ReBECEM | Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática

ASPECTOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

ASPECTS OF REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION

Regina Luzia Corio de Buriasco[1]

Gabriel dos Santos e Silva[2]

Resumo: Neste texto, apresentamos alguns aspectos teóricos da Educação Matemática Realística, evidenciando os seis princípios, com base em um estudo de textos de autores dessa abordagem. Buscamos discutir as noções de matemática como atividade humana, matematização, conhecimento matemático, entrelaçamento entre domínios da matemática, contexto, realidade, fenomenologia didática, inversão antididática, reinvenção guiada, aprendizagem, níveis de aprendizagem e interatividade, a fim de explorar ideias que configuram a abordagem da Educação Matemática Realística.

Palavras-chave: Educação Matemática; Educação Matemática Realística; Reinvenção Guiada; Matematização.

Abstract: In this text, we present some theoretical aspects of Realistic Mathematics Education, evidencing the six principles, based on a study of texts of author from this approach. We persue to discss notions, as mathematics as a human activity, mathematization, mathematical knowledge, intertwining of mathematical domanis, context, reality, didactical phenomenology, antididactic inversion, guided reinvention, learning, levels in learning and interactivity, aiming to explore ideas that configure the approach of Realistic Mathematics Education.

Keywords: Mathematics Education; Realistic Mathematics Education; Guided Reinvention; Mathematization.

1 Introdução

Freudenthal (1973), em seu livro *Mathematics as an Educational Task*, faz críticas a respeito de como o ensino de matemática acontecia nas escolas e centros de formação de professores, no qual os estudantes são silenciosos, passivos, receptores de algum conhecimento pronto e acabado, considerando-se apenas o componente individual, e não o social, da aprendizagem[3]. A partir dessa crítica, o autor apresenta um método de ensino que denomina reinvenção guiada (FREUDENTHAL, 1973; SANTOS, 2014).

---

[1]Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Professora Associada da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: reginaburiasco@gmail.com

[2]Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Discente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: gabriel.santos22@gmail.com

[3]De acordo com De Lange (1999), a Educação Matemática Realística RME pode ser considerada como uma abordagem socioconstrutivista.

Com base nas ideias de Freudenthal, Treffers (1991) afirma que a Educação Matemática Realística foi configurada a partir de cinco princípios de ensino e de aprendizagem: “exploração fenomenológica”, “construção por instrumentos verticais”, “autoconfiança: construções e produções próprias dos estudantes”, “interatividade” e “entrelaçamento”. Van den Heuvel-Panhuizen (2000), por sua vez, apresenta uma lista com seis princípios: da realidade, de níveis, da interatividade, do entrelaçamento, da atividade e da orientação. De acordo com a autora, a lista contém os princípios de Treffers (1991) acrescidos do princípio da orientação, por considerar a importância que Freudenthal dá à reinvenção guiada. Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2000), esses seis princípios devem ser vistos relacionados entre si, não de maneira biunívoca, mas a partir de uma complexa rede de relações. De maneira geral, pode-se dizer que “o princípio da orientação significa que os estudantes dispõem de uma oportunidade ‘guiada’ de ‘reinventar’ a matemática” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 5, tradução nossa) experimentando “um processo semelhante ao processo pelo qual a matemática foi inventada” (KWON, 2002, p. 3, tradução nossa).

Neste artigo, apresentamos alguns aspectos teóricos da Educação Matemática Realística, evidenciando os seis princípios, a partir do estudo de autores de textos dessa abordagem.

2 Aspectos da RME[4]

Tomando a matemática como uma atividade, um “objeto” de conhecimento que tem em si movimento, modificação e ação, a RME valoriza o “fazer matemática”, a ação, ao invés do produto final (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000), ainda que a atividade não seja vista como objetivo em si mesma (TREFFERS, 1987).

Treffers (1987) afirma que tomar a matemática como atividade indica uma oposição às ideias de educação centrada no estudante ou na disciplina e, coloca o centro na atividade, em uma concepção em que estudante, objeto de estudo e sociedade não devem ser vistos como elementos contraditórios ou separados (TREFFERS, 1987). A matemática é considerada como uma atividade exercida por seres humanos e não somente por aqueles que são matemáticos. Ela é relevante para a sociedade e de valor humano, ou

[4] RME – *Realístic Mathematics Education.*

seja, tem valor para a constituição da humanidade do indivíduo, enquanto uma atividade relevante para a sociedade a qual ele pertence.

Considerando matematizar como a atividade de organizar e lidar com assuntos por meio da matemática, o "fazer matemática" envolve, por exemplo, estratégias com características de

> • **generalidade**: generalizar (procurando analogias, classificação, estruturação);
> • **certeza**: refletir, justificar, provar (usando uma abordagem sistemática, elaborando e testando conjecturas, etc.);
> • **exatidão**: modelar, simbolizar, definir (limitar interpretações e validar);
> • **brevidade**: simbolizar e esquematizar (desenvolver procedimentos padrão e notações) (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 781, tradução nossa, grifos do autor),

e atividades como:

> • identificar as especificidades matemáticas no contexto geral;
> • esquematizar;
> • formular e visualizar o problema;
> • descobrir relações e regularidades;
> • reconhecer similaridades em diferentes problemas;
> • representar uma relação em uma fórmula;
> • provar regularidades;
> • refinar e ajustar modelos;
> • combinar e integrar modelos;
> • generalizar (DE LANGE, 1999).

Gravemeijer e Doorman (1999) afirmam que a reinvenção guiada se dá no processo de matematização progressiva, em que os estudantes podem resolver problemas de contexto em diferentes níveis de compreensão, de tal modo que comuniquem suas resoluções a fim de que possam progredir para níveis mais avançados de compreensão.

De maneira geral, é possível sintetizar que

> ✓ reinventar matemática se dá por meio do "fazer matemática";
> ✓ matematização progressiva é um meio pelo qual se trabalha a reinvenção guiada.

Na RME, a matemática é vista como uma atividade cujo foco está na ação, no fazer, na matematização. Ao conjunto de conhecimentos historicamente acumulado e validado Freudenthal dá o nome de conhecimento matemático.

Defende-se, na RME, a ideia de que os conteúdos escolares referentes ao conhecimento matemático devem ser vistos como fios entrelaçados. A isso denomina-se princípio do entrelaçamento. "O princípio do entrelaçamento significa que os domínios do conhecimento matemático como número, geometria, medidas, e tratamento da informação não são considerados como capítulos isolados no currículo, mas como fortemente integrados" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 5, tradução nossa). Widjaja e Heck (2003) consideram que, a partir desse princípio, há conexões com outras disciplinas e com problemas do mundo real. Nesse sentido, essas conexões estabelecidas propiciam uma fonte para os contextos das situações e problemas, tendo a realidade e os fenômenos como fonte.

Ameron (2002, p. 53, tradução nossa) aponta implicações do princípio do entrelaçamento para a aprendizagem, ao afirmar que

> processos de aprendizagem podem se tornar mais conectados por entrelaçamento dos conteúdos de aprendizagem. De acordo com Freudenthal não é sensato nem desejável organizar a aprendizagem em faixas separadas, que são, em grande parte, independentes umas das outras. Em vez disso, ele favoreceu um entrelaçamento mútuo e forte entre os conteúdos de aprendizagem, talvez até mesmo envolvendo momentos de aprendizagem prospectiva e retrospectiva para esta finalidade.

De maneira geral, aprendizagem prospectiva refere-se à utilização, por estudantes ou professor, de matemática informal para lidar com situações ou problemas. Aprendizagem retrospectiva, por sua vez, refere-se à aprendizagem num contexto de retomada da aprendizagem prospectiva, de tal modo que se torne mais formal. Para Freudenthal, “aprendizagem retrospectiva tem dupla finalidade: enraizar o novo conhecimento a um antigo e fortalecer as velhas raízes” (FREUDENTHAL, 1991, p. 118, tradução nossa).

Ainda em relação à aprendizagem, Freudenthal considera que,

> em vez de funcionar como faixas separadas que, exceto por referências acidentais e empréstimos, são independentes umas das outras, a aprendizagem deve ser organizada em domínios que são mutuamente entrelaçados tão cedo, tão longo e tão forte quanto possível (FREUDENTHAL, 1991, p. 118, tradução nossa).

Embora na RME se entenda que os domínios do conhecimento matemático devem ser entrelaçados, ainda assim, admite que possam existir “pontas soltas”, ou seja, conteúdos que, por algum motivo, não podem ser entrelaçados aos demais. Nesse caso, o recomendável é que essas pontas soltas sejam trabalhadas na primeira oportunidade em que possam ser conectadas com outros conteúdos para dar continuidade ao entrelaçamento (FREUDENTHAL, 1991).

De maneira geral, é possível sintetizar que

> ✓ os domínios do conhecimento matemático que serão reinventados são vistos de modo entrelaçado;
> ✓ os conteúdos de cada domínio do conhecimento matemático também são vistos como entrelaçados.

Na Educação Matemática Realística, o trabalho com situações e problemas tem um papel importante para a aprendizagem matemática. De acordo com Gravemeijer e

Terwel (2000), inicia-se o processo de aprendizagem quando o estudante lida com situações da realidade. Para os autores,

> os estudantes devem começar por matematizar assuntos da realidade. Depois, eles devem mudar para analisar sua própria atividade matemática. Este último procedimento é essencial, uma vez que ele contém uma componente vertical, que Freudenthal (1971, p. 417), com referência a Van Hiele, descreveu da seguinte forma: 'a atividade em um nível é submetida à análise no próximo, a matéria operacional num nível torna-se assunto no próximo nível' (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 787, tradução nossa).

Na abordagem realística, realidade é entendida "como uma mistura de intepretação e experiência sensorial" (GRAVEMEIJER; COBB, 2006, p. 63, tradução nossa), não apenas como uma experiência com o que é considerado "concreto". Nesse sentido, faz parte da realidade, por exemplo, o que é material, o que é concreto, o que pode ser experienciado a partir da imaginação, de experiências mentais e dos sentidos (o que é idealizado). Isso implica que o conhecimento matemático também pode ser considerado como parte da realidade. Desse modo, usa-se o adjetivo *realístico* para as situações pertencentes à realidade como é entendida pela abordagem.

Freudenthal (1981) aponta a importância dos contextos para a matematização. De acordo com o autor, contextos oferecem oportunidades para matematização e, consequentemente, para aprender. Para Doorman e Gravemeijer (2009), a matematização à qual Freudenthal (1981) se refere é a matematização progressiva, que é oportunizada a partir da boa escolha de contextos e envolve atividades de formalização e generalização que visam constituir um processo de abstração (DOORMAN; GRAVEMEIJER, 2009).

Na RME, buscam-se nos contextos das tarefas oportunidades para matematizar e reinventar conteúdos matemáticos (DE LANGE, 1999). Nesse sentido, De Lange (1999) apresenta uma classificação em relação à relevância e ao uso dos contextos: contextos de *ordem zero* são utilizados apenas para fazer com que um problema pareça-se com um problema do "mundo real"[5]; contextos de *primeira ordem* são aqueles em que o contexto é relevante e necessário para resolver o problema e verificar a resposta; contextos de *segunda ordem* são aqueles em que é necessária alguma matematização para resolver o problema e o contexto é necessário e relevante para verificar a resposta; contextos de *terceira ordem* servem para a construção ou reinvenção de novos conteúdos matemáticos (DE LANGE, 1999, p. 26).

---

[5] Aqui, a expressão "mundo real" foi escrita com o uso de aspas por tratar-se de uma noção de realidade de acordo com o dicionário Houaiss, não de acordo com a concepção de Freudenthal. Além disso, usam-se as aspas por aparentar existir uma distinção entre "mundo real", "mundo da matemática" e outros mundos.

Ainda que os contextos das tarefas tenham um importante papel no processo de matematização e reinvenção, para Drijvers (2000) uma atenção principal deve ser dada aos processos em si (de matematização e reinvenção). Além disso, ressalta-se que a

> realidade e o que uma pessoa percebe como o senso comum não são estáticos, mas crescem, e são afetados pelo processo de aprendizagem do indivíduo. O objetivo da Educação Matemática Realística, então, é apoiar os estudantes na criação de uma nova realidade matemática. Isto é para ser realizado pela reinvenção guiada, ou 'matematização progressiva' – se tomarmos a perspectiva do estudante (GRAVEMEIJER; COBB, 2006, p. 63-64, tradução nossa).

De maneira geral, é possível sintetizar que

> ✓ na reinvenção guiada, o processo de aprendizagem se inicia quando o estudante lida com situações realísticas;
> ✓ são utilizados problemas de contexto para dar oportunidade aos estudantes de reinventar matemática;
> ✓ contextos de terceira ordem, especialmente, oportunizam reinvenção guiada;
> ✓ a reinvenção guiada pode ser um caminho para auxiliar o estudante a criar uma nova realidade matemática.

A partir dos contextos advindos da realidade, Freudenthal (1983) fala em fenomenologia didática[6], que, de acordo com Drijvers (2003), pode auxiliar a organizar a reinvenção guiada por meio da matematização progressiva. Para definir fenomenologia de acordo com sua perspectiva, Freudenthal (1971), antes, faz uma distinção entre fenômeno (*phainómenon*) e objeto de pensamento (*nooumenon*): fenômenos são situações ou objetos realísticos e o *nooumenon* serve para descrever e organizar um *phainómenon* (FREUDENTHAL, 1971).

Com relação aos objetos matemáticos, a Educação Matemática Realística entende que podem ser experienciados como *phainómenon*, ainda que sejam *nooumenon*. Nesse sentido, Freudenthal explica que, por exemplo, "números são *nooumenon*, mas trabalhar com números pode ser um *phainómenon*" (FREUDENTHAL, 1971, p. 28, tradução nossa, grifos do autor). Entende-se que os objetos matemáticos podem assumir a condição de *phainómenon* uma vez que são aceitos, na RME, como objetos da realidade.

A partir dessa distinção, pode-se dizer que, para a RME,

> fenomenologia de um conceito matemático, uma estrutura matemática, ou uma ideia matemática significa [...] descrever esse *nooumenon* em relação ao *phainómenon* em que ele é o meio de organização, indicando que fenômenos ele é criado para organizar, e para quais ele pode ser estendido, como ele atua sobre esses fenômenos como meio de organização (FREUDENTHAL, 1971, p. 28, tradução nossa, grifos do autor).

---

[6] Freudenthal (1983) afirma que o termo "fenomenologia" não é utilizado por ele do mesmo modo que o utilizam os filósofos Hegel, Husserl e Heidegger.

Para Drijvers (2003), a fenomenologia didática proposta por Freudenthal pode servir como um meio para que ocorra reinvenção guiada por meio da matematização progressiva. Nesse sentido, o trabalho de reinvenção dos objetos mentais se dá, de acordo com Keijzer (2003), quando se reexperimenta o processo histórico vivido na elaboração daquele objeto matemático. Tais ideias vão ao encontro das ideias de Freudenthal (1991), uma vez que este assume que, didaticamente, a vivência da elaboração de objetos matemáticos é um fato fenomenológico e surge por meio da reinvenção guiada.

De maneira geral, é possível sintetizar que

> ✓ a reinvenção guiada pode ser organizada por meio da fenomenologia didática;
> ✓ busca-se entender como a matemática foi inventada de maneira fenomenológica.

A RME dá destaque ao papel dos contextos e fenômenos realísticos para a aprendizagem matemática. Portanto a escolha de contextos que oportunizem matematização e reinvenção guiada é papel do professor.

> Em uma abordagem de reinvenção, [...] problemas de contexto bem escolhidos oferecem aos estudantes a oportunidade de desenvolver modelos informais altamente específicos ao contexto e estratégias de resolução [...]. Estes procedimentos de resolução informais podem então se tornar assunto de formalização e generalização para constituir um processo de maior abstração que, na RME, é chamado de: matematização progressiva (DOORMAN; GRAVEMEIJER, 2009, p. 201, tradução nossa).

Gravemeijer e Terwel (2000) afirmam que iniciar o trabalho com contextos em que os estudantes têm a oportunidade de utilizar diferentes estratégias auxilia o professor a guiar os estudantes na reinvenção do que usualmente se conhece como conteúdo matemático.

Esse movimento dos contextos, situações e fenômenos para a matemática formal, por meio da reinvenção guiada, é considerado por Freudenthal como um caminho natural para a aprendizagem. Para ele,

> utilizar currículos cientificamente estruturados, nos quais os estudantes são confrontados com uma matemática pronta, é uma "inversão antididática". Eles baseiam-se na premissa falsa de que os resultados de um raciocínio matemático, colocados numa lista de conteúdos, podem ser transferidos diretamente para os estudantes. [...] De acordo com Freudenthal, isso significa colocar a “carroça na frente dos bois”: tirar dos estudantes a oportunidade deles mesmos desenvolverem matemática. Matemática, em outras palavras, deve ser ensinada na ordem em que os próprios estudantes possam inventá-la (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, tradução nossa).

A expressão “inversão antididática” é utilizada para denominar esse movimento inverso, que Gravemeijer (2004) diz ser um “virar de cabeça pra baixo” o processo educacional, em que se inicia com matemática formal para depois apresentar contextos em que a matemática pode ser usada como aplicação. “Antididática” faz um papel de adjetivo, qualificando a inversão como não sendo didática.

Gravemeijer e Terwel (2000) afirmam que essa crítica de Freudenthal se dá a partir do momento em que se passou a utilizar o produto da atividade de alguns matemáticos como ponto de partida para o ensino. Para os autores, começou-se a ensinar o resultado das atividades em vez de se propor as atividades em si (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

Drijvers (2003), com base em Kindt (1980, 2000), ressalta que a crítica de Freudenthal à inversão antididática não exime o trabalho com métodos rotineiros mais formais. De acordo com os autores, esses métodos são eficientes quando reinventados pelo estudante e “liberam-no” de reinventar os métodos de resolução todas as vezes em que forem necessários. A dificuldade encontrada nesse processo é que os professores têm gastado mais tempo na fase formal do que no processo de reinvenção, tornando as estratégias encurtadas cedo demais (DRIJVERS, 2003).

De maneira geral, é possível sintetizar que

> ✓ cabe ao professor a escolha de contextos que oportunizem matematização e reinvenção guiada;
> ✓ Freudenthal critica o ensino de matemática que inicia com a matemática formal para depois mostrar aplicação em contextos; a esse tipo de ensino é dado o nome “inversão antididática”, cujo caminho natural seria o de reinvenção guiada;
> ✓ após a reinvenção de procedimentos rotineiros mais formais, o professor pode incentivar os estudantes a utilizá-los para que não seja necessário reinventá-los todas as vezes que forem necessários.

No início dos anos 2000, a maioria dos pesquisadores da área de Educação Matemática considerava a aprendizagem como um processo de construção. Essa ideia de aprendizagem como processo de construção é princípio chave para a RME e “é descrita como um processo de reinvenção: até certo ponto, os estudantes recapitulam o processo de aprendizagem da humanidade” (KEIJZER; GALEN; OOSTERWALL, 2004, p. 1, tradução nossa).

Nesse sentido, espera-se

> que os estudantes desempenhem um papel ativo em construir seu próprio conhecimento matemático [...]. A educação é projetada para se encaixar o máximo possível no conhecimento informal dos estudantes, e por isso ajudá-los a alcançarem um nível mais alto de entendimento através da reinvenção guiada (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 89, tradução nossa).

De acordo com Van den Boer (2004), o papel ativo que os estudantes desempenham refere-se a, entre outras atividades, justificar suas estratégias de resolução e escutar os outros estudantes, tentar entender as diferentes estratégias, pedir esclarecimentos nas resoluções e participar de discussões. Ameron (2002) elenca outras características de atitudes do estudante que contribuem para a aprendizagem matemática em um ambiente de reinvenção guiada: participação ativa, reflexão e interesse em novas estratégias de resolução.

De acordo com Keijzer, Galen e Oosterwall (2004, p. 6, tradução nossa),

> o conceito de reinvenção faz que os desenvolvedores considerem a construção do conhecimento matemático de um ponto de vista histórico. E quando o ponto de vista histórico é levado a sério, o ensino de matemática não é focado em aprender algoritmos e procedimentos, mas terá como objetivo compreender conceitos principais, no sentido de que o princípio da reinvenção abre o caminho para o desenvolvimento da Educação Matemática, uma vez que ajuda a descrever a atividade dos estudantes (KEIJZER; GALEN; OOSTERWALL, 2004, p. 6, tradução nossa).

Para Streefland (1991), os estudantes não precisam refazer os caminhos percorridos pela humanidade para a invenção de um conteúdo matemático, mas devem agir de acordo com o mesmo espírito[7]. Fazendo isso, acaba-se por "impedir que o processo de aprendizagem comece a partir de um nível muito elevado de abstração e, ao mesmo tempo, pode ajudar a implementar uma progressão gradual em matematização de acordo com um exemplo histórico" (STREEFLAND, 1991, p. 19, tradução nossa).

É nesse sentido que Ameron (2002) destaca que a ideia do "guiar" assume um importante papel na construção do conhecimento, uma vez que é a orientação que faz os estudantes não precisarem inventar os conteúdos por si só, nem dispor somente de suas ferramentas matemáticas, como foi feito durante o processo histórico. Ainda assim, os estudantes vão se tornando autores do seu conhecimento matemático seguindo um caminho guiado por uma reconstrução racional do processo histórico de elaboração do conhecimento matemático (STREEFLAND, 1991).

De maneira geral, é possível sintetizar que

> ✓ a aprendizagem acontece como um processo de construção, em que o estudante recapitula o processo histórico de elaboração do conhecimento matemático, não refazendo os caminhos percorridos historicamente, mas agindo de acordo com o mesmo espírito;
> ✓ busca-se que os estudantes alcancem níveis mais altos de entendimento a partir de seus conhecimentos informais ou não, por meio da reinvenção guiada;
> ✓ o estudante tem papel ativo na reinvenção guiada;
> ✓ cabe ao estudante, além de outras atividades, justificar suas estratégias de resolução e escutar com atenção os outros estudantes, tentar entender as

[7] "Agir de acordo com o mesmo espírito" tem o sentido de que as ações dos estudantes se assemelham em alguns aspectos às ações que ocorreram na elaboração do conhecimento matemático, como o encontro com a situação da qual conteúdos serão reinventados ou a utilização de conhecimentos próprios.

> diferentes estratégias, pedir esclarecimentos nas resoluções, participar de discussões, participação ativa, reflexão e interesse em novas estratégias de resolução;
> ✓ o estudante vai se tornando autor do seu conhecimento matemático e responsável por ele.

Em relação à aprendizagem, na Educação Matemática Realística, as estratégias informais de resolução dos estudantes são consideradas como ponto de partida para se chegar a modelos mais formais de resolução. Esse processo, em que se busca uma passagem entre conhecimento matemático informal e matemática formal, é chamado de princípio de níveis (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

Aos estudantes deve ser dada a oportunidade de desenvolverem suas próprias estratégias informais e intuitivas de resolução, a fim de que, por meio de estratégias pré-formais e da orientação do professor, comecem a utilizar estratégias mais formais (VAN REEWIJK, 2001).

Além disso,

> o princípio de reinvenção sugere investigar se as interpretações e soluções informais dos estudantes podem "antecipar" práticas matemáticas mais formais. Se assim for, o raciocínio inicialmente informal dos estudantes pode ser usado como um ponto de partida para o processo de reinvenção (GRAVEMEIJER, 2008, p. 289, tradução nossa).

Entende-se que a matematização presente em um nível pode servir como objeto de investigação para um próximo nível (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003, p. 11). Ainda assim, o caminho que vai do uso de estratégias informais ao uso de estratégias mais formais não é sempre direto, fácil e sem percalços. Essa mesma autora afirma que a passagem entre os níveis acontece por meio da *reflexão* a partir de *modelos* dos estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003), o que pode ocorrer ao mesmo tempo em que lidam com suas atividades matemáticas. "A conjectura é que agir com estes modelos vai ajudar os estudantes a reinventar a matemática mais formal que é objetivada (GRAVEMEIJER, 2007, p. 11, tradução nossa)".

Não se entende que a matemática formal se configura como separada ou independente do sujeito, mas que emerge da transição entre modelos utilizados pelos estudantes, em especial da transição entre "modelo de" e "modelo para" (GRAVEMEIJER, 2007). "Modelo de" é aquele que organiza uma situação, enquanto o "modelo para" é, de forma mais geral, o que organiza um conjunto de situações (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003; GRAVEMEIJER, 2007).

Essa ideia de "modelo de" e "modelo para" inspirou Gravemeijer (2007) a propor que os níveis podem ser entendidos como:

> • situacional: no qual o domínio específico, conhecimento e estratégias são utilizados unicamente dentro do contexto da situação;
> • referencial (modelo de): no qual modelos e estratégias se referem à situação descrita no problema, são os "modelos de";
> • geral (modelo para): no qual o foco matemático das estratégias se sobrepõe à referência ao contexto, com isso, os modelos servem para representar outras situações, são os "modelos para";
> • formal: no qual se trabalha com procedimentos e notações já convencionais (CIANI, 2012, p. 31-32).

Na abordagem realística, portanto em uma abordagem de reinvenção guiada, o caminho começa com estratégias informais a fim de obter estratégias formais, enquanto, na abordagem estruturalista, o caminho começa pela apresentação de estratégias formais, seguindo para o uso informal de conteúdos em situações (DRIJVERS, 2000; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003).

Ainda que a RME dê atenção aos processos envolvidos na elaboração do conhecimento de forma intrínseca ao indivíduo, considera-se, também, que aprender é uma atividade social. De Lange (1999) afirma que, por meio de discussão, justificação, explicação, ilustração e analogias, os estudantes que lidam com problemas em diferentes níveis podem construir argumentos para elaborar ou comunicar resoluções para tarefas matemáticas, contribuindo tanto para a aprendizagem da turma quanto para a aprendizagem individual. Com a argumentação, os estudantes constroem estruturas semelhantes com base em diferentes situações de argumentação, "o que leva ao desenvolvimento matemático conceitual" (DE LANGE, 1999, p. 30, tradução nossa).

Gravemeijer (2008) destaca que o aspecto coletivo da aprendizagem na reinvenção guiada se dá, de maneira especial, pela interação entre estudantes, tendo essa interação a função de catalisar a aprendizagem dos sujeitos. Portanto, espera-se que as tarefas suscitem o maior número de resoluções distintas possível, para serem exploradas pelo professor, que promove uma discussão entre os estudantes, destacando as diferenças entre os conteúdos matemáticos subjacentes às resoluções. Essa pode ser uma maneira para promover o processo de reinvenção guiada (GRAVEMEIJER, 2008).

Embora a RME ressalte a importância da comunicação das resoluções entre estudantes que resolvem tarefas em diferentes níveis, "isso não significa que a turma toda está procedendo coletivamente e que todo estudante está seguindo o mesmo caminho e alcançando o mesmo nível de desenvolvimento no mesmo momento" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 9, tradução nossa).

A essa ideia de que a aprendizagem acontece, também, por meio de uma interação social, dá-se o nome de princípio da interatividade, subsidiada pelas ideias de Freudenthal (1981), que afirmava que,

> problemas educacionais são resolvidos no processo educacional ao invés de na poltrona ou no laboratório [...]. Se isso é verdade, então no nosso mundo real resolvê-los será um processo lento, **um processo social**, um longo processo de aprendizagem da sociedade. (FREUDENTHAL, 1981, p. 147, tradução nossa, grifos nossos).

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ por meio da reinvenção guiada pode-se preencher a lacuna existente entre a matemática informal e a matemática formal;
- ✓ usam-se as estratégias informais dos estudantes como ponto de partida para a reinvenção;
- ✓ a matemática formal emerge da transição entre “modelo de” e “modelo para”;
- ✓ a aprendizagem na reinvenção guiada é uma atividade social e acontece por meio da interação entre os estudantes (mutuamente) e o professor;
- ✓ cabe ao professor, entre outras atividades, promover discussões entre os estudantes a partir das diferentes resoluções suscitadas pelas tarefas;
- ✓ cabe ao professor, entre outras atividades, analisar a produção escrita dos estudantes para orientar os processos de ensino, aprendizagem e avaliação;
- ✓ a interação na reinvenção guiada ocorre por meio da comunicação (oral, escrita) da atividade matemática.

3 Arrematando

Os aspectos da RME aqui apresentados foram uma escolha, entre outras que poderiam ter sido feitas, a partir de um estudo de textos de autores da RME.

Entende-se que a reinvenção está relacionada com o objeto que será reinventado. No âmbito da Educação Matemática Realística, aos estudantes é dada a oportunidade de reinventar matemática. Para Freudenthal, a matemática é vista como uma atividade humana, ou seja, o foco está na ação ao invés de no produto; a essa ação (em que se organiza e se lida com situações, problemas, tarefas) é dado o nome de matematização, e a reinvenção é direcionada ao conjunto de conhecimentos historicamente acumulado, que Freudenthal denomina como conhecimento matemático. Para isso, buscam-se em contextos (realísticos) fenômenos que servem como ponto de partida para a reinvenção de conteúdos matemáticos.

Na perspectiva da Educação Matemática Realística, as estratégias dos estudantes passam por níveis, em que as mais informais podem tornar-se mais formais e, desse modo, suscitar a reinvenção de conceitos matemáticos, possibilitando que o estudante se torne autor do seu conhecimento matemático. Em relação ao componente social, as interações entre os estudantes (mutuamente) e com o professor, por meio de comunicação (oral, escrita) da atividade matemática, auxiliam o modo como se dá a reinvenção dos conteúdos matemáticos.

A abordagem realística dá igual importância à organização de situações por meio da matemática e ao lidar matematicamente com a própria matemática. A reinvenção guiada, portanto, permite um trabalho de lidar com a própria matemática por meio da matemática, e tem por finalidade possibilitar ao estudante tornar-se autor do seu conhecimento matemático.

Referências

AMERON, B. A. **Reinvention of early algebra**: developmental research on the transition from arithmetic to algebra. Tekst: Proefschrift Universiteit Utrecht, 2002.

CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2012. 166 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DOORMAN, M.; GRAVEMEIJER, K. Emergent modeling: Discrete graphs to support the understanding of change and velocity. **ZDM**: The International Journal on Mathematics Education, n. 41, p. 199-211, 2009.

DRIJVERS, P. Students Encountering Obstacles Using a CAS. **International Journal of Computers for Mathematical learning**, v. 5, s.n, p. 189-209, 2000.

DRIJVERS, P. **Learning algebra in a computer algebra environment**. 2003. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade de Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, The Netherlands, 2003.

FREUDENTHAL, H. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, H. Major problems in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, s.n., p. 133-150, 1981.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1983.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, K. Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education. In: APEC - TSUKUBA INTERNATIONAL CONFERENCE, 3, 2007, Tokyo Kanazawa and Kyoto. **Proceedings...** Tokyo Kanazawa and Kyoto, 2007. s.p. Disponível em: <http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/index_en.php>. Acesso em: 30 ago. 2014.

GRAVEMEIJER, K. RME theory and mathematics teacher education. In: SULLIVAN, P.; WOOD, T. (Eds.). **International handbook of mathematics teacher education**. Rotterdam: Sense Publisher, 2008. p. 238-302.

GRAVEMEIJER, K.; COBB, P. Design research from a learning design perspective. In: VAN DEN AKKER, J. et al. **Educational design research**. London: Routledge, 2006. s.p.

GRAVEMEIJER, K.; DOORMAN, M. Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. **Educational Studies in Mathematics**, n. 1, v. 39, p. 111-129, 1999.

GRAVEMEIJER, K.; TERWEL, J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, n. 6, v. 32, p. 777-796, 2000.

KEIJZER, R. **Teaching formal mathematics in primary education**. Supervisor: Prof.dr. J. Terwel .Utrecht, the Netherlands: CD-ß Press, 2003.

KEIJZER, R.; VAN GALEN, F.; OOSTERWALL, L. **Reinvention revisited**: learning and teaching decimals as an example. Paper presented at the ICME 10, 2004.

KWON, Oh Nam. Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations. **Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level. Hersonissos.** Greece. University of Crete, 2002.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

STREEFLAND, L. **Fractions in Realistic Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer, 1991.

TREFFERS, A. **Three Dimensions**: a model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

TREFFERS, A. Meeting innumeracy at primary school. **Educational Studies in Mathematics.** 22, 1991, p. 333-352.

VAN DEN BOER, C. If you know what I mean. In: DRIJVERS, Paul. **Classroom-based research in Mathematics Education**. Montana: Montana State University, 2004. s.p.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. **Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**, n. 1, v. 54, p. 09-35, 2003.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, L.; KISSANE, B.; HURST, C. (Eds.). **Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA, 2010. s.p.

VAN REEUWIJK, M. From informal to formal, progressive formalization: an example on “solving systems of equations.” In: CHICK, H.; STACEY, K.; VINCENT, J. (Eds.). **The future of the teaching and learning of algebra**: Proceedings of the 12th ICMI Study Conference**,** 2001, p. 613-620.

WIDJAJA, Y. B.; HECK, A. How a Realistic Mathematics Education approach and microcomputer-based laboratory worked in lessons on graphing at an Indonesian Junior High School. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**, Amsterdam, v. 26, n. 2, p. 1-51, 2003.

Recebido em: 05 de novembro de 2017.

Aceito em: 12 de dezembro de 2017.