	5	6
	Produção	Produção	Produção	Produção	Produção	Produção
0	1	5	3	4	4	4
1	0	5	2	0	3	5
2		4	0	0	5	5
3		3	0	0	0	5
4		2	0	0	0	0

Fonte: Elaboração do autor, a partir da implementação do modelo.

As políticas de produção expostas na Tabela 02 mostram como a produção ideal depende da demanda do período quando o estado do sistema  $i = 0$ . Existem políticas ótimas neste estado, nas quais a produção acompanha a demanda. O estoque é gerado no terceiro, no quarto e no quinto mês, totalizando cinco unidades do produto. Nos outros meses, a produção cobre somente a demanda do período.

Tabela 02 - Esquema da produção quando o estado do sistema  $i = 0$ .

Horizonte de planejamento				
	Demanda	Produção	Custo	Custo/Período
$n$				
1	1	1	15	15,00
2	5	5	38	19,00
3	2	3	44	14,67
4	1	4	49	12,25
5	3	4	66	13,20
6	4	4	87	14,50

Fonte: Elaboração do autor, a partir da implementação do modelo.

A Tabela 02 expõe, também, como o custo por período depende do horizonte de planejamento. Nota-se, ainda, que o custo por período é flutuante.

### Considerações finais

A necessidade de gerenciamento eficiente e viável tem demandado várias pesquisas e amplas discussões relacionadas à determinação dos níveis de estoques a serem mantidos, o tamanho dos lotes de compra, ou produção, e a frequência de aquisição para garantir o processo produtivo e, conseqüentemente, o abastecimento do mercado.

Durante as últimas décadas foram desenvolvidos vários modelos de controle. Há uma vasta bibliografia referente aos modelos de controle para a demanda dependente que propõem os sistemas integrados, baseados na tecnologia de informação. Há, também, os modelos clássicos da determinação do lote econômico de compra e de produção, levando em consideração o caráter cíclico de estoque e o caráter determinístico, ou probabilístico, da demanda independente.

O presente estudo resultou da necessidade de um modelo da definição do tamanho do lote de produção quando a demanda é variável. O mérito do modelo proposto está em propiciar um plano ótimo de produção que minimize o custo de produção e de manutenção de estoques. Para cada estágio foi tomada uma decisão acerca da produção. Essa decisão, no âmbito de gerência, consiste em definir o tamanho do lote de produção ( $k$ ), para satisfazer a demanda do período. Uma vez que a demanda varia de um período para outro, há a tendência de produzir mais do que é necessário em um período e estocar o excesso, até que este seja necessário mais tarde. Além disso, a capacidade de produção e o espaço de armazenagem foram as restrições adicionais do modelo levadas em consideração. Dado que o custo de preparação das máquinas foi relativamente alto em relação aos outros custos, a programação evitou a produção freqüente – observando os limites da sua capacidade produtiva e do espaço de armazenagem. O custo

total associado aos custos de formação e manutenção de estoque foi o fator determinante desse plano ótimo de produção.

Uma das vantagens da programação dinâmica é que as funções de retorno e de recorrência não precisam ser lineares. O próprio exemplo é um caso em que a função custo de produção e manutenção de estoques é uma função descontínua.

A programação dinâmica pode ser resolvida com o auxílio de computador, entretanto, ressalta-se que, com o aumento dos níveis de estoques, o número de combinações torna-se extremamente grande, impossibilitando um nível mais detalhado de análise do sistema. Com o aumento do número de estados acaba-se chegando facilmente a valores intratáveis, mesmo levando em consideração a grande capacidade computacional disponível atualmente.

### Referências Bibliográficas

ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

BALLOU, R. H. **Gerenciamento da cadeia de suprimentos: planejamento, organização e logística empresarial**. 4. ed. Porto Alegre: Bookmann, 2001.

DAVIS, M.M.; AQUILANO, N.J.; CHASE, R.B. **Fundamentos da administração da produção**. 3.ed. Porto Alegre: Bookmann, 2001.

DIAS, M. A. **Administração de Materiais**. 4. ed. São Paulo: Editora Atlas, 1995.

FRANCISCHINI, P. G.; GURGEL, F. A. **Administração de materiais e do patrimônio**. São Paulo: Thomson Pioneira, 2002.

MOORE, J.H.; WEATHERFORD, L.R. **Tomada decisão em administração com planilhas eletrônicas**. 6. ed. Porto Alegre: Bookmann, 2005.

MOREIRA, D.A. **Administração da produção e operações**. São Paulo: Pioneira, 1993.

PAJAK, E. **Zarządzanie produkcją: produkt, technologia, organizacja.** Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.

PEINADO, J.; GRAEML, A. R. **Administração da produção: operações industriais e de serviços.** Curitiba: UnicenP, 2007.

SILVER, E; MEAL, H. **Inventory management and production planning and scheduling.** 3.ed. New York: John Wiley, 1998.