

# Uma demonstração da desigualdade isoperimétrica utilizando a desigualdade de Brunn-Minkowski

*Felipe Costa - Universidade Estadual do Oeste do Paraná*

*(Recebido em 23/11/2021. Aceito em 03/12/2021. Publicado em 30/11/2025)*

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos uma demonstração da desigualdade isoperimétrica fazendo uso da desigualdade de Brunn-Minkowski. A vantagem desta abordagem é a sua extensão natural ao caso tridimensional, além de servir como um exemplo de aplicação do Cálculo Variacional no estudo de problemas geométricos.

**Palavras-chave:** Curvas planas; Desigualdade de Brunn-Minkowski; Desigualdade isoperimétrica.

## 1 Introdução

Para introduzir a desigualdade isoperimétrica vamos pensar em uma curva  $\Gamma$  como a trajetória contínua descrita por uma partícula no plano. Dizemos que  $\Gamma$  é uma curva fechada se o ponto inicial e o ponto final da trajetória são iguais. Neste caso, vamos denotar por  $\Omega$  a região delimitada pela curva  $\Gamma$ .

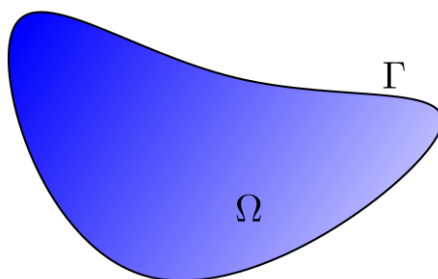


Figura 1: A curva  $\Gamma$  delimita a região  $\Omega$

A desigualdade isoperimétrica surge como uma consequência do

**Problema isoperimétrico**, que consiste em obter, dentre todas as curvas fechadas, sem autointerseções e de comprimento fixo, aquela que delimita a região de maior área.

Este é um dos problemas mais famosos e antigos da geometria, tendo como origem o mito da fundação de Cartago (veja VIRGÍLIO ou BLÅSJÖ).

Os Gregos já sabiam que a solução do problema isoperimétrico era uma circunferência. Mas foi somente em 1879, com K. Weierstrass, que uma demonstração suficientemente satisfatória foi apresentada. Na verdade, o resultado segue como uma consequência da teoria desenvolvida por Weierstrass denominada Cálculo das Variações, onde o problema isoperimétrico é um dos problemas típicos abordados por esta teoria.

Dada uma curva fechada  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^2$  delimitando uma região  $\Omega$ , vamos denotar por  $L(\Gamma)$  o comprimento desta curva e por  $A(\Omega)$  a área da região delimitada pela mesma. Se sabemos a priori que uma solução do problema isoperimétrico é uma circunferência  $\mathcal{C}$ , então qualquer outra curva fechada  $\Gamma$  com comprimento  $L(\Gamma) = L(\mathcal{C})$  deve delimitar uma área  $A(\Omega) \leq A(\mathcal{C})$ . Suponhamos que o raio da circunferência  $\mathcal{C}$  seja igual a  $r$ , com isso podemos escrever

$$A(\Omega) \leq A(\mathcal{C}) = \pi r^2 = \frac{(2\pi r)^2}{4\pi} = \frac{L(\mathcal{C})^2}{4\pi} = \frac{L(\Gamma)^2}{4\pi},$$

ou seja,

$$A(\Omega) \leq \frac{L(\Gamma)^2}{4\pi}. \tag{1}$$

A desigualdade (1) é denominada desigualdade isoperimétrica. Observe que (1) foi obtida a partir da hipótese de que a circunferência é uma solução do problema isoperimétrico, o que, por enquanto, torna esta desigualdade apenas uma conjectura.

Por outro lado, caso provemos a desigualdade (1) para toda curva fechada  $\Gamma$  delimitando uma região  $\Omega$ , então a circunferência seria uma solução do problema isoperimétrico, pois  $L(\Gamma)^2/4\pi$  seria uma cota superior para todas as áreas de regiões delimitadas por curvas fechadas de comprimento  $L(\Gamma)$  fixado, a qual é atingida quando  $\Gamma$  é uma circunferência de raio  $L(\Gamma)/2\pi$ . Isto responderia uma parte do problema isoperimétrico, restando apenas provar que a circunferência é a única curva plana com esta propriedade.

**Teorema 1** (Desigualdade isoperimétrica). *Seja  $\Gamma$  uma curva fechada, sem autointerseções, de comprimento  $L(\Gamma)$  e delimitando uma região  $\Omega$ . Se  $A(\Omega)$  é a área de  $\Omega$ , então*

$$L(\Gamma)^2 - 4\pi A(\Omega) \geq 0.$$

*Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Gamma$  é uma circunferência.*

Para provar o Teorema 1, além das fórmulas de primeira variação do comprimento e da área, obtidas na Seção 3, vamos utilizar um resultado conhecido como Desigualdade de Brunn-Minkowski que trata sobre a área da soma de subconjuntos do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Evidentemente, estamos interessados no caso  $n = 2$ , mas vale ressaltar que a mesma desigualdade no caso  $n = 3$  pode ser usada para estender a desigualdade isoperimétrica para o contexto de superfícies (veja MONTIEL e ROS).

Dados  $A$  e  $B$  dois subconjuntos quaisquer de  $\mathbb{R}^n$ , o conjunto soma  $A + B$  é definido por

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^n : a \in A, b \in B\}.$$

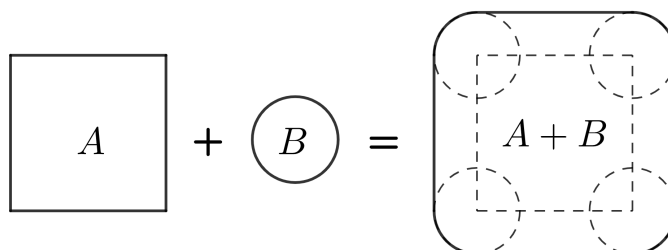


Figura 2: Soma do quadrado  $A$  com o círculo  $B$

Queremos somar subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que tenham áreas bem definidas. Estes conjuntos são chamados conjuntos Lebesgue mensuráveis, ou simplesmente conjuntos mensuráveis.

A Desigualdade de Brunn-Minkowski que será enunciada adiante é válida no contexto de conjuntos mensuráveis, mas, para os nossos propósitos, será suficiente considerar apenas subconjuntos abertos, visto que, todo aberto de  $\mathbb{R}^n$  é (Lebesgue) mensurável (veja STEIN e SHAKARCHI).

**Teorema 2** (Desigualdade de Brunn-Minkowski). *Sejam  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  dois subconjuntos abertos e limitados de  $\mathbb{R}^n$ . Então*

$$A(\Omega_1)^{1/n} + A(\Omega_2)^{1/n} \leq A(\Omega_1 + \Omega_2)^{1/n}.$$

A demonstração do Teorema 2 pode ser encontrada em STEIN e SHAKARCHI.

Observe que está implícito na conclusão do Teorema 2 que soma de dois subconjuntos mensuráveis de  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto mensurável. Na verdade, é possível mostrar se  $A$  ou  $B$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ , então  $A + B$  é um conjunto aberto. Assim, de acordo com o que foi destacado acima,  $A + B$  é um conjunto mensurável.

Para utilizar o Teorema 2 em conjunto com as fórmulas de variação do comprimento e da área precisamos restringir a classe de curvas que estamos considerando, isto é, devemos considerar curvas de classe  $C^2$ . Esta restrição deve-se ao fato de que a nossa abordagem passa pelo conceito de curvatura de uma curva. Além disso, queremos variar a curva  $\Gamma$  dentro de um conjunto aberto  $N_\varepsilon(\Gamma)$  de modo que as curvas da variação ainda sejam fechadas, sem autointerseções e de classe  $C^2$ . O conjunto aberto  $N_\varepsilon(\Gamma)$  é chamado vizinhança tubular da curva  $\Gamma$  e pode ser pensado como uma faixa de largura  $2\varepsilon$  ao longo de  $\Gamma$ . A construção de  $N_\varepsilon(\Gamma)$  pode ser encontrada em ALENCAR, et al.

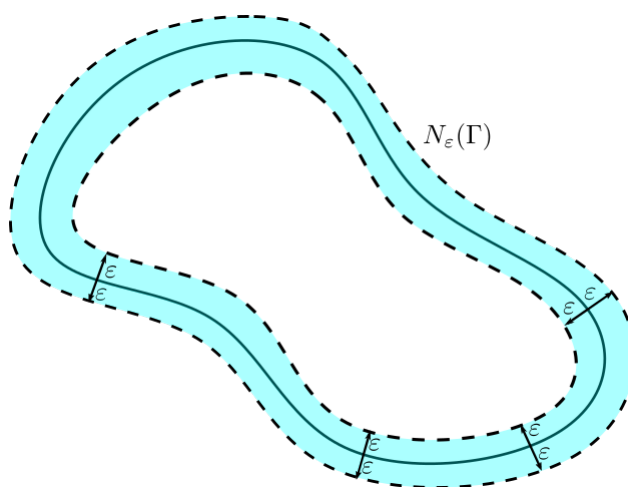


Figura 3: Vizinhança tubular

A parte da igualdade no Teorema 1 será demonstrada observando que as curvas planas fechadas de classe  $C^2$  que satisfazem  $L(\Gamma)^2 - 4\pi A(\Omega) = 0$  são aquelas que têm curvatura constante não nula. Esta informação caracteriza as circunferências.

## 2 Curvas em $\mathbb{R}^2$

Uma curva plana parametrizada é uma aplicação contínua  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo. A curva  $\alpha$  será denominada de classe  $C^k$  se as funções coordenadas  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  são de classe  $C^k$ .

O conjunto imagem da aplicação  $\alpha$ , definido por

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$$

é chamado traço da curva  $\alpha$ . Neste caso, dizemos que  $\alpha$  é uma parametrização de  $\Gamma$ .

**Exemplo 1.** Dado  $r > 0$ , a curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$$

tem como traço uma circunferência de raio  $r$  e centro na origem.

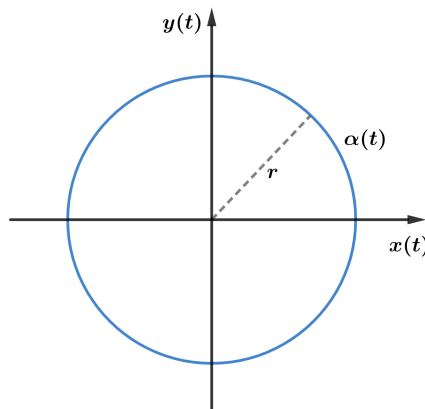


Figura 4: Circunferência de raio  $r$  e centro na origem

O próximo exemplo mostra que uma curva no plano pode ter autointerseções.

**Exemplo 2.** Considere a curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4).$$

O traço da curva  $\alpha$  possui uma autointerseção na origem pois  $\alpha(-2) = \alpha(2) = (0, 0)$ .

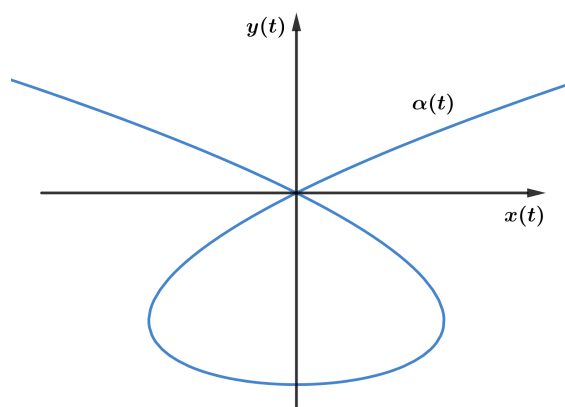


Figura 5: Traço da curva definida por  $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$

Se uma curva  $\alpha$  está definida em um intervalo fechado  $I = [a, b]$ , os pontos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são chamados ponto inicial e ponto final de  $\alpha$ , respectivamente. A curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita fechada se  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Note a curva apresentada no exemplo 1 é fechada já que  $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ .

Dizemos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é simples se a aplicação  $\alpha$  é injetora. Observe que a curva apresentada no exemplo 2 não é simples pois  $\alpha(-2) = \alpha(2)$ .

Neste trabalho estamos particularmente interessados em curvas planas que reúnem as duas últimas propriedades acima. Precisamente, uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita fechada e simples se  $\alpha(a) = \alpha(b)$  e a restrição de  $\alpha$  ao intervalo  $[a, b]$  é injetora. Uma curva fechada e simples é também denominada curva de Jordan.

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana parametrizada dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . O vetor tangente de  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é definido por

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Quando  $\alpha'(t) \neq (0, 0)$  para todo  $t \in I$ , dizemos que a curva  $\alpha$  é regular. Portanto, ao longo do traço de uma curva regular fica bem definida uma reta tangente em cada ponto  $\alpha(t)$  na direção do vetor  $\alpha'(t)$ . Se  $\alpha'(t_0) = (0, 0)$ , então dizemos que  $\alpha$  tem um ponto singular em  $t_0$ .

De agora em diante, iremos considerar apenas curvas regulares de classe  $C^k$ , com  $k \geq 2$ , definidas em intervalos fechados e limitados, ficando assim assumida tacitamente estas hipóteses no decorrer deste texto.

O comprimento de uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é, por definição,

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt,$$

onde

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Observe que se  $\|\alpha'(t)\| = 1$  para todo  $t \in [a, b]$ , então  $L(\alpha) = b - a$ , ou seja, o comprimento da

curva é igual ao comprimento do intervalo  $[a, b]$ . Por outro lado, se

$$\int_a^t \|\alpha'(s)\| ds = t - a, \quad \text{para todo } t \in [a, b],$$

então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos  $\|\alpha'(t)\| = 1$  para todo  $t \in [a, b]$ .

Dizemos que a curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco se  $\|\alpha'(t)\| = 1$  para todo  $t \in I$ . Uma propriedade muito importante envolvendo as curvas regulares e a parametrização pelo comprimento de arco é dada pela seguinte

**Proposição 3.** *Dada uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Existe uma curva regular  $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  com o mesmo traço da curva  $\alpha$  e que satisfaz  $\|\beta'(t)\| = 1$  para todo  $t \in [0, l]$ .*

A proposição 3 garante que sempre é possível reparametrizar o traço de uma curva regular pelo comprimento de arco, conseqüentemente, o vetor tangente desta nova parametrização é unitário em todo ponto.

**Exemplo 3.** A curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada no exemplo 1 é regular, mas não está parametrizada pelo comprimento de arco para todo valor de  $r \neq 1$  pois

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-r \operatorname{sen}(t))^2 + (r \operatorname{cos}(t))^2} = r.$$

Por outro lado, é simples verificar que a curva  $\beta : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\beta(t) = (r \operatorname{cos}(t/r), r \operatorname{sen}(t/r))$$

possui o mesmo traço da curva  $\alpha$  (é uma circunferência de raio  $r$  e centro na origem) e está parametrizada pelo comprimento de arco, independentemente do valor de  $r > 0$ .

Quando a curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  estiver parametrizada pelo comprimento de arco, denotaremos o vetor tangente (unitário) desta curva no ponto  $t \in I$  por  $T(t)$ , ou seja,

$$T(t) = (x'(t), y'(t)).$$

A partir do vetor tangente  $T(t)$ , podemos definir o vetor normal (unitário)  $N(t)$  da curva  $\alpha$  no ponto  $t \in I$  da seguinte maneira

$$N(t) = (-y'(t), x'(t)).$$

Observe que o vetor normal  $N(t)$  é obtido através da rotação do vetor  $T(t)$  por um ângulo de  $90^\circ$  no sentido anti-horário, assim, para cada  $t \in I$ , o conjunto  $\{T(t), N(t)\}$  é uma base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^2$  denominada referencial de Frenet de  $\alpha$ .

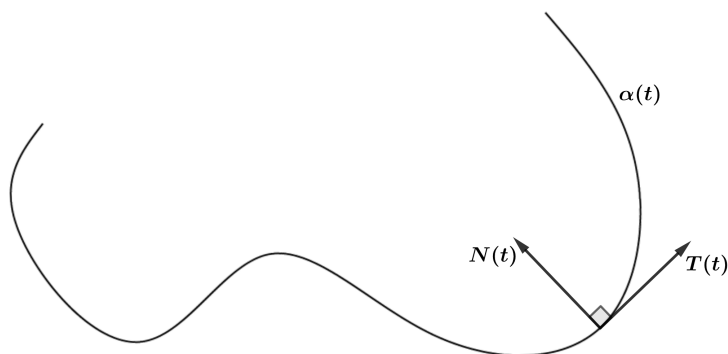


Figura 6: Referencial de Frenet de  $\alpha$

Estamos quase prontos para definir a função curvatura de uma curva no plano, restando apenas estabelecer o seguinte resultado:

**Proposição 4.** *Se uma função  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é diferenciável e  $\|X\| : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função constante, então  $X'(t) \perp X(t)$  para todo  $t \in I$ .*

*Prova.* Derivando a equação  $\|X(t)\|^2 = \text{constante}$ , obtemos

$$0 = \frac{d}{dt}(X(t) \cdot X(t)) = X'(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot X'(t) = 2X'(t) \cdot X(t).$$

Segue que  $X'(t) \cdot X(t) = 0$  e, conseqüentemente,  $X'(t) \perp X(t)$ . □

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , parametrizada pelo comprimento de arco. Por definição, a função vetor tangente unitário  $T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaz as hipóteses da Proposição 4. Assim, podemos concluir que  $T'(t) \perp T(t)$  para todo  $t \in I$ . Este fato e a definição do vetor normal  $N(t)$  garantem a existência de uma função  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$T'(t) = \kappa(t)N(t) \quad \text{para todo } t \in I. \tag{2}$$

**Definição 5.** A função  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida pela equação (2), é denominada função curvatura da curva  $\alpha$ . Dizemos que  $\kappa(t)$  é a curvatura de  $\alpha$  no ponto  $t \in I$ .

Segue da equação (2) que a curvatura de  $\alpha$  em  $t \in I$  mede a variação do vetor tangente neste ponto, visto que

$$\|T'(t)\| = |\kappa(t)|.$$

Antes de prosseguirmos, deixemos registrado o seguinte par de equações, válidas para toda curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco, conhecidas como Equações de Frenet de  $\alpha$ :

$$\begin{cases} T'(t) = \kappa(t)N(t) \\ N'(t) = -\kappa(t)T(t) \end{cases} \quad \text{para todo } t \in I.$$

A primeira das Equações de Frenet é simplesmente a definição da função curvatura e a segunda equação segue da Proposição 4 aplicada à função vetor normal  $N : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  da curva  $\alpha$  e do fato

de  $\{T(t), N(t)\}$ ,  $t \in I$ , formar uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  (a definição e os principais resultados sobre bases ortonormais em  $\mathbb{R}^n$  podem ser encontrados em ANTON e RORRES). Os detalhes sobre a dedução das Equações de Frenet podem ser encontrados em TENENBLAT.

Em relação ao traço da curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , podemos interpretar a curvatura como a medida do quanto uma curva deixa de ser uma reta. Esta interpretação pode ser justificada pelo seguinte resultado:

**Proposição 6.** *A função curvatura de uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é identicamente nula se, e somente se, o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta.*

*Prova.* Se a função curvatura da curva  $\alpha$  é identicamente nula, então  $T'(t) = (0, 0)$  para todo  $t \in I$ . Como  $I$  é um intervalo, concluímos que a função vetor tangente  $\alpha'(t)$  é constante, digamos,  $\alpha'(t) = \alpha'(t_0) = v$  para todo  $t \in I$ , onde  $t_0 \in I$  é um ponto fixado. Escolhendo arbitrariamente  $t_1 \in I$ , podemos escrever

$$\alpha(t) - \alpha(t_1) = \int_{t_1}^t \alpha'(t) dt = \int_{t_1}^t v dt = (t - t_1)v,$$

ou melhor,

$$\alpha(t) = \alpha(t_1) + (t - t_1)v.$$

Mostramos assim que o traço de  $\alpha$  está contido na reta que passa pelo ponto  $\alpha(t_1)$  na direção do vetor  $v$ .

Por outro lado, se o traço da curva  $\alpha$  está contido em uma reta e  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$\alpha(t) = P_0 + tv \quad \text{para todo } t \in I,$$

onde  $P_0 \in \mathbb{R}^2$  é um ponto da reta e  $v \in \mathbb{R}^2$  é um vetor diretor unitário desta reta. Daí, para cada  $t \in I$ , podemos escrever

$$\kappa(t)N(t) = T'(t) = \alpha''(t) = (0, 0).$$

Como o vetor  $N(t)$  é unitário, concluímos que  $\kappa(t) = 0$  para todo  $t \in I$ . □

Outro fato intuitivo que pode ser confirmado a partir do conceito de curvatura é a impressão de que uma circunferência parece “se curvar” de igual modo em cada um de seus pontos. A tradução matemática desta observação é que a função curvatura de uma circunferência é constante e não nula. Tanto esta afirmação quanto a sua recíproca (se a curvatura de uma curva de Jordan é constante e não nula, então esta curva é uma circunferência) podem ser provadas, e serão de grande importância neste texto, pois, como veremos, as curvas de Jordan de comprimento fixo e que delimitam a maior área possível são aquelas que têm curvatura constante. Portanto, faz-se necessário registrar a seguinte

**Proposição 7.** *Uma curva de Jordan  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tem curvatura constante igual a  $k_0 \neq 0$  se, e somente se, o traço de  $\alpha$  é uma circunferência de raio  $r = 1/k_0$ .*

Utilizando a parametrização  $\beta(t) = (r \cos(t/r), r \sin(t/r))$ , dada no exemplo 3, podemos calcular facilmente a curvatura da circunferência de raio  $r$  já que, neste caso,

$$T'(t) = \beta''(t) = -\frac{1}{r}\beta(t) = \frac{1}{r}N(t).$$

Segue da equação (2) que  $\kappa(t) = 1/r$  para todo  $t \in [0, 2\pi r]$ . A demonstração completa da proposição 7 pode ser encontrada em TENENBLAT.

Vamos finalizar esta seção enunciando um resultado que é uma consequência do Teorema de Green. Este resultado será usado para calcular a área delimitada por uma curva de Jordan. Mas antes disso, convém lembrar que uma curva de Jordan  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está positivamente orientada se, para cada  $t \in I$ , o vetor normal  $N(t)$  aponta para a região delimitada por  $\alpha$ .

**Lema 8.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan positivamente orientada e definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Então a área da região  $\Omega$ , delimitada pela curva  $\alpha$ , é dada por*

$$A(\Omega) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt.$$

É importante observar que no lema 8 a curva  $\alpha$  não precisa estar parametrizada pelo comprimento de arco. Além disso, denotando por  $\alpha'(t)^\perp$  a rotação do vetor tangente de  $\alpha$  no ponto  $t \in I$  por um ângulo de  $90^\circ$  no sentido positivo (note que  $T^\perp = N$ ), a fórmula que fornece a área da região  $\Omega$ , delimitada por  $\alpha$ , pode ser reescrita na forma

$$A(\Omega) = -\frac{1}{2} \int_a^b \alpha(t) \cdot \alpha'(t)^\perp dt.$$

### 3 Fórmulas de variação do comprimento e da área

Ao longo desta seção,  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  será uma curva de Jordan de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , parametrizada pelo comprimento arco. Além disso, denotaremos por  $\Gamma$  o traço de  $\alpha$ .

Dada uma função diferenciável  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos encontrar um número  $\delta > 0$  tal que, se  $|t| < \delta$ , então  $tf([0, l]) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ , onde  $\varepsilon > 0$  é escolhido de modo que  $N_\varepsilon(\Gamma)$  seja uma vizinhança tubular de  $\Gamma$ . Suponhamos que a função  $f$  satisfaz  $f(0) = f(l)$ .

Uma variação da curva  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  correspondente à função diferenciável  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma família de curvas dada por

$$\Gamma_t(f) = \{\alpha_f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2 : \alpha_f(s) = \alpha(s) - tf(s)N(s)\}.$$

Observe que  $\Gamma_0(f) = \alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  para toda função  $f$  e que  $\Gamma_t(1)$  é uma família de curvas paralelas à curva  $\alpha$  para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ .

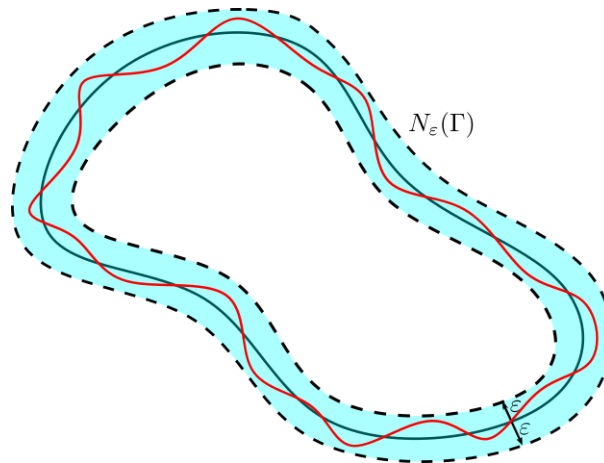


Figura 7: Variação da curva  $\alpha$

**Lema 9** (Primeira variação do comprimento). *Seja  $\Gamma_t(f)$ ,  $|t| < \delta$ , para algum  $\delta > 0$ , uma variação da curva de Jordan  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  correspondente à função  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ . Então a função  $L : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$t \in (-\delta, \delta) \mapsto L(t) = L(\Gamma_t(f))$$

é diferenciável e satisfaz

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(\Gamma_t(f)) = \int_0^l \kappa(s) f(s) ds.$$

*Prova.* Dada uma curva  $\alpha_f \in \Gamma_t(f)$ , temos

$$\alpha_f(s) = \alpha(s) - tf(s)N(s).$$

Derivando em relação a  $s$  encontramos

$$\alpha'_f(s) = T(s) - tf'(s)N(s) - tf(s)N'(s).$$

Usando as equações de Frenet ficamos com

$$\alpha'_f(s) = (1 + tf(s)\kappa(s))T(s) - tf'(s)N(s). \quad (3)$$

Como o conjunto  $\{T(s), N(s)\}$  forma uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ , temos

$$\|\alpha'_f(s)\|^2 = (1 + tf(s)\kappa(s))^2 + (tf'(s))^2.$$

Observe que, apesar de a curva  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  estar parametrizada pelo comprimento de arco, o mesmo não precisa ocorrer com as curvas  $\alpha_f$  da variação de  $\alpha$ . De todo modo, podemos escrever

$$L(\Gamma_t(f)) = \int_0^l \|\alpha'_f(s)\| ds = \int_0^l \sqrt{(1 + tf(s)\kappa(s))^2 + (tf'(s))^2} ds.$$

Finalmente, derivando sob o sinal de integração e fazendo  $t = 0$ , concluímos que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(\Gamma_t(f)) = \int_0^l \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sqrt{(1 + tf(s)\kappa(s))^2 + (tf'(s))^2} ds = \int_0^l \kappa(s) f(s) ds.$$

□

**Lema 10** (Primeira variação da área). *Para cada  $t \in (-\delta, \delta)$ , seja  $\Omega_t(f)$  a região delimitada pela curva de Jordan  $\alpha_f \in \Gamma_t(f)$ . Então a função  $A : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$t \in (-\delta, \delta) \mapsto A(t) = A(\Omega_t(f))$$

é diferenciável e satisfaz

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\Omega_t(f)) = \int_0^l f(s) ds.$$

*Prova.* Dada uma curva  $\alpha_f \in \Gamma_t(f)$ , o lema 8 nos diz que

$$A(\Omega_t(f)) = -\frac{1}{2} \int_0^l \alpha_f(s) \cdot \alpha'_f(s)^\perp dt.$$

Utilizando a equação (3) e as definições de  $T$  e  $N$  encontramos

$$\alpha'_f(s)^\perp = (1 + tf(s)\kappa(s))N(s) + tf'(s)T(s).$$

Efetuada a operação  $\alpha_f(s) \cdot \alpha'_f(s)^\perp$  obtemos

$$\alpha_f(s) \cdot \alpha'_f(s)^\perp = (1 + tf(s)\kappa(s))\alpha(s) \cdot N(s) - tf(s)(1 + tf(s)) + tf'(s)\alpha(s) \cdot T(s).$$

Derivando a expressão acima em relação a  $t$ , fazendo  $t = 0$  e usando as equações de Frenet, obtemos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_f(s) \cdot \alpha'_f(s)^\perp = \alpha(s) \cdot (f(s)T(s))' - f(s).$$

Usando a identidade  $[\alpha(s) \cdot (f(s)T(s))]' = f(s) + \alpha(s) \cdot (f(s)T(s))'$  podemos escrever

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_f(s) \cdot \alpha'_f(s)^\perp = [\alpha(s) \cdot (f(s)T(s))]' - 2f(s).$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\Omega_t(f)) &= -\frac{1}{2} \int_0^l \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_f(s) \cdot \alpha'_f(s)^\perp dt \\ &= -\frac{1}{2} \alpha(s) \cdot (f(s)T(s)) \Big|_0^l + \int_0^l f(s) ds \\ &= \int_0^l f(s) ds. \end{aligned}$$

Na última linha usamos a condição  $f(0) = f(l)$  e o fato de  $\alpha$  ser uma curva de Jordan regular. □

## 4 Demonstração da desigualdade isoperimétrica

Nesta seção vamos demonstrar a desigualdade isoperimétrica. Aqui faz-se necessário enunciar o Teorema isoperimétrico no contexto de curvas regulares de classe  $C^2$ .

**Teorema 11** (Desigualdade isoperimétrica). *Seja  $\Gamma$  o traço de uma curva de Jordan regular de classe  $C^2$ , comprimento  $L(\Gamma)$  e delimitando uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $A(\Omega)$  é a área de  $\Omega$ , então*

$$L(\Gamma)^2 - 4\pi A(\Omega) \geq 0.$$

*Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Gamma$  é uma circunferência.*

*Prova.* Suponhamos que a curva  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cujo traço é igual a  $\Gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco. A demonstração será dividida em duas partes:

- (i) Para  $t > 0$  suficientemente pequeno considere a variação  $\Gamma_t(1)$  da curva  $\alpha$  correspondente à função  $f \equiv 1$ . Por simplicidade, denotemos por  $\Omega_t$  a região delimitada pelas curvas da variação  $\Gamma_t(1)$ . Deste modo, se  $D_t$  é um disco aberto de raio  $t$  e centrado na origem, temos

$$\Omega_t \supset \Omega + D_t.$$

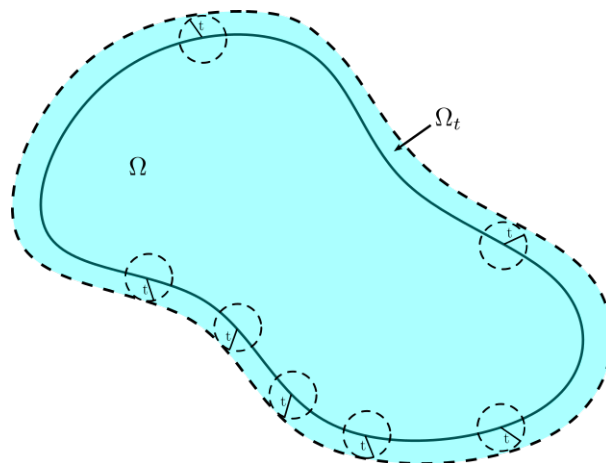


Figura 8: Conjunto  $\Omega + D_t$

Da relação  $A(\Omega_t) \geq A(\Omega + D_t)$  e da desigualdade de Brunn-Minkowski (Teorema 2) concluímos que

$$\begin{aligned} A(\Omega_t) &\geq A(\Omega + D_t) \\ &\geq [A(\Omega)^{1/2} + A(D_t)^{1/2}]^2 \\ &= A(\Omega) + 2A(\Omega)^{1/2}A(D_t)^{1/2} + A(D_t) \\ &= A(\Omega) + 2tA(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi} + \pi t^2 \\ &> A(\Omega) + 2tA(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

como  $t > 0$ ,

$$\frac{A(\Omega_t) - A(\Omega)}{t} > 2A(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi}.$$

Fazendo  $t \rightarrow 0^+$  encontramos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\Omega_t) \geq 2A(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi}.$$

Usando a fórmula de primeira variação da área (Lema 10) podemos escrever

$$\int_0^l f(s)ds \geq 2A(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi}.$$

Por outro lado, estamos supondo  $f \equiv 1$  e  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja,  $l = L(\Gamma)$ . Segue que

$$L(\Gamma) \geq 2A(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi}$$

e assim,

$$L(\Gamma)^2 \geq 4\pi A(\Omega).$$

(ii) Se  $S_r$  é uma circunferência de raio  $r$ , então

$$L(S_r)^2 = 4\pi^2 r^2 = 4\pi A(D_r),$$

isto é,

$$L(S_r)^2 - 4\pi A(D_r) = 0.$$

Portanto, a igualdade na desigualdade isoperimétrica ocorre quando  $\Gamma$  é uma circunferência de raio arbitrário.

Suponhamos agora que  $\Gamma$  satisfaz

$$L(\Gamma)^2 - 4\pi A(\Omega) = 0.$$

Dada uma função diferenciável  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(0) = f(l)$ , considere a variação  $\Gamma_t(f)$  da curva  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (parametrização de  $\Gamma$ ) correspondente à função  $f$ , onde  $|t| < \delta$  para algum  $\delta > 0$ . Então, a função  $h : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$h(t) = L(\Gamma_t(f))^2 - 4\pi A(\Omega_t(f)),$$

é diferenciável pelos Lemas 9 e 10 e atinge o seu valor mínimo no ponto  $t = 0$  pois  $h(t) \geq 0$  pela primeira parte da demonstração e  $h(t) = 0$  por hipótese. Assim

$$0 = h'(0) = 2L(\Gamma) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(\Gamma_t(f)) - 4\pi \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\Omega_t(f)).$$

Usando as fórmulas de variação obtidas nos Lemas 9 e 10, podemos escrever

$$\int_0^l (2L(\Gamma)\kappa(s) - 4\pi)f(s)ds = 0$$

para toda função diferenciável  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $f(0) = f(l)$ . Escolhendo

$$f(s) = 2L(\Gamma)\kappa(s) - 4\pi,$$

onde  $\kappa : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  é a função curvatura de  $\alpha$ , concluímos que

$$2L(\Gamma)\kappa(s) - 4\pi = 0 \quad \text{para todo } s \in [0, l],$$

ou seja, a função curvatura  $\kappa : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $\kappa \equiv 2\pi/L(\Gamma)$ . Segue da proposição 7 que  $\Gamma$  é uma circunferência.

□

## 5 Sobre o caso tridimensional da desigualdade isoperimétrica

Conforme foi citado na introdução deste trabalho, os resultados aqui apresentados podem ser estendidos para superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Neste caso, a desigualdade isoperimétrica é dada pelo

**Teorema 12** (Desigualdade isoperimétrica espacial). *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície compacta e conexa de área  $A(S)$  e delimitando uma região  $\Omega$ . Se  $V(\Omega)$  é o volume de  $\Omega$ , então*

$$A(S)^3 - 36\pi V(\Omega)^2 \geq 0.$$

*Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $S$  é uma esfera.*

A demonstração completa do Teorema 12 pode ser encontrada em MONTIEL e ROS, e segue a mesma linha apresentada neste trabalho com as devidas adaptações. Neste contexto, a desigualdade de Brunn-Minkowski é aplicada no caso  $n = 3$  e as fórmulas de variação são estendidas para a variação da área da superfície  $S$  e para a variação do volume da região delimitada por  $S$ . Aqui, a curvatura média da superfície desempenha o papel da curvatura no caso de curvas planas.

Seguindo o mesmo caminho do caso bidimensional, é possível mostrar que as superfícies que verificam a igualdade no Teorema 12 são aquelas que têm curvatura média constante. Neste ponto, podemos aplicar o Teorema de Alexandrov que afirma que, se uma superfície compacta e conexa tem curvatura média constante, então esta superfície tem que ser a esfera.

## Referências

- ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. Geometria diferencial das curvas no  $\mathbb{R}^2$ . 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020. ISBN 978-65-990395-4-6.
- ANTON, H.; RORRES, C. Álgebra linear com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- BLÅSJÖ, V. The Isoperimetric Problem. The American Mathematical Monthly, v. 112, ed. 6, p. 526-566, 2005.
- MONTIEL, S.; ROS, A. Curves and surfaces. 2nd. ed. American Mathematical Soc., 2009. v. 69.
- STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. Real analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces. New Jersey: Princeton University Press, 2005. v. 3.
- TENENBLAT, K. Introdução à geometria diferencial. Editora Blucher, 2008.
- VIRGÍLIO, P. Eneida: Tradução de Manoel Odorico Mendes. Clássicos Jackson, 1854. v. 3.