ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

UM MODELO TEÓRICO DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE VARIÁVEL A PARTIR DAS DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO BRASIL E DA COLÔMBIA

A THEORETICAL MODEL OF THE MATHEMATICS FOR TEACHING OF THE CONCEPT OF VARIABLE FROM OFFICIAL CURRICULAR GUIDELINES FOR MATHEMATICS IN BRAZIL AND COLOMBIA

Olmar Arley Gómez[1]

Jonei Barbosa[2]

Resumo: Neste estudo, apresentamos um modelo teórico da Matemática para o Ensino do conceito de variável. Esta estrutura teórica discute como pode ser apresentada a variável na atividade escolar, e categoriza as diferentes situações em que aparece esse conceito no ensino da matemática. A estratégia metodológica adotada foi uma análise documental, cujas fontes são as diretrizes curriculares da Matemática do Brasil e da Colômbia. Ao final, estruturamos seis categorias: na primeira estudamos a variável como quantidade incógnita ou indeterminada; na segunda, nos referimos à variável na relação funcional; na terceira categoria, a variável é estudada como marcador de posição para definir narrativas associadas a sistemas numéricos ou para parametrizar rotinas matemáticas; na quarta categoria, a variável é analisada como nomenclatura no estudo da medida; na quinta, apresentamos a variável como nome de uma coleção de elementos; e na sexta e última categoria, descrevemos a variável como nome de figuras geométricas. Este modelo pode subsidiar pesquisas que focalizem o ensino do conceito de variável, assim como no trabalho de delineadores de materiais didáticos e na formação de professores.

Palavras-chave: Discurso; Realização; Conceito; Matemáticas para o Ensino; Variável.

Abstract: In this study, we present a theoretical model for Mathematics for Teaching of the concept of variable. This theoretical structure discusses how the variable is presented in the school activities, and categorizes the different situations in which this concept appears in the teaching of mathematics. The methodological strategy adopted was a documentary analysis, whose sources are the curricular guidelines for Mathematics in Brazil and Colombia. In the end, we chose six categories: in the first category, we study the variable as an unknown or indeterminate quantity; in the second, we refer to the variable in a functional relationship; in the third category, the variable is studied as a placeholder to define narratives associated with numerical systems or to parameterize mathematical routines; in the fourth category, the variable is analyzed as nomenclature in measurement studies; in the fifth, we present the variable as the name of a collection of elements; and in the sixth and last category, we describe the variable as the name of geometric figures. This model can support research that focuses on the teaching of the concept of variable, as well as on the work of educational material designers and for teacher training.

Keywords: Discourse; Realization; Concept; Mathematics for Teaching; Variable.

[1] Doutor em Ensino, Filosofía e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia (UFBA) e Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Secretaría de Educación de Medellín-Colombia, Medellín, Colômbia. E-mail: olmararley@gmail.com

[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Professor da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil. E-mail: jonei.cerqueira@ufba.br

1 Introdução

Este estudo se centra na *Matemática para o Ensino do conceito de variável*, a qual definimos provisoriamente como *modelos* que apresentam a *variável* tal como pode ser realizada na sala de aula. Nesta introdução, usaremos o termo *conceito* de forma intuitiva e mais adiante, na discussão teórica, sua definição será explicada de forma mais precisa. Portanto, a *Matemática para o Ensino* (a qual denotaremos com a sigla $\boldsymbol{M_pE}$) são modelos da matemática comunicada pelos professores, configurados nas diferentes experiências relacionadas com o ensino, tais como as pesquisas na Educação Matemática, a produção de material didático, os cursos de formação de professores, as avaliações em larga escala, as diretrizes curriculares da matemática, os livros didáticos e qualquer outra experiência relacionada com o ensino da matemática. Por hora, vamos entender por *modelo* um esquema que apresenta um conjunto de ideias que explicam um tema específico.

O nosso interesse é capturar a variabilidade de formas de apresentação do *conceito de variável*, para criar um modelo que organize tal diversidade. Especificamente, construiremos um modelo teórico, entendido como um esquema que apresenta uma discussão teórica acerca da *variável* e as relações dela com outros conceitos da matemática no ensino. Fizemos um recorte com o intuito de focar, particularmente, o conceito de *variável* delimitado nas diretrizes curriculares da matemática na Educação Básica do Brasil e da Colômbia, pois elas influenciam a geração das grades de estudo para a atividade em sala de aula. A escolha desses paises corresponde à nacionalidade dos pesquisadores deste estudo, e porque a união destes documentos darão mais sustentação para a nossa análise. Estas ideias serão ampliadas posteriormente na disussão teórica e no delineamento metodológico.

Neste estudo, chamaremos de *variável* a todas as letras usadas na matemática que se referem às quantidades, formas geométricas ou proposições, e com as quais se podem descrever enunciados em forma simbólica. Portanto, esclarecemos que, neste artigo, discutimos o *conceito de variável* em um sentido amplo, considerando-o como instrumento para simbolizar diferentes aspectos da matemática.

Assim, formulamos o objetivo deste artigo: *desenvolver um modelo teórico da* $\boldsymbol{M_pE}$ *do conceito de variável a partir das diretrizes curriculares da matemática do Brasil e da Colômbia*. Este *modelo teórico* é útil para o campo profissional, tanto para ser discutido pelos professores e levar tais ideias à sala de aula, quanto para a produção de materiais educativos (como por exemplo livros didáticos), ou ainda para revisar a formulação das diretrizes curriculares relacionadas com o ensino deste conceito. No campo de pesquisa, este modelo serve como quadro analítico para situações de sala de aula, análises de materiais curriculares, etc.

A seguir, apresentaremos algumas características do conceito de *variável*, com um olhar da matemática como forma de comunicação, cujas ideias nos ajudarão a elucidar melhor a definição de $\boldsymbol{M_pE}$. Posteriormente, explicamos o delineamento metodológico, e finalmente apresentaremos o modelo construído.

2 A variável como ferramenta de comunicação

Comecemos por localizar a perspectiva teórica que tomamos para o presente estudo. Como pressuposto inicial, olhamos a comunicação como uma atividade que se desdobra em uma diversidade de repertórios que falam de aspectos específicos da nossa atividade humana, os quais chamaremos de *discursos* (SFARD, 2008). Por exemplo, a *antropologia* é um discurso focado nas pessoas no sentido mais *lato*, cujo repertório fala das origens, evolução, desenvolvimentos físico e cultural, costumes sociais, crenças, etc. Assim, definimos a *matemática* como outro discurso, o qual se compõe por uma série de *palavras próprias*, como função, paralelepípedo, raio, polinômio, variável, cosseno, etc; pela sua *escrita especial* a partir de caracteres numéricos, símbolos literais, formas geométricas, gráficos no plano cartesiano, etc.; pelas *rotinas* – comumente chamadas de algoritmos –, entendidas como um conjunto sistemático de padrões que se repetem em determinados tipos de situações; e pelas *narrativas*, uma série de enunciados, verbais ou escritos, os quais são validados por um grupo de participantes do discurso – teoremas ou axiomas – (SFARD, 2008).

Outra característica do discurso matemático é que as *palavras* se desdobram em diferentes situações, comunicando diferentes – chamemos assim - *realizações*. Uma *realização*, segundo Sfard (2008), é cada uma das formas em que são usadas as *palavras próprias* do discurso matemático, as quais podem aparecer como palavras faladas ou escritas, desenhos, ícones, objetos manipuláveis ou até mesmo os gestos. Por exemplo, a palavra *variável* se *realiza* como incógnita em uma equação, ou em outras situações a mesma palavra *variável* é usada para falar das quantidades dependente e independente na relação funcional, etc. Inspirados em Sfard (2008), definimos *conceito* matemático como um conjunto de *realizações* que podem ser associadas a uma *palavra própria* do discurso que as designam.

Neste estudo, interessamo-nos no conjunto de *realizações* que podem ser associadas à palavra *variável*, as quais são reconhecidas na matemática pela sua escrita especial (letras maiúsculas ou minúsculas do alfabeto grego ou romano), e pelas *narrativas* e *rotinas* vinculadas a cada uma delas. Cada *realização* pode ser apresentada na matemática mediante diferentes *mediadores visuais*, como tabelas, expressões simbólicas, gráficos, desenhos, diagramas, etc. Chamaremos de *re-presentação* a ação de comunicar algo usando um *mediador visual.* Destacamos o prefixo *re* para indicar que *re-presentar* equivale a apresentar novamente uma *realização* fazendo uso de outro *mediador visual*.

Segundo Sfard (2008), o ensino das *realizações* de qualquer conceito está implicado por dois movimentos discursivos chamados *reificação* e *alienação*, portanto, também é válido para as *realizações* que configuram o *conceito de variável*. O princípio de *reificação*, por sua vez, apresenta as *realizações* da *variável* como ações comunicativas emergentes que transferem um enunciado verbal a outra forma de escrita simbólica – *re-presentação* –. As *realizações* da *variável*, portanto, podem surgir do processo de *reificação* que *re-presenta*, em forma genérica, um conjunto de ações comunicativas em uma estrutura comum mediante uma notação simbólica. Por exemplo, em alguns problemas matemáticos, o professor introduz um símbolo literal – geralmente escolhido de forma arbitrária – e o substituí em um enunciado, tal como mostramos a seguir:

Enunciado	**Símbolos literais arbitrários**	**Reificação do enunciado**
A idade atual de um pai é 20 anos mais que a idade do seu filho.	$\boldsymbol{p}$: Idade atual do pai $\boldsymbol{f}$: Idade atual do filho	$p = 20 + f$

Quadro 1: Exemplo da *reificação da variável*
Fonte: Autores

Por outro lado, o princípio de *alienação*, tal como descrito por Sfard (2008), apresenta as *realizações* da *variável* como símbolos dissociados de referências específicas, percebendo-os como uma forma discursiva sem relação com as atividades humanas. Desta forma, as *realizações* da *variável* são apresentadas de maneira impessoal, como se estivessem acontecendo de maneira autônoma, sem estar associadas a uma situação específica (SFARD, 2008), tal como observamos no exemplo a seguir:

Simplificar a expressão $\boldsymbol{15a^2 + 2a - 8}$

$$15a^2 + 2a - 8 = 15a^2 - 10a + 12a - 8 = 5a(3a - 2) + 4(3a - 2) = (3a - 2)(5a + 4)$$

Quadro 2: Exemplo de *alienação da variável*
Fonte: Autores

Embora estas ideias não sejam suficientes para entender a complexidade das *realizações*, os movimentos discursivos de *reificação* e *alienação* são instrumentos de compreensão importantes para o ensino da *variável*, cujas *realizações* aparecem em diferentes $\boldsymbol{M_pE}$, cujas ideias serão discutidas a seguir.

3 Uma Matemática para o Ensino do conceito de variável

Na década de 1980, Shulman (1986, 1987) fez contribuições notáveis para o estudo do ensino, introduzindo o conceito de *conhecimento pedagógico do conteúdo* – PKC (do inglês *pedagogicalcontentknowledge*), como um tipo de conhecimento exclusivo dos professores que se relaciona com a sua forma de ensinar (SHULMAN, 1986). Essas ideias geraram um conjunto de pesquisas que aprofundaram o PKC, e particularmente na Educação Matemática o ensino começou a ser discutido como campo especializado e professional do professor (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; DAVIS; SIMMT, 2006; EVEN, 1990; BALL; HILL; BASS, 2005; HUILLET, 2009; ROWLAND, 2008).

A área de pesquisa chamada *Matemáticas para o Ensino* ($\boldsymbol{M_pE}$) surgiu a partir destas discussões. Por um lado, há quem defina a $\boldsymbol{M_pE}$ como a matemática dos professores que os levam a serem capazes de atender com sucesso às demandas da sua atividade profissional, ou seja, os conceitos a serem ensinados (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; BALL; HILL; BASS, 2005; STYLIANIDES; STYLIANIDES, 2014). Adler e os seus colaboradores (ADLER; HOSSAIN; STEVENSON; CLARKE, 2013; ADLER; HUILLET, 2008), assim como Davis e Renert (2012, 2014), por sua vez, fizeram uma abordagem da $\boldsymbol{M_pE}$ em termos da matemática que emerge entre um grupo de professores, estabelecendo os conceitos como algo que emerge nas próprias experiências do ensino. Adler e Davis (2006) e Adler e Huillet (2008) explicam que entre os professores se tem configurado discursos específicos para o ensino da matemática, produzidos através do processo pedagógico e que estão em sintonia com diferentes necessidades e práticas culturais. Estes antecedentes teóricos, assim como outros que também falam da $\boldsymbol{M_pE}$ (RYVE; NILSSON; MASON, 2012; OSLUND, 2012; PREDIGER, 2010), teve implicações na perspectiva que entende o ensino como um trabalho profissional com a sua própria base teórica única (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Neste estudo, vamos definir a $\boldsymbol{M_pE}$ como uma atividade discursiva que modela a matemática que circula no ensino, quer dizer, são *re-presentações* da matemática dos professores. A $\boldsymbol{M_pE}$, por tanto, emerge nas diferentes experiências relacionadas com o ensino da matemática, como a discussão de um grupo de professores, publicações dos pesquisadores, nas diretrizes curriculares, nas provas de avaliação de larga escala, assim como qualquer outra atividade focada a discutir o ensino da matemática.

Embasados nestas fundamentações teóricas, desenvolvemos um modelo teórico para descrever a variabilidade discursiva relacionada com o *conceito de variável* nas diferentes $\boldsymbol{M_pE}$, recompilando em tais **Fonte**s as *realizações* do *conceito*, analisando as situações da matemática em que elas aparecem e as suas relações com outros conceitos. Sabemos que os *modelos* não são esquemas exaustivos, por isso, o que apresentamos neste estudo são ideias parciais, porém a sua importância repousa sobre sua potencialidade analítica e instrumental para discutir o ensino da *variável*, ao ser um modelo que organiza as *realizações* contidas em várias **Fonte**s e que descreve como o conceito é apresentado no ensino. Contudo, delimitamos como **Fonte** de dados, especificamente, as diretrizes curriculares da matemática do Brasil e da Colômbia, o que detalharemos na seção do delineamento metodológico. Escolhemos as diretrizes curriculares do Brasil e da Colômbia porque nelas são propostas orientações, perspectivas, guias e recomendações para a elaboração dos sequenciamentos curriculares. Nestes documentos geralmente são descritas as *realizações* dos conceitos que devem ser discutidos em sala de aula. Por conseguinte, apresentamos o objetivo central deste artigo nos seguintes termos: *construir um modelo teórico da* $\boldsymbol{M_pE}$ *do conceito de variável a partir de diretrizes curriculares da matemática do Brasil e Colômbia*. Os procedimentos metodológicos do estudo serão pormenorizados a seguir.

4 Delineamento metodológico

Frente ao nosso objetivo, caracterizamos a presente pesquisa como um estudo documental, sendo uma estratégia na qual se observa e se reflete sistematicamente sobre o conteúdo de documentos, indagando, interpretando e apresentando dados e informação sobre um tema determinado (LÓPEZ, 2015; BAENA, 2014). O estudo documental consiste essencialmente na coleta, classificação, recuperação e distribuição de dados relacionados com um tema específico.

Escolhemos as diretrizes curriculares do ensino da matemática do Brasil e da

Colômbia como **Fonte** de dados, os quais se configuram como documentos oficiais para o ensino da matemática na Educação Básica em ambos os países. Tal como foi comunicado na introdução, este estudo foi delimitado com dados do Brasil e da Colômbia, por serem os países de origem dos pesquisadores do presente estudo. Esta análise não se trata de um estudo comparativo entre os países, a razão da escolha é para capturar maior número de *realizações* da *variável*.

O processo de procura, leitura e análise dos documentos do *corpus* deste estudo se desenvolve em várias etapas. Em primeiro lugar, acessamos, em outubro de 2016, a página Web do Ministério da Educação e Cultura do Brasil[3] e do Ministério de Educação da Colômbia[4] para levantar todos os documentos oficiais ou diretrizes curriculares, dirigidos ao ensino da matemática na Educação Básica. Finalmente, selecionamos nove documentos para o *corpus* de nossa análise, os quais apresentamos na tabela a seguir:

Documentos Selecionados	Referência
Lineamientos Curriculares de Matemáticas	COLOMBIA. MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998
Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas	COLOMBIA. MEN, 2006
Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas versión 1	COLOMBIA. MEN, 2015
Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas versión 2	COLOMBIA. MEN, 2016
Parâmetros Curriculares Nacionais: primeiro e segundo ciclo do ensino fundamental	BRASIL. MEC – Ministério de Educação e Cultura do Brasil, 1997
Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental	BRASIL. MEC, 1998
Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio	BRASIL. MEC, 2000
Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais	BRASIL. MEC, 2012
Base Nacional Comum Curricular (versão em discussão)	BRASIL. MEC, 2015

Quadro 3: Documentos do corpus da análise
Fonte: Autores

Em segundo lugar, fizemos uma leitura integral de cada um dos documentos para conhecer como eles apresentam o *conceito de variável*. Nesta etapa, foram extraídas informações sobre as *realizações* da *variável* em cada um dos documentos selecionados, e posteriormente foram organizadas em uma lista para elaborar a caracterização e síntese do nosso modelo teórico. Esclarecemos que as diretrizes curriculares não foram necessariamente elaboradas com o mesmo referencial teórico que adotamos nesta pesquisa, de maneira que neste estudo o entendimento da *variável* pode divergir daquele

[3] http://portal.mec.gov.br
[4] http://www.mineducacion.gov.com; http://www.colombiaaprende.edu.com

concebido nos documentos analisados. Portanto, a discussão em termos de *realizações*, a definição de *variável* e a perspectiva da $\boldsymbol{M_pE}$ apresentada neste artigo estão sob as nossas interpretações teóricas, nos fornecendo a base para analisar as diretrizes curriculares de ambos os países. Por isso, o que nós nomeamos por *realizações* da *variável* não necessariamente será chamado de *realização* nos documentos originais do *corpus* da análise.

A terceira e última etapa foi a organização estrutural da análise. Para este processo, inspiramo-nos no que Davis e Renert (2012, 2014) nomearam como *Estudo do Conceito*. Estes dois autores desenvolveram o *Estudo do conceito* com atividades práticas direcionadas aos professores para discutir a forma como lecionar um conceito particular, porém, tal abordagem, e a forma como eles apresentam os resultados da sua pesquisa, nos serviu como estrutura analítica para organizar as diferentes *realizações* encontradas na pesquisa documental.

Davis e Renert (2014) definiram quatro ênfases. A última delas se refere às *meta-percepções* dos conceitos, entendidas como o desenvolvimento de novas *realizações* a partir das *realizações* encontradas. Como a nossa análise está baseada exclusivamente nas *realizações* apresentadas nos documentos, usamos apenas as três primeiras ênfases propostas por estes dois autores: (i) as ***realizações*** são todas as ações comunicativas que podem ser nomeadas com a palavra *variável*: definições formais, rotinas matemáticas, metáforas, imagens, exemplos, ou aplicações que usem símbolos literais, etc.; (ii) os ***cenários*** são uma forma de categorização, em que se agrupam as *realizações* que são semelhantes de acordo com as definições de *narrativa* e *rotina* definidas por Sfard (2008). Para definir os cenários, analisamos as características das *realizações* e a partir disso verificamos quais eram semelhantes discursivamente, quer dizer, quais *realizações* tinham *narrativas* e *rotinas* convergentes; e (iii) os ***vínculos*** são a relação das *realizações* do conceito outros conceitos matemáticos. Desta forma, os cenários surgem como grandes enunciados que abarcam *realizações* semelhantes em termos discursivos, proporcionando uma visão diferenciada entre um e outro cenário, apresentando, através de sua análise, o conceito na matemática no ensino, atendendo o objetivo do estudo. Os cenários construídos serão discutidos na sessão a seguir.

5 Realizações, cenários e vínculos da variável

As realizações do conceito de variável que apareceram nos documentos analisados foram agrupadas em seis cenários: (1) como incógnita ou quantidade indeterminada, (2) na relação funcional, (3) como marcador de posição para definir narrativas associadas a sistemas numéricos ou para parametrizar rotinas matemáticas, (4) como nomenclatura no estudo das medidas, (5) como denominação das coleções de elementos, e (6) como nome de figuras geométricas. Os cenários serão detalhados nas próximas sessões.

5.1 Incógnita ou quantidade indeterminada

O propósito deste cenário é discutir as *realizações* da *variável* como quantidades "indeterminadas" nas equações e inequações. Uma *equação* poderia ser definida como uma declaração de que duas expressões são iguais – chamadas de *membros* –, *re-presentada* com o símbolo "$=$". No caso das *inequações*, a declaração diz que as expressões são desiguais, *re-presentadas* com os símbolos *menor que...* "$<$", *maior que...* "$>$", *menor ou igual* "$\leq$" ou *maior ou igual* "$\geq$".

Podemos verificar que na equação ao adicionar ou multiplicar os dois membros por uma mesma quantidade a igualdade não é alterada (BRASIL, 2015). Esta propriedade é usada para definir as rotinas que podem ser utilizadas para encontrar as quantidades desconhecidas nas equações. Por exemplo, para encontrar o valor de x na expressão $7 - 3x = 11$, podemos adicionar -7 a ambos os membros da igualdade, e posteriormente dividimos os resultados por -3 (MEN, 2014).

Analisando esta atividade, delimitamos uma primeira realização da variável chamada ***incógnita na equação**,* símbolo usado para falar de quantidades desconhecidas em uma igualdade, calculada a partir da informação dada (ELY; ADAMS, 2012). O valor ou valores da *incógnita*, chamados de *solução*, são aqueles que podem ser substituidos pela letra, verificando que a equação seja verdadeira. No exemplo $7 - 3x = 11$, existe um único valor $\left(-\frac{4}{3}\right)$que faz a equação verdadeira: $7 - 3(-\frac{4}{3}) = 11$.

Por outro lado, nas diretrizes curriculares da matemática do Brasil (BRASIL, 2015), é proposto o ensino da solução e elaboração de problemas com inequações polinomiais, ideia que possibilitou a definição de outra realização chamada ***incógnita na inequação***. Nesta *realização*, os valores da *incógnita* são chamados *domínio da solução*, e podem ser definidos como um intervalo de números que satisfazem a *inequação*. Assim como as equações, as inequações são resolvidas aplicando propriedades da desigualdade, como se mostra no exemplo a seguir: $45 - \frac{1}{2,5}t < 12$.

$$45 - \frac{1}{25}t < 12 \ \rightarrow \ 45 - 0{,}4t < 12 \rightarrow -0{,}4t < -33 \rightarrow t < \frac{-33}{-0{,}4} \ \rightarrow t < 82{,}5$$

Figura 1: Resolução da incógnita continua
Fonte: (MEN, 2015, p. 29)

Estas duas forma de *realização* da *variável* (*incógnita na equação* e *incógnita na inequação*), podem aparecer em forma *reificada* ou *alienada*, quer dizer, elas emergem da *re-presentação* de um problema específico ou como uma estrutura simbólica desvinculada de uma outra situaçào particular. Nas diretrizes curriculares do Brasil (BRASIL, 1998) se expressa que embora nos graus iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente no final do ensino básico que o estudo das equações e inequações são aprofundados. Contudo, os valores indeterminados não são as únicas *realizações* da *variável* na escola, existem outras *realizações* escritas com os mesmos símbolos literais, mas com uso diferente, tal como é mostrado no cenário.

5.2 Relação funcional

Este cenário descreve a *variável* como uma forma de comunicação que fala da relação de subordinação entre duas ou mais quantidades. Nas diretrizes curriculares para o ensino da matemática no Brasil (BRASIL, 1997, 1998, 2000, 2012, 2015) e na Colômbia (COLÔMBIA, 1998, 2006, 2015) se preconiza o ensino da relação funcional através de várias estratégias que incluem o uso adequado da notação simbólica, construção de diagramas ou tabelas, e o uso do plano cartesiano para relacionar as quantidades. De acordo com isso, demarcamos uma *realização* da *variável* que nomeamos ***quantidade dependente e independente***.

Para ilustrar a *quantidade dependente e independente*, analisamos o seguinte enunciado: *para fazer papel machê se umedecem tiras de papel de jornal com uma mistura feita de água e cola. Para cada três (3) copos de cola são necessário dois (2) copos de água*. Quantos copos de água são necessesários para 6 copos de cola? Quantos copos de cola são necessários para um copo de água? (COLÔMBIA, 2015, p. 19). No enunciado há uma relação de dependência entre duas grandezas, o *número de copos de água* e o *número de copos de cola*, e uma varia em relação à outra. Escolhendo a letra x para falar do *número de copos de cola*, e a letra y para falar do *número de copos de água*, *reificamos* a expressão da seguinte forma: $y = \frac{2}{3}x$. Neste caso, x varia conjuntamente com y, sendo y uma *quantidade dependente* que é calculada de acordo com o valor de x; e x é a *quantidade independente*. Esta relação de dependência se escreve $y = f(x)$, daí podemos definir a função como $f(x) = \frac{2}{3}x$. Existem outras formas para *re-presentar* a relação entre as quantidades(BRASIL, 1998; COLÔMBIA, 2006), as quais definimos na table a seguir:

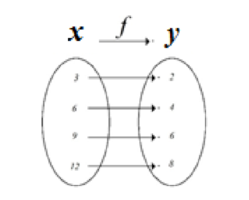
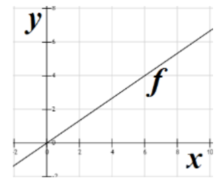
<table>
<tr><th>Diagrama</th><th>Tabela</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{4}{3}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\frac{8}{3}$</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
</table>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Figura 2: Re-presentação das variáveis na relação funcional
Fonte: Autores

Em primeiro lugar, apresentamos a relação de dependência em um *diagrama*: dois conjuntos cujos elementos são unidos por flechas unidirecionais. O conjunto da esquerda está formado por todos os valores possíveis da *quantidade independente*x, e é chamado de *domínio da função*; e o segundo conjunto da direita contém todos os valores da *quantidade dependente*$y = f(x)$, e é chamado *contradomínio da função*. Segundo os diretrizes curriculares do Brasil (BRASIL, 1998, p. 578), o professor deve ensinar "*as ideias de domínio, contradomínio e imagem, as suas re-presentações simbólicas e gráficas, e utilizá-las para analisar, interpretar e resolver problemas em contextos diversos*" (BRASIL, 1998, p. 578). Outro recurso para comunicar a relação de dependência é a *tabela* de valores, e nela associamos um par de números correspondentes aos possíveis valores da *quantidade dependente* em relação à *quantidade independente*, e cada par de números é conhecido como par ordenado – por exemplo $(3, 2)$, $(4, 8/3)$. Em terceiro lugar, apresentamos a relação entre as quantidades por meio de um *gráfico* em um plano cartesiano que mostra os valores em um contínuo, no qual o eixo vertical corresponde à *quantidade dependente* e o eixo horizontal à *quantidade independente*.

Um caso especial da *variável* na relação funcional é a *reificação* das sequências (verbais, numéricas ou figuras). As diretrizes curriculares da matemática (BRASIL, 1998, 2015; COLÔMBIA, 1998, 2006, 2015, 2016) descrevem o ensino das funções na *reificação* de sequências numéricas, como podemos ver no exemplo a seguir:

ReBECEM | Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

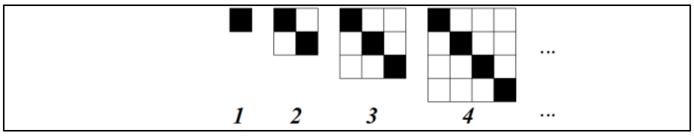


Figura 3: Variável em uma sequência numérica
Fonte: (BRASIL, 1998, p. 117)

A *quantidade independente* fala da posição das figuras na sequência, a qual nomeamos genericamente com a letra n, e nesse caso a *quantidade dependente* seria $f(n)$,*re-presentando* o número de quadradinhos brancos de cada figura. Ao *reificar* as transformações, o número de quadrinhos brancos em cada posição pode ser *re-presentado* por $f(n) = n^2 - n$, sendo chamada de *regra de formação* da sequência.

Podemos notar que nas *re-presentações* simbólicas das funções, a letra f é usada para nos referirmos à regra que relaciona as duas quantidades –dependente e independente–. Nesse caso, temos outra *realização* da *variável* que nomeamos como ***operador transformador***, definido como símbolo usado para falar das relações entre as *quantidades dependente* e *independente*.

Por outro lado, consideramos a ***variação*** como uma outra *realização* da *variável*, *re-presentada* pela letra grega delta maiúscula Δ, ou pela letra latina minúscula *d*, acompanhada de uma letra que *re-presenta* a quantidade que está variando. Por exemplo, para indicar a *variação* de um valor *x*, escrevemos da forma Δ*x*, indicando a diferença entre o valor final x_f e o valor inicial x_i da respetiva *variação* ($\Delta x = x_f - x_i$). Encontramos esta *realização* associada ao conceito de *taxa de variação média*, caracterizada nas diretrizes curriculares da matemática onde é agumentado que seu ensino deve partir de certas rotinas associadas à resolução de problemas (COLÔMBIA, 2006, 2015, 2016). A *taxa de variação* é entendida como a medida na qual uma quantidade modifica a outra na relação de co-variação. Se defirmos como a letra x a *quantidade independente*, e com a letra y a *quantidade dependente*, então a *taxa de variação* poderia ser escrita da forma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $\frac{dy}{dx}$. Para ilustrar isto, apresentamos o seguinte exemplo: *o gráfico a seguir mostra a quantidade de peixes em um lago após a introdução de 800 espécimes* (COLÔMBIA, 2015, p. 32).

ReBECEM | Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

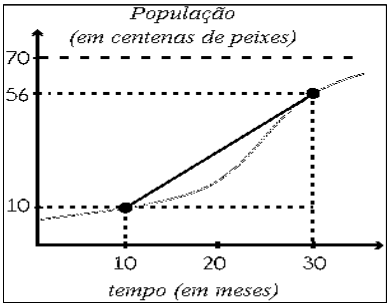


Figura 4: Variáveis no ensino da *taxa de variação média*
Fonte: (COLÔMBIA, 2015, p. 32)

No gráfico ilustramos uma relação de dependência entre duas grandezas, a *população* (que chamaremos de p) e o *tempo* (que chamaremos de t). A *taxa de variação média* entre os meses 10 e 30 está dada por: $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{5600-10000}{20} = 510$ peixes/mês.

O estudo das relações funcionais tem um papel central e estruturador no ensino da matemática, porém, este cenário não esgota o poder comunicativo das variáveis. A seguir apresentaremos um novo cenário que explica outras formas de *realização* da *variável* da matemática.

5.3 Marcador de posição

Este cenário descreve a *realização* da *variável* na produção de *narrativas* (teoremas ou axiomas) associadas aos sistemas numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais, complexos, etc.), e como parâmetros em rotinas matemáticas. Por exemplo, no ensino dos deslocamentos das re-presentações gráficas das funções do plano cartesiano, o professor apresenta o que ocorre com o gráfico da função $f(x)$ao transformá-la em $af(x), f(ax), f(x) + a$; $f(x+a)$, com$a \neq 0$(BRASIL, 1998, p. 579). Nesta *re-presentação* simbólica de rotinas matemáticas, se apresenta uma *realização* nomeada por nós ***marcador de posição***. Um *marcador de posição* é um símbolo usado como ponto de referência ou de medida para observar algo.

No exemplo das transformações das funções, o símbolo *a* é um *marcador de posição* usado como se fosse um espaço vazio associados a números específicos em casos particulares; mas também pode ser interpretada como um símbolo que determina uma família de funções, e nesse último caso a letra não precisa tomar um valor determinado, pois é um *parâmetro* para falar dos deslocamentos da função quadrática na *re-presentação* gráfica. As diretrizes curriculares (BRASIL, 1998; COLÔMBIA, 2006) propõem o ensino da notação simbólica para expressar generalidades e regularidades. Por exemplo, ensinar a fórmula geral $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ como método de solução da equação quadrática do tipo $0 = ax^2 + bx + c$ (COLÔMBIA, 2015, 2016).

Para ilustar outro exemplo dos *marcadores de posição*, temos a função quadrática *da forma* $g(x) = ax^2$*,* da qual sabemos que sua *re-presentação* gráfica é uma parábola. O *marcador de posição* a, o qual cumpre uma função de *parámetro*, possibilita descrever o gráfico da função: *Dizemos que a abertura da função quadrática é para cima ou para baixo dependendo do sinal da letra* a*, e é mais aberta ou mais fechada que o gráfico da função* $y = x^2$ *segundo o valor da letra* a (COLÔMBIA, 2015, p. 25):

Os *marcadores de posição* também aparecem nas *identidades algébricas*, as quais comunicam propriedades dos números reais e suas operações (BRASIL, 1998; COLÔMBIA, 2006), como mostramos a seguir:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

Quadro 4: Variáveis na solução de um binomio ao quadrado
Fonte: (COLÔMBIA, 2015, p. 26)

Nós usamos o termo *marcador de posição* para nomear uma letra em lugar de um número que será fornecido em um determinado problema ou contexto, mas em casos específicos, os *marcadores de posição* poderão também ser vistos como parâmetros ou coeficientes. Contudo, este cenário se diferença de os outros porque este fala específicaente das operações e propriedades dos sistemás numéricos.

5.4 Nomenclatura no estudo das grandezas

Neste cenário, analisamos as *realizações* da variável usadas para etiquetar, designar ou nomear elementos matemáticos associados com a medida, tais como números, grandezas, unidades de medida, etc.

Denominamos a primeira *realizaçaõ* como ***constante irracional***, para nos referir ao símbolo literal usado para nomear alguns números irracionais, tal como a constante euclidiana obtida na divisão do comprimento do círculo com o seu diâmetro, nomeada com a letra grega π (conhecida como número *pi*). Outro exemplo é o número de Euler e, base dos logaritmos naturais; e onúmero áureo φ, obtido a partir de uma construção geométrica, indicando a relação ou a proporção entre dois segmentos de uma reta. As diretrizes curriculares da Colômbia (COLÔMBIA, 2006) propõem demarcar a escritura decimal dos números reais, especialmente dos infinitos não periódicos, definindo as *constantes irracionais* na matemática (COLÔMBIA, 2006).

As *constantes irracionais* estão intimamente relacionadas à medida, uma vez que o surgimento dos números racionais está marcado pela tentativa de definir a quantidade de uma grandeza e pela impossibilidade de encontrar números racionais que a definam. O ensino da medida é um aspecto fundamental na matemática, orientado ao estudo dos atributos mensuráveis (comprimento, área, capacidade, peso, etc.) e seu caráter de invariância, fazendo sentido ao padrão e a unidade de medida (COLÔMBIA, 1998).

Na análise da medida, conceituamos outra *realização* da *variável* chamada de ***grandeza***. Por exemplo, podemos usar o símbolo *v* – minúsculo – para falar da velocidade; o símbolo *V* – maiúsculo –, para falar da medida do volume; a letra *A* poderia ser usada para falar da medida da área de uma figura geométrica; a letra *t* poderia ser usada para falar da medida do tempo; a letra *a*, poderia ser usada para falar da medida da aceleração; a letra *h,* geralmente é utilizada como medida da hipotenusa de um triângulo retângulo ou para nos referir à medida de uma altura, etc.

Relembramos que esta *realização*, assim como outras *realizações* discutidas nesta análise, pode aparecer de forma *reificada* ou *alienada*, ou seja, os símbolos podem surgir na solução de um problema particular ou em estruturas simbólicas que falam das propriedades e relações geométricas de forma generica.

Nas diretrizes curriculares da matemática da Colômbia (COLÔMBIA, 1998), é explicada a diferença entre *a unidade* e *o padrão de medida*. Quando definimos um centímetro quadrado ($1cm^2$), incluimos a possibilidade de existir um quadrado de um centímetro de lado, ou um disco com uma área de centímetro quadrado, ou ainda uma região do plano subdividida em triângulos equiláteros cuja área seja um centímetro quadrado, etc. No processo de medição, devemos ter uma unidade de área, esta não precisa estar ligada a um padrão particular. Por isso, é importante ensinar a medir, estimar e comparar comprimentos utilizando unidades de medidas como metro, centímetro, milímetro, etc., assim como qualquer outra unidade de medida não padronizada (BRASIL, 2015).

Denominamos outra *realização* da *variável* como ***padrões e unidades de medida***, a qual definimos como letras usadas para nomear unidades de medida. Por exemplo: *aunidade-padrão escolhida para medir a massa foi a quantidade de água contida em um cubo cuja aresta mede um decímetro (re-presentada por o símbolo dm), ou seja, de* *volume igual a um decímetro cúbico* (dm^3) (BRASIL, 1998, p. 133). A *realização* faz referência às letras usadas para etiquetar unidades de medida, geralmente padronizadas. A unidade-padrão de comprimento é nomeda metro e *re-presentada* pela letra m; a unidade-padrão do tempo é o segundo, simbolizado com a letra s; assim como quilograma (kg) é o nome da unidade-padrão da massa; o metro cúbico é a unidade-padrão do volume, e é simbolizado com a letra m^3, etc.

Como vimos até agora, estamos analisando neste cenário as *realizações* da *variável* que nomeiam elementos que surgem da medição, ação comunicativa para falar dos tamanhos dos elementos do nosso espaço. A estratégia é comparar duas grandezas da mesma natureza, para ver qual é a proporção de uma (quantidade da grandeza) com respeito à outra (unidade). Contudo, esse processo de comparação é suscetível a diversos erros, derivados das limitações nos instrumentos de medida ou da mesma natureza da grandeza. Na prática, o erro de medição pode se dar por vários fatores, como por exemplo as variações das condições ambientais, a calibração do instrumento de medição, etc. Em muitos casos é possível realizar múltiplas medições de uma grandeza, obtendo uma série de valores: $\{x1, x2, x3, \ldots . xn\}$, como por exemplo a temperatura de uma cidade que varia consideravelmente ao longo do dia. Daí, definimos outra *realização* da *variável* que chamamos de ***medidas estatísticas***, fazendo referência aos símbolos literais usados para comunicar valores que resumem a informação contida em um conjunto de dados (COLÔMBIA, 2006, 2015, 2016). Neste caso, as *medidas estadísticas* resumem as medidas que são obtidas em diferentes medições. Se temos um conjunto de dados *re-presentados* no plano cartesiano, podemos medir à posição da distribuição deles em relação ao eixo horizontal do gráfico (*medida de posição: Média, mediana e moda*), entre outras medidas:

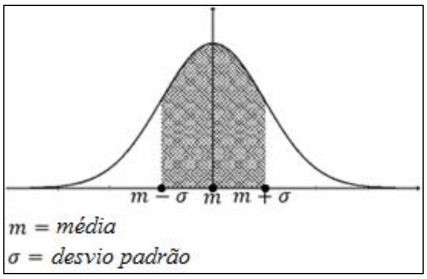


Figura 5:Variável como medidas estatísticas
Fonte: (COLÔMBIA, 2015 p. 39)

Geralmente usamos a letra m para falar da *média* de um conjunto de dados, definida como o valor que aponta para onde os dados de uma distribuição estão mais concentrados; e σ*re-presenta* o *desvio padrão*, mostrando a medida da dispersão dos dados em relação à média. Na figura 5 são mostrados os dados (parte sombreada) que estão a menos de um desvio padrão da média.

As *realizações* discutidas nesta sessão apresentam a *variável* como nome de um número específico obtido na medida. A seguir apresentaremos outro cenário.

5.5 Denominação de coleções de elementos

Este cenário *realiza* a *variável* como um nome para diferenciar coleções de dados, de números ou objetos manipuláveis, para produr narrativas associadas às suas propriedades.

Uma *realização* da *variável* como nome de um conjunto de dados, é o ***evento aleatório***. Nesta *realização*, a letra comunica o conjunto dos possíveis resultados individuais de um experimento aleatório. Esta *realização* se vincula ao ensino do espaço amostral e ao conceito de probabilidade. Poderiamos utilizar o símbolo A para falar do *lançamento de dois dados, um vermelho e outro azul* (COLÔMBIA, 2015, p. 31)cujo espaço mostral definimos na imagen a seguir (Figura 6):

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Figura 6: Espaço amostral do evento A
Fonte: (COLÔMBIA, 2015, p. 31)

As *realizações* do conceito de *variável* vão tomando formas particulares em cada um dos cenários em que faz presença, como sucede no último cenário que apresentamos a seguir.

5.6 Nome de figuras geométricas

A geometria é uma forma de comunicação com a qual descrevemos as características do espaço, e a *variável* é um instrumento para nomear e estruturar as propriedades das formas desse espaço, como pontos, ângulos, retas, segmentos, etc. Por exemplo: *a figura 7 destaca o sólido que restou de um cubo de aresta a, após ter sido* *retirado dele o prisma* BC$YXFG$, *sendo* XY *paralelo a* AD (BRASIL, 2012, p. 112). Assim como no exemplo, conseguimos definir um conjunto de situações que *realizam* a *variável* como ***entidades geométricas***,usadas para nomear pontos, segmentos, retas, polígonos ou corpos geométricos (ELY; ADAMS, 2012).

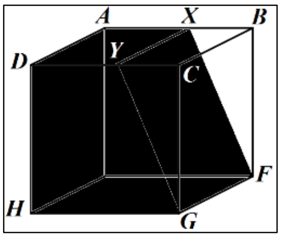


Figura 7: Variável como vértices de um cubo
Fonte: (BRASIL, 2012, p. 112)

As letras $A, B, C, D, E, F, G, H, X$ e Y*re-presentam* os vértices de um cubo e de um prisma. Para falar dos lados de ambas as figuras, usamos a união de dois pontos como segmentos, por exemplo XY e AD. A *realização* da *variável* na geometria, assim como as *realizações* discutidas até agora nos diferentes cenários, também é uma forma de *re-presentação* de expressões a partir do uso dos símbolos literais. A função principal desta notação algébrica é estabelecer e estruturar uma forma de escrita para *reificar* narrativas e rotinas de outros conceitos matemáticos, e particularmente neste cenário, o uso da *variável* permite comunicar de forma mais simples axiomas (proposição elementar que constitui a base de uma teoria) ou teoremas (enunciados demonstráveis) associados com as figuras geométricas. Assim, todas as *realizações* dos diferentes cenários sintetizam o nosso modelo, o qual resumiremos a seguir.

6 Síntese do modelo

A análise da $\boldsymbol{M_pE}$ do conceito de *variável* nos levou a produzir uma série de vínculos com diferentes tópicos do discurso matemático e com as narrativas associadas a cada uma das *realizações*. Em particular, inspirados na estrutura da análise do *Estudo do Conceito* proposto por Davis e Renert (2014), conseguimos identificar como as *realizações* variam entre os diferentes cenários, tal como a resumimos na seguinte figura:

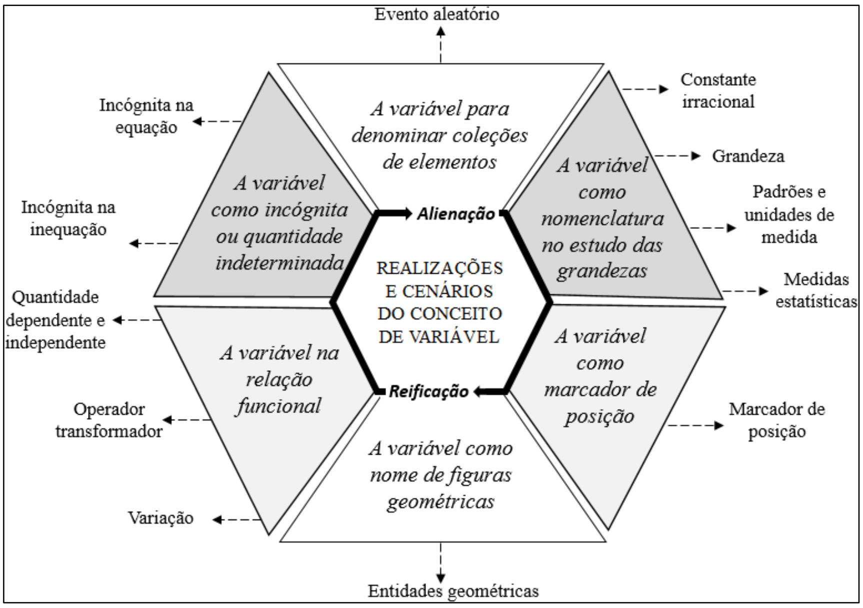


Figura 8: Síntesis do modelo da $\boldsymbol{M_P E}$ do conceito de variável
Fonte: Autores

Na *figura 8*, observamos resumidamente nosso *modelo teórico*. Neste gráfico apresentamos os cenários em seis quadriláteros – as cores só têm como função diferenciar visualmente um cenário do outro – e, com setas tracejadas, sinalizamos as distintas *realizações* da variável encontradas na análise documental, seja em forma *reificada* ou em forma *alienada*. A ordem dos cenários não corresponde a nenhuma forma hierárquica dos mesmos, simplesmente apresentam os aspectos discutidos neste artigo. Embora a dimensão gráfica dos seis cenários seja igual, cada um deles tem suas particularidades e demarcam aspectos específicos da matemática. Por exemplo, alguns deles apresentam a *variável* de forma mais complexa que outros, como é o caso da variável na *relação funcional* que discute as *realizações* "*quantidade dependiente e independiente*", "*operador transformador*" e "*variação*", a diferença do cenário chamado *nome de figuras geométricas*, que só discute a variável como "*entidade geométrica*". No centro de todos os cenários aparece um hexágono que os une, indicando que todos eles configuram o *conceito de variável* mobilizado na matemática no ensino. Estas características do modelo teórico podem ser observadas também de forma pormenorizada na tabela a seguir:

CENÁRIOS	REALIZAÇÕES	DEFINIÇÃO	VÍNCULOS
Incógnitas ou valores indeterminados	*Incógnita na equação*	Quantidades desconhecidas em uma equação.	Equações e sistemas de equações.
	Incógnita na inequação	Intervalo de números que satisfazem uma inequação.	Inequações e sistemas de inequações.

Relação Funcional	*Quantidade dependente e independente*	Valores que estão em uma relação de dependência em uma função matemática.	Funções: gráfico de una função, dominio e, propiedades das funções, continuidade e discontinuidade, funções periódicas, simetrías, etc.
	Operador transformador	Operações que transformam ou relacionam as quantidades que covariam na função.	
	Variação	Incremento de uma quantidade que passa de um valor a outro.	Taxa de variação média e taxa de variação instantânea.
Marcador de posição	*Marcador de posição*	Forma geral para definir características, axiomas ou propriedades dos conceitos.	Narrativas e rotinas matemáticas asociadas a sistemas numéricos.
Nomenclatura no Estudo das Medidas	*Irracional trascendental*	Constantes irracionais usadas na matemática.	Números irracionais.
	Grandeza	Nome de uma grandeza (atributo mensurável)	Grandezas, medição, unidades e padróes de medida, intrumentos de medição, etc
	Padrões e unidades de medida	Nome das unidades de medida padronizadas.	
	Medidas estatísticas	Medidas de um conjunto de dados.	Estatística descritiva e inferencial.
Denominação de Coleções de Elementos	*Evento aleatório*	Todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.	Probabilidade.
Nome de Figuras Geométricas	*Entidades geométricas*	Nome de espaços, planos, ângulos, pontos, segmentos, retas (ou semiretas), polígonos ou corpos geométricos.	Construções, axiomes e teoremas nos diferentes ramos da geometría: analítica, euclidiana, trigonometria, etc

Quadro 5: Síntese da $\boldsymbol{M_pE}$ *do conceito de variável*
Fonte: Autores

A seguir apresentaremos as considerações finais do artigo, onde discutiremos as implicações deste modelo para o campo profissional e para o campo de pesqusia.

7 Considerações finais

Neste estudo, inspiramo-nos em alguns conceitos da teoria de Sfard (2008) para dar um olhar à matemática como campo discursivo e a *variável* como conceito que se distribui ao longo da matemática a partir de múltiplas *realizações*, as quais se apresentam como recurso para *re-presentar* ações discursivas em notação simbólica. Alem disso, usamos a proposta do *Estudo do Conceito* de Davis e Renert (2012) como dispositivo analítico para organizar e estruturar as distintas *realizações* que emergiram do nossa análise das diretrizes curriculares da matemática do Brasil e da Colômbia, dando forma coerente ao nosso modelo teórico a partir das três ênfases abordadas: *realizações*, *cenários* e *vínculos*. Estes elementos nos permitiram construir o modelo, cujas contribuições são direcionadas para o campo científico e para o campo profissional.

Por um lado, com este trabalho, contribuimos para o campo profissional. O nosso modelo contribui com ferramentas teóricas para a análise da *variável*, as quais podem ser discutidas e usadas pelos professores, tanto em cursos de graduações para a formação de professores como em cursos de atualização docente. Este modelo reconhece a *variável* como um conceito especializado e vivenciado na atividade escolar, e o quail é fundamental no ensino da matemática desde a formação elementar até a formação universitária, aparecendo nas diretrizes curriculares da matemática do Brasil e da Colômbia. Nossas reflexões a respeito da *variável* apresentam um olhar sistemático do uso do conceito na matemática dos professores, reconhecendo as suas *realizações* e propondo este modelo para fazer que se tornem explícitas nas atividades escolares. Dada a importância e a natureza multifacetada das *realizações* da *variável* na matemática, será positivo se os elaboradores das diretrizes curriculares da matemática começarem a dar maior importância à variável, ressaltando as *realizações*, os cenários, as narrativas e as rotinas vinculadas a elas. Esperamos que outras experiências profissionais relacionadas com o ensino da variável, como a elaboração de provas a larga escada, os delineadores de materiais curriculares como livros didáticos, recursos manipuláveis para o ensino da matemática, etc. também usem este modelo teórico para deixar explícitas nos seus modelos as *realizações* da *variável*.

Esperamos também que esta estrutura seja influenciadora do campo professional. Este modelo teórico se configura como base científica para analisar e discutir outros conceitos da matemática. Incluso, como dispositivo para analisar o conceito de variável em otras *Matemáticas para o Ensino*, tanto em livros didátivos, em provas a larga escada, em cursos universitários de formação de professores, etc., tal como propomos neste artigo, construir a $\boldsymbol{M_pE}$ como modelo que captura as *realizações* dos conceitos que são produzidos no próprio campo do ensino, o qual pode gerar uma genda de pesquisa, incluso para refletir acerca da definição de *variável* e criar outros modelos de este conceito.

Referências

ADLER, J.; DAVIS, Z. Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 37, n. 4, p. 270 – 296, 2006.

ADLER, J.; HUILLET, D. **The social production of mathematics for teaching**. En P. Sullivan & T. Wood (Eds), Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development (pp. 195-222). Rotterdam: Sense Publishers, 2008.

ADLER, J.; HOSSAIN, S.; STEVENSON, M.; CLARKE, J. **Mathematics for teaching and deep subject knowledge:** Voices of Mathematics Enhancement Course students in England, J Math Teacher Educ, v. 17, n. 2, p. 129–148, 2013.

BAENA, GUILLERMINA. **Metodología de la investigación.** Serie integral por competencias. Primera edición ebook. Grupo Editorial Patria. México, 2014.

BALL, D. L.; HILL, H. H.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? **American Educator**, v. 29, n. 1, p. 14 - 46, 2005.

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389 – 407, 2008.

BRASIL. MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. **Base Nacional Comum Curricular** (versão em discussão). Brasília, 2015.

BRASIL. MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática (Primeira à Quarta Série). Secretaria de Educação Fundamental - SEF. Brasília: 142p, 1997.

BRASIL. MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental - SEF. Brasilia, 148 p, 1998.

BRASIL. MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática (Ensino Médio)**. Secretaria de Educação Fundamental - SEF. Brasilia, 148 p, 2000.

BRASIL. MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. **PCN+**: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Brasília, 2012.

COLOMBIA. MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. **Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) para lenguaje y matemáticas versión 1**. Bogotá, 2015.

COLOMBIA. MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. **Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA): Matemáticas version 2**. Bogotá, 2016.

COLOMBIA. MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. **Estándares curriculares de matemáticas**. Bogotá, 2006.

COLOMBIA. MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. **Lineamientos curriculares en matemáticas**. Bogotá, 1998.

DAVIS, B.; RENERT, M. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construc. **Educ Stud Math**, v. 82, n. 2, p. 245–265, 2012.

DAVIS, B.; RENERT, M. **The math teachers know:** Profound understanding of emergent mathematics. Editorial Routledge, New York: pp. 141, 2014.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics**, n. 61, p. 293 – 319, 2006.

ELY, R.; ADAMS, A. E. Unknown, placeholder, or variable: what is x? **Mathematics Education Research Journal**, v. 24, n. 1, p. 19 - 38, 2012.

EVEN, R. Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. **Educational Studies in Mathematics**, n. 21, p. 521–544, 1990.

LÓPEZ, SANDRA, T. **Técnicas de investigación documental.** Universidad Nacional Autonoma de Nicaragua. UNAM Managua – Farem Esteli. Estelí, 2015

OSLUND, J. A. Mathematics-for-teaching: what can be learned from the ethnopoetics of teachers' stories? **Educational Studies in Mathematics**, v. 79, n. 2, p. 293 – 309, 2012.

PREDIGER, S. How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 13, n. 1, p. 73 – 93, 2010.

ROWLAND, T. The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, n. 69, p. 149 – 163, 2008.

RYVE, A.; NILSSON, P.; MASON, J. Establishing mathematics for teaching within classroom interactions in teacher education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 81, n. 1, p. 1 – 14, 2012.

SFARD, A. **Thinking as communicating:** human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge, Cambridge University Press, Series editor EMERITUS, 2008.

SHULMAN, L.S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1 - 22, 1987.

SHULMAN, L.S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4 - 14, 1986.

STYLIANIDES, A.; STYLIANIDES, G. Viewing "mathematics for teaching" as a form of applied mathematics: Implications for the mathematical preparation of teachers. **Notices of the AMS**, v. 61, n. 3, p. 266 – 276, 2014.

Recebido em: 20 de julho de 2018.

Aceito em: 31 de agosto de 2018.