

OBSERVAÇÕES ACERCA DE UMA ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

OBSERVATIONS ON A DIDACTIC TRAINING ENGINEERING FOR THE TEACHING OF PROBABILITY

Cecilia Manoella Carvalho Almeida¹

Luiz Marcio Santos Farias²

Resumo: Neste artigo, propõe-se apresentar um estudo sobre uma Engenharia Didática de Formação, cuja finalidade maior é construir um modelo didático de referência para o ensino do conceito de Probabilidade. Para tanto, derivamos de um problema docente no ensino deste saber, identificado no momento em que os professores apresentam aos seus alunos o conceito de Probabilidade priorizando somente uma interpretação: a interpretação clássica. Neste sentido, tomamos como quadro teórico a Teoria Antropológica do Didático, e de posse das praxeologias dos professores, buscamos desenvolver um modelo didático de referência para o ensino do conceito de Probabilidade, metodologicamente amparado por uma engenharia didática de formação. A construção deste modelo didático visa abordar a aleatoriedade da Probabilidade de forma a integrar nas praxeologias didáticas suas principais interpretações: a clássica e a frequentista. Pretendemos apresentar como resultado desta engenharia didática de formação, uma alternativa didática para uma melhor abordagem do conceito de Probabilidade pelos professores do nível médio.

Palavras-chave: Ensino de Probabilidade; Engenharia Didática; Modelo Didático de Referência.

Abstract: In this article, it is proposed to present a study on a Didactic Engineering of Training, whose purpose is to construct a didactic model of reference for teaching the concept of Probability. For this, we derive from a teaching problem in the teaching of this knowledge, identified at the moment in which the teachers present to their students the concept of Probability giving priority to only one interpretation: the classical interpretation. In this sense, we take as theoretical framework the Anthropological Theory of Didactics, and of possession of the praxeologies of the teachers, we seek to develop a didactic model of reference for the teaching of the concept of Probability, methodologically supported by a didactic engineering of formation. The construction of this didactic model aims to approach the randomness of Probability in order to integrate the main interpretations in the teaching praxeologies: the classical and the frequentist. We intend to present as a result of this training didactic engineering, a didactic alternative for a better approach to the concept of Probability by middle level teachers.

Keywords: Teaching of Probability; Didactic Engineering; Reference Didactic Model.

¹ Mestra em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia – (PPGEFHC UFBA). Professora de Matemática do Instituto Federal da Bahia (IFBA), Salvador, Bahia, Brasil. E-mail: cecipatinho@yahoo.com.br

² Doutor em Didática da Matemática pela Universidade de Montpellier- França. Professor de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Departamento de ciência e tecnologias do Instituto de Humanidades, Artes & Ciências - Professor Milton Santos (IHAC), Salvador, Bahia, Brasil. E-mail: lmsfarias@ufba.br

1 Introdução

Neste artigo, tem-se como objetivo apresentar e discutir um modelo didático de referência construído com professores sobre o ensino do conceito de Probabilidade. Ele é parte principal de uma pesquisa de mestrado que se propõe observar, através de modelos epistemológicos, componentes do bloco tecnológico-teórico do saber Probabilidade e nuances das praxeologias dos professores, com o intuito de (re)construir praxeologias didáticas sobre o ensino do seu conceito.

Para isso, no âmbito da Teoria Antropológica do Didático, formulamos um problema didático³ considerando sua dimensão epistemológica por intermédio de um modelo epistemológico de referência.

O problema didático a que estamos nos referindo é o associado ao ensino do conceito de Probabilidade, hoje abordado prioritariamente a partir de problemas limitados à equiprobabilidade.

Neste sentido, descreveremos alguns elementos do discurso dos professores que permitam entender critérios e seleções de tarefas e técnicas atreladas ao ensino do conceito de Probabilidade, bem como de algumas das concepções dos professores verificadas nas etapas da engenharia nos momentos de estudo realizados.

Além disso, os documentos oficiais para o nível médio (OCCEM; PCN+) recomendam que se utilize a Estatística e a Probabilidade como um conjunto de ideias e procedimentos que possibilitem aplicar a Matemática em questões rotineiras. Neste contexto, fica a cargo dos professores a função de problematizar situações cotidianas relacionadas a estes saberes, propiciando que os alunos desenvolvam a compreensão sobre fenômenos aleatórios.

Assim, neste artigo, apresentaremos um estudo realizado com três professores do ensino médio de uma escola pública federal da Bahia (o IFBA) que lecionam a componente curricular Probabilidade. Este estudo foi metodologicamente empreendido por meio de uma engenharia didática de formação e teve como propósito a construção de um modelo epistemológico didático de referência.

Foi possível verificar como resultado de observação, que os professores não abordam de maneira adequada o caráter aleatório da Probabilidade. A partir desta constatação, enfatizamos a importância de inserir na formação de professores uma

³ Definimos aqui Problema Didático como o problema de investigação em Didática da Matemática (FONSECA; GASCÓN; LUCAS, 2014).

discussão sobre um modelo epistemológico didático de referência para o ensino de Probabilidade que integre suas interpretações.

Neste aspecto, estruturamos este artigo do seguinte modo: começando com uma pequena abordagem do ensino de Probabilidade; depois, sobre a formação de professores; em seguida, tópicos da teoria que norteia esta investigação; e a engenharia didática de formação que foi realizada com os docentes.

2 Ensino de Probabilidade

Neste tópico, nos deteremos a discutir a conjuntura do ensino de Probabilidade e gostaríamos de levantar as condições da importância do ensino de Probabilidade e os possíveis caminhos que se esperam do mesmo.

As interpretações de Probabilidade, até hoje, continuam sendo alvo de discussões em debates filosóficos, e o professor precisa conhecer essas interpretações a fim de instigar o raciocínio dos estudantes quando confrontados com situações que envolvem a aleatoriedade (BATANERO, 2015).

Neste estudo, consideramos, em particular, as interpretações: clássica e frequentista. A interpretação clássica é definida como a razão dada pela quantidade de casos que nos interessam, pela quantidade de casos possíveis, delimitada pelo espaço amostral equiprovável; esta interpretação é também chamada de Probabilidade teórica. Já a interpretação frequentista é definida pelo limite da frequência relativa do experimento quando repetido um grande número de vezes.

Segundo Lopes (2008), para que o ensino de Estatística e Probabilidade contribua para a cidadania, é preciso que os alunos vivenciem, desde os anos iniciais, problemas reais, com ênfase em questões cotidianas, para que, assim, os estudantes desenvolvam sua visão de mundo. A autora reforça:

[...] consideramos que o trabalho com estatística e probabilidade torna-se relevante ao possibilitar ao estudante desenvolver a capacidade de coletar, organizar, interpretar e comparar dados para obter e fundamentar conclusões, que é a grande base do desempenho de uma atitude científica (LOPES, 2008, p. 61).

Lopes (2008), nessa conjuntura, corrobora com esta pesquisa, ao levantar uma preocupação com o papel do professor que ensina Probabilidade, reforçando nosso argumento: o de que cabe ao docente desenvolver nos estudantes o pensamento

estocástico⁴ e criar situações que envolvam as diversas interpretações da Probabilidade⁵, permitindo, em suas aulas, o desenvolvimento da percepção da aleatoriedade.

A autora ainda defende que o ensino de Probabilidade quando trabalhado somente no nível médio priva os alunos de entenderem situações do dia a dia e de participarem melhor de tomadas de decisões como cidadãos. Lopes (2008) também realça a relevância para os professores em assumir uma prática pedagógica voltada à experimentação dos eventos probabilísticos associados a situações cotidianas, fornecendo, nesse segmento, subsídios aos estudantes para tomadas de decisões mais acertadas na sociedade.

Os PCN orientam que a Estatística e a Probabilidade devem ser vistas, então, “como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real” (BRASIL, 2000, p. 123). Nesta configuração é que enfatizamos que, apesar destas orientações, os professores precisam estar atentos ao lecionar o conceito de Probabilidade. Apresentar o conceito referido não é só mostrar suas fórmulas que dizem respeito à razão do evento escolhido pelo total de eventos possíveis, mas, antes, deixar claro ao aluno como se dá o fenômeno aleatório e qual a sua importância na previsão dos possíveis resultados.

Batanero (2005) argumenta que, embora a estatística apresente uma boa axiomática, demonstra ainda um problema epistemológico no ensino de Probabilidade por ser um ramo da matemática que mantém até hoje discussões acerca de suas interpretações. A autora aponta, nessa perspectiva, a necessidade de o professor estar ciente deste problema para entender algumas dificuldades dos alunos, que precisam materializar conceitos concretos e modelos matemáticos.

Neste cenário, reforçamos a importância da reconstrução de praxeologias que podem conferir sentido ao estudo do saber Probabilidade, que hoje é apresentado pelos professores, em sua maioria, de modo desvinculado da aleatoriedade. Uma análise sobre estas organizações matemáticas e didáticas permite despertar o interesse pela pesquisa e discussão sobre o conceito de Probabilidade.

Deste modo, concordamos que os professores que ensinam Probabilidade devem ter como principal objetivo discutir as diferentes interpretações e assim apresentar aos estudantes uma sequência didática que permita desenvolver o aprendizado dos fenômenos aleatórios. Neste artigo, apresentamos tópicos de uma aula conceitual de três professores

⁴ Estocástico é um termo usado para associar a Estatística à Probabilidade.

⁵ Nos referimos às interpretações: clássica, frequentista, geométrica etc.

analisando-se suas concepções e ênfases na apresentação dos conceitos primitivos associados a este saber.

3 Formação de professores que ensinam Probabilidade

Acreditamos que existe uma lacuna na formação de professores, o que impede que o ensino do conceito de Probabilidade seja apresentado de maneira integrada, proporcionando aos estudantes que vivenciem situações cotidianas sobre o cálculo de Probabilidades.

Para nós, a partir do estudo aqui desenvolvido, é preciso que advenham mudanças nos cursos de formação a fim de fornecer aos professores ferramentas necessárias que possibilitem que ocorra o fenômeno da transposição do saber apreendido para o saber ensinado.

Gonçalves (2004), em sua pesquisa sobre a concepção dos professores de matemática em relação à abordagem frequentista como modelo para resolução de situações aleatórias, observou que os professores do universo pesquisado ensinam o conceito de Probabilidade apoiados nas suas concepções sobre aleatoriedade aprendidas quando estudaram no nível básico, e escolhem o livro didático pela quantidade de exercícios que ele possui.

Batanero (2015) argumenta que os matemáticos desenvolveram o campo da probabilidade como um conjunto de modelos que podem ser aplicados a situações incertas; no entanto, o progresso destes modelos não resolveu o debate filosófico em torno da aleatoriedade.

Há uma preocupação crescente, relatada nos trabalhos de Gonçalves (2004), Lopes (2008) e Batanero (2015), com a formação de professores que lecionam Probabilidade, no sentido de que faltam orientações para que a abordagem frequentista seja trabalhada em sala de aula. Observamos, através destes estudos, que estas dificuldades decorrem, sob um ponto de vista epistemológico, da inaceitabilidade da realização do experimento aleatório, que, pelo grande número de repetições, apresenta uma aproximação eficaz do resultado estimado, mas nunca uma resposta exata para aquele resultado. Isso faz com que os professores não abordem em sala de aula o cálculo de Probabilidade *a posteriori*.

Verificamos também, em entrevista aplicada aos professores participantes de nossa pesquisa, que o conceito de Probabilidade é abordado somente pelo viés da

equiprobabilidade, definindo-se todo o espaço amostral trabalhado como equiprovável, limitando, dessa forma, os estudantes à crença de que o cálculo de Probabilidade só pode ocorrer se conhecemos o conjunto de elementos do evento definido, geralmente o princípio fundamental da contagem.

4 A Teoria Antropológica do Didático

Neste trabalho, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) oferece ferramentas para que possamos analisar um problema didático associado a um problema docente e também na criação de um modelo didático que será representado através da reconstrução de praxeologias. Segundo Bosch *et al.*, (2006), a TAD questiona as condições e restrições que afetam o desenvolvimento da atividade matemática em uma determinada instituição⁶. Neste sentido, nos propomos a observar a ecologia da Probabilidade, revelando as condições alcançadas e restrições que estão ligadas ao ensino de Probabilidade por meio das praxeologias dos professores.

Chevallard (1999) enuncia como postulado principal da TAD, que esta situa a atividade matemática e, conseqüentemente, a atividade do estudo em matemática, no conjunto de atividades humanas e instituições sociais. Assim sendo, se “admite que toda atividade humana realizada regularmente pode ser descrita como um modelo único, que é resumido aqui como praxeologia” (CHEVALLARD, 1999, p. 222).

Desse modo, a Praxeologia ou organização matemática é descrita em dois blocos: um bloco da práxis, referente ao saber fazer, constituído pelas tarefas (e tipos de tarefas) e técnicas, e um bloco do *logos*, referente ao saber, constituído pela tecnologia e pela teoria.

A tarefa é descrita como as atividades, problemas, exercícios, e está ligada a construções institucionais. Essas tarefas ou tipos de tarefas são construídas ou reconstruídas em torno de uma atividade matemática de determinada instituição (PAREDES, 2013).

Já a técnica, corresponde à maneira de realizar a tarefa; pode ocorrer que determinada técnica resolva somente parte das tarefas e, desta forma, seja necessária a utilização de outra técnica; pode ocorrer também de existirem técnicas que sejam

⁶ “Chamamos de instituição a todo coletivo que permite e impõe a seus sujeitos maneiras próprias de fazer e de pensar. Sob a ótica da TAD, cada saber é saber de pelo menos uma instituição; um mesmo objeto do saber pode viver em instituições diferentes e para viver em uma instituição; um saber necessita submeter-se a certas imposições, o que o conduz a ser transformado” (BARBOSA; LINS, 2013, p. 6).

superiores a outras. O bloco tecnológico-teórico é composto de um discurso racional sobre a técnica chamado de tecnologia. A tecnologia tem o objetivo de dar justificativa à técnica empregada. Já para justificar o discurso tecnológico, temos a teoria (CHEVALLARD, 1999).

Segundo Chevallard (1999), para analisarmos as praxeologias decorrentes das práticas docentes, devemos nos dispor a responder questões do tipo: “Como realizar determinado tipo de tarefa?”; e a resposta a esta questão será geratriz de uma praxeologia local em que serão desenvolvidas técnicas sobre uma tecnologia e teoria da praxeologia estudada.

O que faremos aqui é descrever e analisar a praxeologia do professor descrita nas observações naturalistas realizadas por nós em função de sua organização matemática e didática⁷ para o ensino de Probabilidade a turmas do terceiro ano do nível médio.

Para Chevallard (1999), as organizações didáticas são respostas às questões originadas pelo problema ecológico levantado. Descreveremos, de acordo com este autor, os Momentos de Estudo ou momentos didáticos a fim de produzir uma análise do percurso da organização didática pesquisada.

Um momento, no sentido dado à palavra aqui, é primeiramente uma dimensão em um espaço multidimensional, um fator em um processo multifatorial. Bem entendido, uma gestão saudável do estudo exige que cada um dos momentos didáticos seja realizado no momento certo, ou mais exatamente, nos bons momentos: por um momento de estudo geralmente é realizado várias vezes, sob a forma de uma multiplicidade de episódios que brotam no tempo. Nesta visão, será indicado que a ordem colocada, posteriormente, nos diferentes momentos didáticos é de fato amplamente arbitrária, porque os momentos didáticos são, em primeiro lugar, uma realidade funcional do estudo, antes de ser uma realidade cronológica (CHEVALLARD, 1999, p. 21, tradução nossa).

Descreveremos a organização didática dos professores pesquisados identificando em sua organização didática os seis momentos de estudo. O primeiro momento é definido como o momento do primeiro encontro com a organização matemática que está em jogo; o segundo momento diz respeito à exploração de um determinado tipo de tarefas e da elaboração de uma determinada técnica relativa a esse tipo de tarefas; o terceiro momento trata do estudo da constituição do entorno tecnológico-teórico relativo aos outros momentos. Neste trajeto, este terceiro momento diz respeito à primeira etapa do estudo, juntamente com os outros dois (primeiro e segundo) momentos do bloco do saber-fazer (CHEVALLARD, 1999).

⁷ Definimos Organização Didática como “o conjunto dos tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias etc., mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta” (CHEVALLARD, 1999, p. 238).

O quarto momento corresponde ao trabalho da técnica e equivale ao momento no qual colocamos em prova a técnica usada, observando o bloco do saber. O quinto momento é o da institucionalização e tem o propósito de determinar a organização matemática construída. O sexto momento, por sua vez, corresponde ao da validação e está diretamente ligado ao momento da institucionalização; ele tem ainda o papel de verificação do aprendizado e de discussão sobre a organização matemática proposta (CHEVALLARD, 1999).

Desta forma, a TAD permitiu o desenvolvimento da engenharia didática de formação na formulação do nosso problema didático sobre um modelo epistemológico, quando buscamos apresentar a relação das praxeologias dos professores com os momentos didáticos. Essa discussão ocorrerá nos tópicos a seguir, onde anunciamos esta engenharia.

5 A engenharia didática de formação

Para a construção do modelo epistemológico didático de referência (MDR), utilizamos uma trajetória metodológica através de uma engenharia didática de formação (EDF). Esta escolha se deu em virtude do estudo ser realizado com professores e, para tanto, a EDF formada compõe os pressupostos da engenharia didática clássica (ARTIGUE, 1988) pelos objetivos da engenharia de formação (BAILLEUL, 2015).

Neste aspecto, apresentamos aqui um estudo de formação continuada com três professores, desenvolvida por meio dos pressupostos metodológicos da Engenharia Didática Clássica. A engenharia didática como metodologia de pesquisa, é “classificada primeiramente como um esquema experimental que funciona como base para as realizações didáticas em sala de aula, ou seja, como a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino” (ARTIGUE, 1988, p. 3).

Partimos desta engenharia didática para uma engenharia didática de formação que definimos aqui como a metodologia da engenharia didática formulada em prol da formação continuada (BAILLEUL, 2015).

Para sermos mais precisos, tratamos de uma microengenharia⁸ de formação, por intermédio da qual conduzimos os momentos de estudos realizados com os professores norteados pelas etapas da engenharia didática no ensino de Probabilidade.

⁸ Microengenharia é um nível da engenharia didática que permite dar conta dos fenômenos existentes em sala de aula.

Artigue (1988) argumenta que, para procedermos por meio de uma engenharia didática, é necessário realizar quatro etapas, descritas como: análises prévias, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008, p. 66), as análises prévias descrevem:

A primeira fase é aquela na qual se realizam as análises preliminares, que pode comportar as seguintes vertentes: • epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; • do ensino usual e seus efeitos; • das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução; • das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva; • a consideração dos objetivos específicos da pesquisa; • o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

A fase da análise *a priori* consiste em preparar o esquema experimental, ou a sequência didática, através do qual será realizada a experimentação. Nesta fase, levantamos as prováveis considerações a respeito do que pode ocorrer, controlando possíveis desvios.

A fase da experimentação é o momento de se colocar em prática o dispositivo didático planejado. A fase de análise *a posteriori* seria a etapa em que recolhemos as informações e verificamos, em confrontação, o que presumimos nas análises *a priori*.

6 Percurso da Investigação

Neste tópico, relatamos e analisamos como ocorreu a EDF realizada com três professores que ensinam probabilidade em suas turmas de terceiro ano do nível médio no Instituto Federal da Bahia, *campus* Salvador.

A EDF empreendida por nós se deu ao longo dos meses de julho a setembro de 2017, e foi embasada a partir de seis momentos de encontros formativos que constituíram discussões acerca da criação do modelo didático pretendido. A princípio, esses encontros de discussão seriam com os três professores juntos, mas, devido à diversidade da carga horária dos docentes, somente os últimos encontros ocorreram com a presença de todos no mesmo horário.

Adotamos uma postura ética em relação aos professores, já que esclarecemos todas as etapas da pesquisa mediante termo de consentimento dos educadores; além disso, buscamos resguardar sua identidade, a fim de evitar qualquer tipo de prejuízo ou eventual constrangimento.

O quadro abaixo apresenta a estrutura dos encontros realizados:

Quadro 1: Encontros da engenharia didática de formação

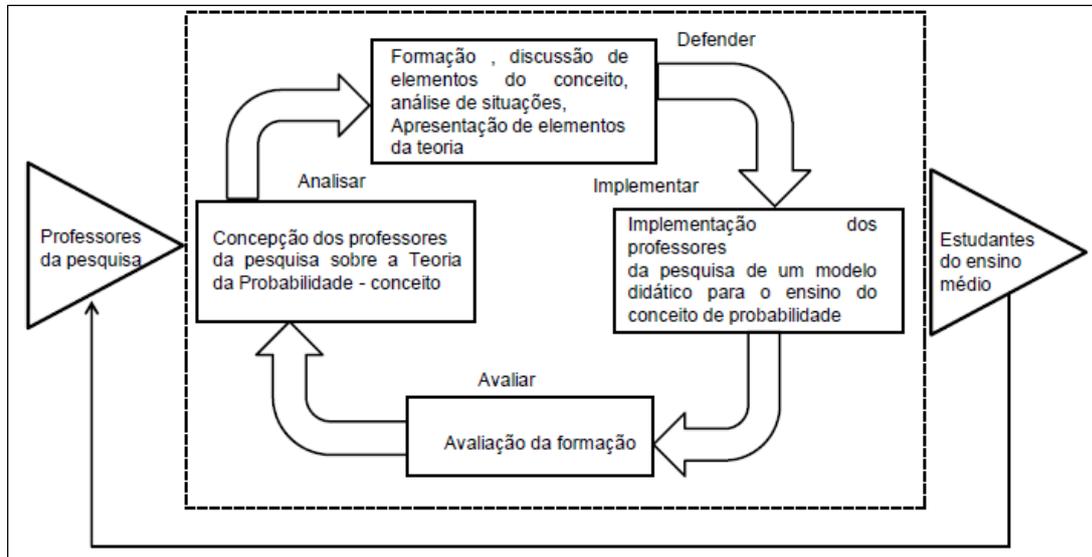
1º encontro	Entrevista, exposição de questões sobre a razão de ser, apresentação da pesquisa.
2º encontro	Apresentação das interpretações da Teoria da Probabilidade.
3º encontro	Apresentação de elementos da TAD e da engenharia didática.
4º encontro	Trabalho com artigos que justificam a importância do trabalho com a aleatoriedade.
5º encontro	Construção da sequência didática Análise e planejamento
6º encontro	Construção da sequência didática Validação.

Fonte: Almeida (2018)

Realizamos os encontros logo após os três professores participantes terem ensinado o conteúdo de Probabilidade, e de posse da análise dos protocolos de suas aulas, observamos lacunas que corroboram com o problema didático levantado por nós nesta pesquisa.

Em nossa descrição da construção do MDR, abordamos as etapas da engenharia de formação de acordo com a figura abaixo. Nesta figura são relacionados os objetivos propostos por nós conforme as etapas descritas por Bailleul (2015): analisar, defender, implementar e avaliar.

Figura 1: Desenho da engenharia de formação



Fonte: Almeida (2018)

Seguindo o que sugere a engenharia didática a partir destes momentos, descreveremos cada etapa da engenharia clássica associada aos objetivos da engenharia de formação, a fim de apresentarmos, ao final, uma proposta de modelo epistemológico didático de referência que permita aos professores que ensinam Probabilidade a integração das interpretações clássica e frequentista em suas propostas de aula.

7 Análises Preliminares sobre a engenharia de formação

Apresentaremos neste item, parte das análises preliminares relevantes à apreciação da engenharia de formação – uma análise mais completa pode ser verificada ao longo de todo o trabalho de Almeida (2018). A partir da Teoria da Probabilidade (na apresentação do seu conceito) até a Formação dos professores, explanamos tópicos relevantes sobre três importantes dimensões (ARTIGUE, 1996): análise epistemológica, análise didática e análise cognitiva.

Vale salientar, que nossa hipótese é de que a proposta de um modelo epistemológico didático de referência para o ensino do conceito de Probabilidade integrando as interpretações clássica e frequentista no nível médio, criado por e para professores, permite um melhor ensino deste componente curricular.

Neste pensamento, em relação à análise epistemológica, elaboramos um arcabouço que mostra o desenvolvimento histórico da teoria da Probabilidade, de forma a revelar sua razão de ser (ALMEIDA; FARIAS, 2017). Verificamos que ao longo dos séculos, a forte presença do determinismo matemático nas questões que envolviam situações de aleatoriedade, marcando o domínio do cálculo da Probabilidade, está situada pela interpretação clássica.

Sobre a análise didática, constatamos características dos professores em relação ao ensino de Probabilidade. No caso dos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2015, nenhum apresenta uma sequência didática que permita a demonstração das demais interpretações da Probabilidade. Reforçamos que esta é uma restrição ao ensino do seu conceito.

Identificamos nos trabalhos de Coutinho (1994, 2001), Silva (2002), Abe e Bittar (2013) e Luz (2015), condições apresentadas em suas sequências de ensino de probabilidade que possibilitam ao aluno experimentar calcular a probabilidade de forma teórica (pela interpretação clássica) ou de maneira experimental (pela interpretação frequencial).

Já em relação à análise cognitiva, averiguamos como era desenvolvido o ensino de probabilidade, no caso: “quais tipos de tarefas são destinados a serem abordados? Como os professores definem seus planos de aula?”. Aqui, nos apoiamos na TAD no intuito de apreciar as condições e restrições que mantêm um saber vivo em determinada instituição. Faremos uso desta teoria na análise da organização praxeológica do professor.

Para apreciação da praxeologia do professor, procedemos com a gravação das duas aulas iniciais de cada um dos educadores participantes (observação naturalista⁹), nas quais cada um dos docentes apresentou o conceito de Probabilidade em suas respectivas turmas. Esta observação se deu no Instituto Federal da Bahia (IFBA) *campus* Salvador, com três professores partícipes da pesquisa, os quais nos referiremos aqui como Carlos, Maria e Ana¹⁰.

Analisamos a prática docente através desta observação naturalista sem revelar, inicialmente, o propósito da observação e sem realizar qualquer intervenção. Nossa finalidade consistiu em verificar de que maneira os professores desta instituição conceituavam o saber Probabilidade. De antemão, acreditávamos que os professores não exploravam o ensino deste objeto, apresentando aos alunos uma única interpretação (clássica), ocasionando, desta forma, a ausência do desenvolvimento e exploração do caráter aleatório da Probabilidade, limitando-a a espaços amostrais equiprováveis.

Em entrevista realizada com os professores, nos foi relatado que, para o ensino deste conteúdo, utilizava-se o livro didático escolhido pela escola e um material criado por eles, uma apostila que contém exercícios a serem resolvidos pelos alunos em sala de aula. Um deles, o professor Carlos (pseudônimo), possui a formação de doutorado em Estatística e tem mais de trinta anos de experiência com turmas do nível médio. A segunda professora, Maria, tem mestrado em educação matemática e mais de cinco anos de experiência com turmas do ensino médio. E a terceira professora, Ana, é docente substituta, possui mestrado em matemática e não tem experiência com nível médio. Os professores, apesar de terem suas particularidades, seguem fielmente a apostila produzida por eles, a fim de que possam discutir seus planejamentos de forma unificada.

Procuraremos, através de recortes de trechos da transcrição da aula de cada um desses docentes, observar suas organizações didáticas para o ensino de Probabilidade, apontando uma associação com os momentos de estudo (CHEVALLARD, 1999). No trecho citado abaixo da transcrição, destacamos o início da aula e a apresentação do assunto a ser discutido:

Prof. Carlos - ... hoje a gente vai começar a estudar é ... A Teoria das probabilidades... escreverei como noções de probabilidade... pro... ba... bi... li... da... des, vamos lá!... Então, vamos lá... antes de começar a falar sobre isso, probabilidade né, vocês já devem ter ouvido falar, por aí a probabilidade definida como chance de ocorrer alguma coisa...a ideia é essa, qual a chance de você ganhar na loteria, qual a chance de chover amanhã, né, qual a probabilidade, a chance a favor de alguém ou alguma coisa e qual é o papel

⁹ Chamamos de Observação Naturalista no sentido posto por Comitti (2014).

¹⁰ A fim de preservar a identidade dos professores da pesquisa, estes nomes são pseudônimos.

DOI: <http://dx.doi.org/10.33238/ReBECCEM.2019.v.3.n.2.22612>

nosso... a gente vai tratar isso de uma forma matemática. Tratar com números, então vamos começar a falar de algumas coisinhas aqui...

Profa. Maria - [...] Da matemática que estuda justamente o quê? As chances de algo acontecer. Quando é... Alguém joga um jogo, tipo, na mega-sena a Mega-Sena, quando a gente joga, ela tem uma probabilidade de... Já pensou em ganhar né? Na mega-sena? Claro que a gente sabe que há uma probabilidade muito pequena de um, ganharem, tanto que, na maioria das vezes sempre vai acumulando, acumulando, acumulando e ninguém ganha. Isso porque a gente já viu em combinatórias o quê? As possibilidades que tem são muito grandes, então a probabilidade de uma certa forma, como as possibilidades são grandes então a probabilidade acaba sendo um pouco menor.

Profa. Ana - Existem tipos de experimentos que a gente não tem como prever que vai acontecer, certo? Esse tipo de experimento é o que a gente chama de experimento aleatório, certo? Agora existem dados, por exemplo, que são viciados. Existem moedas que são viciadas. Apostadores, certo? Que manipulam, que colocam um imã dentro do dado pra ele cair sempre, por exemplo, com a face 6 voltada para cima, certo? Esse seria um dado viciado. A gente não está trabalhando com esse tipo de dado, certo? Dados honestos, moedas, porque a gente chama de dados honestos, certo? Então a gente não tem como prever que vai acontecer e a probabilidade, ela tem a função de estudar esse tipo de experimento. Para isso surgiu a teoria da probabilidade, certo? ...Dentro das apostas, dos jogos de azar... Nesse tipo de jogo, de roletas, de cartas, você calcular a probabilidade de uma determinada carta sair, certo? Ele percebeu: "Não, eu tenho como saber que, por exemplo, se fulano jogou um rei de paus, considerando as cartas que estão na mesa e as que estão na minha mão,...Não dependia só da sorte, certo? E sim de uma teoria que precisava ser formalizada para tratar de tudo isso, certo? E o primeiro conceito que a gente precisa estudar [...] E essa teoria, hoje em dia, depois que ela foi formalizada, certo?..."

Observamos que os professores se utilizam de exemplos diversos para iniciar o tema da aula em questão: Teoria da Probabilidade. Falam de apostas, jogo de dados; e todos eles abordam exemplos em suas falas para explicar o que é chance. Perguntamos, em entrevista realizada posteriormente com cada um deles: “para você, o que é chance?”. E obtivemos como respostas: “são as possibilidades”, e ainda, “chance é a Probabilidade que calculamos algo”. Verificamos que os professores Carlos e Maria associam o conceito de Probabilidade primeiramente ao conceito de chance. O professor Carlos alega: “qual é o papel nosso... a gente vai tratar isso de uma forma matemática”, o que demonstra a presença forte do determinismo matemático deste professor. Já para a professora Maria, a chance é evidenciada como possibilidade, associada a cálculos de análise combinatória, assunto anteriormente apresentado por eles. A professora Ana, por sua vez, inicia a exposição falando sobre experimento aleatório e dá exemplos do dado e das cartas, afirmando que os cálculos destes itens podiam ser previstos. Consideramos que o significado de experimento aleatório ficou dissolvido na fala de Ana.

Para nós, a apresentação com exemplos de jogos de loteria se faz coerente com o que é defendido pelo PCNEM, isto é, que os alunos precisam compreender que a

Probabilidade está associada a fenômenos cotidianos (BRASIL, 2000). Pelo olhar da TAD, buscamos averiguar na aula o momento do primeiro encontro, no qual os professores explanam o modelo da tarefa pertencente ao estudo do conceito de Probabilidade; os docentes, para apresentarem o conceito, fundamentalmente definem outras noções importantes que integram sua sequência didática para o ensino de Probabilidade, a saber: experimento aleatório, espaço amostral e evento, para, depois, definirem Probabilidade.

A fim de conceituarem o que seria um experimento aleatório e o espaço amostral, os professores usam exemplos citados no começo da aula: apostas, dados, baralho etc. Além disso, podemos observar que a abordagem a partir do experimento aleatório não é “natural”,

Prof. Carlos - O experimento aleatório é o que é qualquer experimento que, repetido várias vezes sobre condições idênticas, apresenta resultados diferentes... Repetindo o experimento que repetido sobre condições idênticas que traga resultados diferentes. Por exemplo, um experimento aleatório: jogar uma moeda pra cima, jogar uma moeda pra cima né, você não pode prever qual o resultado vai dar, vai dar cara ou coroa?... sobre condições idênticas, vou jogar pra cima, virar a moeda, depois jogar a moeda de outro jeito apresenta um resultado diferente... jogar um dado pra cima e observar a face superior... isso é um experimento aleatório... chamamos de espaço amostral de um experimento aleatório ...atenção para esta palavra: o conjunto de todas as possibilidades todos os resultados possíveis! Certo? Vou botar assim... De todos os resultados possíveis, todos os resultados possíveis...

Profa. Maria - deixa eu falar para vocês o que é espaço amostral. Se bem que já tem até aqui né? Bom, espaço amostral vai ser o que? O conjunto de todas as possibilidades que temos. O espaço amostral vai ser o conjunto de todas as possibilidades de algo ocorrer, certo? Bom, olha só. Ele, aí no... na apostila, tem alguns exemplos aí e a gente vai falar sobre eles.

Profa. Ana - E aí, a primeira coisa que a gente precisa estudar, pra entender a probabilidade é o que significa espaço amostral. Alguém já ouviu falar sobre isso? Não? O que é o espaço amostral? O espaço amostral vai ser o conjunto de tudo que pode acontecer num certo experimento aleatório. Então, por exemplo, quando eu lanço um dado. O que é que pode sair nesse dado? Quais são as possibilidades que eu tenho quando eu lanço um dado?

A primeira tarefa descrita pelos professores, fundamentada no livro e na apostila, é a seguinte: “baseado no lançamento de um dado, a) defina o espaço amostral, b) o número de elementos do espaço amostral, c) evento 1: ocorrência de um número maior ou igual a um e d) o número de elementos do evento 1”. Podemos reconhecer aqui o primeiro momento, no qual o professor inicia o processo de exposição dos tipos de tarefas realizadas pelos docentes; este momento será descrito em outros episódios da aula, quando, por exemplo, o professor utiliza-se do tipo de tarefa proposto para definir o conceito usado.

Os professores conceituam probabilidade segundo o livro didático empregado, em espaços amostrais equiprováveis:

Sendo U um espaço amostral equiprovável, isto é, com elementos que têm a mesma chance de ocorrer, e E um evento, com $E \subset U$, a probabilidade de ocorrer E é dada pela razão entre o número de casos favoráveis (que nos interessam) e o número total de casos possíveis. Matematicamente, é a razão entre o número de elementos de E e o número de elementos de U . Simbolicamente, escrevemos: $P(E) = \frac{N(E)}{N(U)}$ (IEZZI *et al.*, 2013, p. 20).

Neste sentido, todos os tipos de tarefas apresentados pelos professores sobre a atividade “Calcular a Probabilidade”, serão descritos pela razão acima mencionada. Desta forma, chamamos a atenção para a incompletude da apresentação do conceito de Probabilidade, que partirá de tipos de tarefas relacionadas a espaços amostrais equiprováveis, não permitindo que a finalidade proposta pelo PCNEM, a saber, a de “Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de Probabilidades” seja efetivada (BRASIL, 2000, p. 95).

O ensino destes componentes didáticos poderia ser realizado por meio de problemas investigativos, ou até mesmo por uso de uma sequência didática na qual, primeiramente, o estudante buscaria reconhecer os eventos da natureza probabilística classificando-os em determinísticos ou não determinísticos.

É possível verificar em nossa análise que há uma exploração por parte dos professores, por meio da forma como apresentam suas técnicas, de um esquema de memorização de acordo com o tipo de tarefa apresentado. Ilustramos abaixo este aspecto sobre os episódios aludidos:

Profa. Maria: Qualquer subconjunto do espaço amostral. Então, por exemplo, no experimento anterior... Tudo isso tá na apostila, viu, gente? Considere a ocorrência de um número par como sendo o evento A , tá? Então, quem é o conjunto ocorrência de um número par? 2, 4 e 6, certo?

Profa. Maria: Por exemplo, no baralho, que evento a gente poderia definir? Quem seria o espaço amostral de um baralho? Quando considerando o experimento: retirar uma carta do baralho? Certo? Qual é o espaço amostral? Ou seja, o que estou procurando?

Profa. Maria: Hã? Duas em 6? De ocorrência de número par num lançamento de um dado?

E: 3 e 6.

Profa. Ana: Nesse caso mesmo, vamos, do lançamento de dados, certo? Bom, eu tenho um lançamento de dados e a gente já sabe que tem 6 possibilidades, né? A gente tem essas 6 possibilidades. Se o meu evento fosse, hã... cair a face.

Profa. Ana: Bom, vamos supor que o meu evento fosse esse, da ocorrência do número inscrito nas faces que sejam maiores que zeros e menores que sete. Seria o que?

E: todas as faces?

DOI: <http://dx.doi.org/10.33238/ReBECCEM.2019.v.3.n.2.22612>

Profa. Ana: Todas as possibilidades que temos, né? Ou seja, o número do espaço amostral todo. Podia ser a face 1, face 2, face 3, face 4, face 5, até 6. Então nesse caso, a gente teria um evento certo.

Os professores vão expondo suas técnicas à medida que apresentam as definições da teoria da Probabilidade. Não identificamos o uso da técnica sobre o Diagrama de Venn nem da árvore de possibilidades, que poderiam ilustrar o espaço amostral solicitado e ainda permitir ao aluno responder a atividade com mais segurança e maiores opções de resolução.

Profa. Maria: Tem alguns casos da probabilidade que a gente talvez dá um pouquinho mais de trabalho porque a gente tem que saber o, a parte difícil, vamos dizer assim, é encontrar o que? O meu espaço amostral, mas basicamente é isso aí que a gente tem. Bom, aí olha só, tem um exemplo aí que diz: Um dado perfeito é lançado, ou seja, esse dado não é viciado, tá? Tem as mesmas chances de cair qualquer uma das 6 faces. Qual é a probabilidade que um número obtido seja múltiplo de 3, certo? Ele já dá aí, na verdade, pronto né? Bom, então meu conjunto do espaço amostral vai ser as faces de 1 até 6. Bom, se é múltiplo de 3? Então só pode ser 6 e 3. Então esse seria os meus elementos do evento, tá? Bom, a gente sabe que o número do meu espaço amostral é 6 e o número de elementos do meu evento é 2.

Profa. Maria: Bom, então usando isso aqui, a probabilidade desse evento seria 2 sobre 6, ou seja, dentre as 6 possibilidades totais que eu tenho, eu tenho duas chances de sair múltiplos de 3, certo?

Profa. Ana: Então o que eu tô observando é o que o número, o que eu quero, o que eu desejo, é que o número seja par, certo? Aí a gente chama esse desejo de casos favoráveis, certo? Eu tô observando, eu quero que saia um número par. Então quantos casos são favoráveis ao que eu tô observando? 1, 2, 3, né? O 2, o 4 e o 6. Então você tem 3 casos favoráveis entre quantos casos possíveis? 6, certo? Simplificando, a gente vai ter 1 sobre 2, certo? Ou zero cinco ou 50%, certo? Ok? Vamos fazer uns exercícios?

Apesar de concordarmos com a intenção dos professores em valorizar o aprendizado da Probabilidade pela determinação do espaço amostral, verificamos que alguns problemas trabalhados poderiam ser apresentados de maneira a deixar os alunos pensarem em aprimorar a técnica ou criar novas técnicas.

Profa. Maria: 2 dados não viciados são lançados. Por que eles são não viciados?
E: Porque ele tem a mesma chance de cair todos os números.

Profa. Maria: Isso. Então todos os elementos têm a mesma chance de acontecer. A mesma probabilidade de ocorrer, não é isso? Então ele vai lançar 2 dados simultaneamente e quer saber a probabilidade de que a soma dos resultados desse lançamento seja um número maior do que 6. É fácil? Eu quero perguntar uma coisa primeiro, tá? Quando você lança 2 dados, eu quero saber quantos elementos tem no espaço amostral no lançamento de 2 dados.

E: 21.

Profa. Maria: 21? 24?

E: 12.

Profa. Maria: Olha, vou jogar dois dados ao mesmo tempo. Eu quero saber tudo que pode acontecer, não é isso? Meu espaço amostral quem é? Tudo que pode acontecer. Se eu for lançar. Quem acha que é 12 levanta a mão.

E: (alguns levantam a mão).

Podemos observar, pelo trecho transcrito, o trabalho sobre a técnica de levantar o espaço amostral; alguns alunos apresentam dificuldades em descobrir qual é o espaço amostral no lançamento de dois dados, o que para nós ilustra bem o terceiro momento de estudo, pois os estudantes estão testando a técnica sobre o método estabelecido pelo professor. Daí, observamos a necessidade de aprimorar a técnica e, neste sentido, repensar a metodologia aplicada pelo professor de associar a resolução dos problemas de Probabilidade à definição colocada.

A partir dos três momentos de estudo levantados, podemos observar que o professor tem o papel de protagonista na aula, já que pouco se percebe a intervenção do aluno. Pelos trechos expostos, podemos perceber que os estudantes são condicionados a responder o que os professores apresentam de forma explícita. Neste aspecto, não podemos inferir que a técnica de exposição e resolução do conteúdo permite uma aprendizagem significativa por parte do aluno.

Nas aulas observadas, os estudantes fizeram uso apenas das apostilas. Não verificamos a utilização do livro didático em sala de aula, o que deve implicar a cristalização de praxeologias. O conteúdo foi trabalhado somente por meio de um número limitado de tipos de tarefas.

Outro trecho da aula dos professores pesquisados que merece destaque, é quanto à definição de Probabilidade apresentada pelo espaço amostral equiprovável:

Profa. Maria - ...a probabilidade em espaços amostrais equiprováveis. Bom, um espaço amostral equiprovável vai ser o que? O espaço em que os elementos têm a mesma chance de ocorrer, ou seja, vamos supor que a gente tem um lançamento de um dado só que ele não seja viciado. Sabem o que é um dado viciado, né? Dado viciado é aquele que você morre de jogar e sempre cai no mesmo número, certo? Então se ele não for um dado viciado, certo? Então a gente vai ter o que? A ocorrência das faces vai ser um evento equiprovável, ou seja, tem a mesma chance de cair a face 1, a face 2, a face 3 e por aí vai, certo? A roleta também, só que a roleta normalmente nos cassinos é viciada, nunca tem a mesma chance, todos os números, cair não têm a mesma chance, tá? Mas quando isso ocorre, a gente chama de espaço amostral equiprovável.

Neste contexto, o cálculo de Probabilidades se restringe a espaços amostrais equiprováveis, sem apresentação de uma justificativa. Outro ponto que consideramos pertinente comentar refere-se ao fato de associar o que não é equiprovável aos exemplos de dado e roletas “viciadas”. Para nós, falta relacionar algumas suposições a respeito do experimento aleatório:

- a) Há um número *finito* (digamos n) de eventos elementares (casos possíveis). A união de todos os eventos elementares é o espaço amostral Ω .
- b) Os eventos elementares são igualmente prováveis.
- c) Todo evento A é uma união de m eventos elementares onde $m \leq n$ (MORGADO, 1991, p. 64).

Vê-se, através do fragmento acima, uma justificativa para a escolha desta apresentação e para a utilização desta interpretação. A não exposição destas hipóteses, para nós, acarreta um falso entendimento da definição de probabilidade por parte do estudante, que a concebe para todo e qualquer evento.

Partindo destas análises, podemos constatar que o ensino de probabilidade, atualmente, vem sendo apresentado aos alunos prioritariamente por uma interpretação: a clássica. Os professores não discutem situações que envolvam experimentações ou espaços amostrais não determinísticos, o que para nós representa uma lacuna na aprendizagem dos discentes.

8 Comparativo das análises *a priori* e *a posteriori*

Embasados nas entrevistas realizadas com os participantes da investigação, esperávamos que os mesmos introduzissem na construção de suas sequências didáticas algumas atividades que permitissem aos estudantes o desenvolvimento de elementos fortes da interpretação frequentista, visto que, em termos teóricos, estes se constituíram como principal objeto, por serem mais suscetíveis à modelação na questão da aleatoriedade.

Além disso, pela observação das aulas, almejávamos alguns esclarecimentos, como no momento da introdução dos conceitos de espaço amostral e do próprio conceito de Probabilidade, bem como dos termos determinístico, aleatório e equiprovável. Verificamos nos estudos de Ribeiro (2012) dificuldades apresentadas em relação ao entendimento destes conceitos iniciais.

No planejamento de nossa EDF sobre os momentos de estudo com os professores, buscamos explicar um quadro comparativo do que havíamos planejado *a priori* e do que foi realizado, levantando as condições e restrições que possibilitam o envolvimento e construção do modelo didático pretendido.

Além disso, nos reunimos com cada um dos professores de modo a apresentar e esclarecer os objetivos da nossa proposta de formação.

Partimos da hipótese de que os professores não abordavam em suas aulas uma discussão sobre a aleatoriedade através da apresentação das demais interpretações da Probabilidade.

Para verificar a hipótese citada, realizamos uma observação naturalista das aulas dos professores envolvidos, assistindo às aulas sem realizar qualquer tipo de intervenção

sobre a prática ou organização matemática; fizemos somente o registro do áudio das aulas (com o professor e os estudantes presentes).

Quadro 2: Análise do 1º encontro

Análise a priori – 1º encontro	Análise a posteriori
Nos propomos a assistir a aula dos professores sem realizar qualquer tipo de intervenção. Partimos da hipótese de que eles não apresentam diferenças entre os conceitos de espaço amostral, experimento aleatório, acaso, chance, frequência relativa. Buscávamos responder o seguinte: “como os professores conceituam probabilidade?”. Esperamos que os educadores apresentem os conceitos associados a exemplos do cotidiano.	Podemos confirmar que os professores falam muito rapidamente sobre os conceitos em pauta. Os professores apresentam os conceitos com exemplos do cotidiano. Os docentes priorizam os tipos de tarefas sobre cálculo do espaço amostral.
Apresentamos nossa proposta de intervenção na construção de um modelo didático. Almejamos a participação de todos, reforçando o sentido do pedido de apoio e colaboração.	Os professores, no início, ficaram preocupados se haveria muito trabalho e também sobre a relevância do tema da pesquisa. Somente três dos cinco professores aceitaram o convite.
Foram aplicadas as questões subsequentes no intuito de entender a razão de ser da probabilidade: “qual a relevância de ensinar probabilidade?; você observa que há dificuldades na aprendizagem do conceito de probabilidade?; se há, qual? Sugestões...”. Esperamos que os professores revelem o entendimento sobre a importância do ensino do conceito de Probabilidade por meio de mais de uma interpretação, e sobre o fato de os alunos não conseguirem desenvolver o pensamento probabilístico devido à limitação da abordagem docente.	Os professores afirmaram que é importante que os alunos aprendam a calcular probabilidades. Eles atribuem os erros a dificuldades em resolver problemas de análise combinatória, e apresentam a Probabilidade como ferramenta de apoio à resolução de questões de contagem.

Fonte: Almeida (2018)

Primeiro, buscamos compreender como os professores concebem o ensino do conceito de Probabilidade, perguntando a eles como haviam planejado suas aulas; como eles separavam os conteúdos; o que eles achavam mais importante no aprendizado dos alunos; e se existiam dificuldades na aprendizagem do conceito. E, ainda, por que eles achavam isso e se haviam soluções.

Foi unânime a resposta dos três professores em relação ao aprendizado em Probabilidade. Todos responderam que não aprenderam o conteúdo de Probabilidade no nível médio e que se lembram de terem visto na universidade na disciplina Estatística, mas mais voltado à resolução de problemas de Estatística. Os professores relataram que aprenderam com sua prática, estudando pelo livro e resolvendo questões.

Essa resposta não foi uma surpresa para nós, que verificamos no estudo de Lopes (2008) que os professores licenciados não recebem qualquer formação para ensinar os

conteúdos de estatística e probabilidade. Nesse segmento, já esperávamos uma resposta negativa quanto ao aprendizado aludido.

No que se refere à segunda questão, sobre o porquê de não abordarem a Probabilidade por outras vias, ouvimos do professor Carlos que “nos limitamos o ensino de probabilidade a espaços amostrais equiprováveis, pois não se trata de um curso de Probabilidade, só damos noções”; a professora Maria respondeu que “Probabilidade para ser resolvida com análise combinatória, os problemas de Probabilidade são resolvidos assim”; a terceira professora, Ana, respondeu que “não havia o porquê de aprofundar o ensino de Probabilidade pois as questões do ENEM que tinham Probabilidade eram sobre espaços amostrais equiprováveis”.

Neste sentido, pensamos em trabalhar problemas que abordassem a Probabilidade de forma não convencional, ou seja, que permitissem ao professor entender a importância de apresentar ao aluno o conceito de Probabilidade de maneira mais ampla, e que levassem o docente a refletir o modo como ensinaria aos alunos situações de cálculo de Probabilidade sobre a aleatoriedade.

Apresentamos, nestes termos, a seguinte questão, adaptada de Silva (2002):

Uma urna contém 5 bolas vermelhas, 4 bolas azuis e 2 bolas brancas, todas indistinguíveis pelo tato. Considere o experimento aleatório: retirada de uma bola da urna e observação da sua cor. Apresente o espaço amostral do experimento e em seguida classifique-o em equiprovável e não equiprovável.

Procuramos instigar nos professores a necessidade de os alunos entenderem bem a diferença entre o espaço amostral equiprovável, espaço amostral não equiprovável e experimento aleatório – definições fundamentais para a compreensão do conceito de probabilidade.

Indagamos aos professores como poderíamos apresentar questões relacionadas ao problema acima; os mesmos informaram que associam ao cálculo sobre a união e intersecção de eventos. São questões do tipo: *qual a probabilidade de retirarmos uma bola azul e uma bola vermelha? Ou qual a probabilidade de retirarmos uma bola azul ou uma bola vermelha?*

Constatamos que os professores abordam as propriedades da teoria da Probabilidade definidas na axiomatização apresentada por Andrei Kolmogorov, ligada ao conceito de Probabilidade pela interpretação clássica. Em seu material didático trabalhado, há uma sequência de questões que objetivam conduzir aos estudantes a uma padronização no raciocínio probabilístico. Como um artifício para seu aprendizado.

Quadro 3: Análise do 2º encontro

Análise a priori – 2º encontro	Análise a posteriori
Buscamos neste momento apresentar um pouco da Teoria da Probabilidade – caráter multifacetado do seu conceito. Acreditamos que muitas das interpretações, tais como a frequencial, geométrica, subjetiva, lógica etc., são desconhecidas pelos professores.	Confirmamos que os docentes desconheciam ou não utilizavam as demais interpretações da probabilidade.

Fonte: Almeida (2018)

Observamos, por intermédio das indagações dos professores, confusões em relação a alguns conceitos, a exemplo da diferença existente entre determinístico x equiprovável, aleatório, não equiprovável etc. Ponderamos que estas dificuldades têm origem epistemológica, já que os conceitos probabilísticos surgiram de diferentes concepções filosóficas, conforme abordado no artigo 1.

Os professores puderam reconhecer que vivenciam interpretações da probabilidade além da clássica, mas não as exploram. Podemos inferir que este fato se dá devido à ausência de opção nos livros didáticos e à falta de hábito dos professores quanto ao acesso de trabalhos científicos.

A oportuna exposição das variadas interpretações probabilísticas, fez com que houvesse uma discussão por parte dos professores quanto à descrição do modo como aprenderam probabilidade e suas concepções. Pudemos constatar, que o livro didático exerce forte influência no planejamento do professor.

Quadro 4: Análise do 3º encontro

Análise a priori – 3º encontro	Análise a posteriori
Apresentamos aos professores elementos da TAD: praxeologia – sistema didático- fenômeno didático. Objetivamos que os professores possam situar sua prática à praxeologia.	Os docentes reagiram bem à apresentação da teoria. Surgiram propostas sobre os conceitos apresentados.

Fonte: Almeida (2018)

A nossa proposição não consistiu em apresentar aos professores um curso de formação em TAD; mas demonstrar como a teoria justifica algumas ações por nós utilizadas e como responde algumas lacunas verificadas ao longo de uma trajetória escolar.

Quadro 5: Análise do 4º encontro

Análise a priori – 4º encontro	Análise a posteriori
Apresentamos seis trabalhos (artigos científicos) em que se desenvolveram trabalhos com o conceito de Probabilidade com a finalidade de mostrar que há maneiras de apresentar aos estudantes a Probabilidade em seu caráter aleatório. Esperamos que os professores assumam alguns dos tipos de tarefas evidenciadas nas sequências, de forma a contribuir para a criação do modelo.	Os professores ficaram surpresos com a simplicidade das sequências explanadas e com a possibilidade de se realizar um trabalho mais amplo em relação ao conceito de Probabilidade.

Fonte: Almeida (2018)

Os artigos apresentados foram extraídos dos Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) ocorrido em São Paulo em julho de 2016. Os seis trabalhos classificados para a apresentação aos professores foram três relatos de experiência, duas comunicações científicas e o resultado escrito de um minicurso. A ideia de trabalhar com estes artigos pautou-se em mostrar que o problema didático voltado à discussão sobre a maneira como se ensina o conceito de Probabilidade, apesar de antigo, é contemporâneo e que existem propostas atuais para atacá-lo.

Os relatos de experiência apresentados dizem respeito ao “uso de materiais manipulativos: a oficina “mãe dinada” como introdução ao estudo de probabilidade e estatística” (LIMA; BEZERRA; VALVERDE, 2016); “O bingo como recurso didático para o ensino de probabilidade: uma experiência no 9º ano do ensino fundamental” (RIBEIRO; PINHEIRO; DAMIN, 2016); e a “Definição clássica e definição frequentista de probabilidade: uma abordagem em sala de aula” (PEREIRA et al, 2016). Estes relatos representam propostas de sequências didáticas que permitem o trabalho do conceito de probabilidade de forma experimental, aproximando a probabilidade teórica da probabilidade experimental sobre diferentes séries de ensino (fundamental e médio).

A comunicação científica escolhida por nós, a saber: “Análise de invariantes operatórios dos esquemas de estudantes do ensino médio em situações de probabilidade” (NOGUEIRA; FERREIRA, 2016), relata uma atividade desenvolvida com os conceitos básicos de probabilidade que permite que mostremos aos professores a importância de trabalharmos a técnica do diagrama de árvores, ferramenta considerada por nós importante para se trabalhar com os estudantes situações aleatórias.

E, por fim, o minicurso intitulado “Atividades para o ensino de probabilidade e estatística na educação básica”, de Magalhães (2016), foi escolhido com o intuito de apresentarmos de forma integrada situações de probabilidade e estatística no nível médio. Magalhães (2016) explora propostas e um ambiente de aprendizagem para trabalhar e aprofundar as questões.

Quadro 6: Análise do 5º encontro

Análise a priori – 5º encontro	Análise a posteriori
<p>Discutidas as possibilidades, anunciamos aos professores a seguinte questão: “como poderíamos ensinar o conceito de probabilidade de forma a integrar as suas visões clássica e frequentista?”. Diante das discussões anteriores, o que esperamos é que, dentre as respostas dos professores, ocorra uma discussão sobre possíveis possibilidades de exploração de uma sequência de integração. Presumimos que os professores iniciem uma</p>	<p>A solução proposta pelos docentes, foi a de alterar o plano de aula utilizado e inserir tarefas que permitam a abordagem e análise de situações que envolvem a aleatoriedade.</p>

tempestade de ideias, questionando a mudança em suas praxeologias.	
Propomos aos professores a construção de uma nova sequência didática para o ensino do conceito de Probabilidade. O que esperamos é que os professores busquem tipos de tarefas que permitam em suas técnicas ferramentas que possibilitem aos estudantes trabalhar com a Probabilidade <i>a posteriori</i> , através de uma situação de experimentação por meio de tecnologia.	Na nova sequência criada pelos professores, a solução disposta pelos mesmos foi iniciar a aula com um problema sobre o lançamento de uma moeda e de dados. Os docentes não procuraram recursos tecnológicos, pois, segundo os mesmos, a escola não dispõe de recursos para poder se trabalhar com a turma inteira.

Fonte: Almeida (2018)

Verificamos neste encontro uma dificuldade por parte dos educadores na escolha dos tipos de tarefas que permitiriam a inclusão das demais interpretações da Probabilidade em suas propostas. Os professores pensaram situações em que pudessem trabalhar experimentações de cálculo de Probabilidade antes de apresentar as definições de espaço amostral, evento etc. Observamos a existência de conflitos referentes ao entendimento de aleatoriedade; por vezes, vimos manifestadas a definição de aleatório, aos resultados obtidos pela repetição em iguais condições e o desejo de associar seu cálculo a uma explicação determinista. Estes preconceitos sobre o cálculo intuitivo limitam a exploração sobre o incerto, visto que fogem do controle sobre os resultados das atividades propostas. Orientamos aos professores que realizassem um plano rascunhado através do qual, no encontro subsequente, que seria com todos, pudéssemos pensar em melhorias para o novo formato introdutório do conceito de Probabilidade.

O sexto encontro reflete a sequência didática construída pelos professores. Neste sentido, o que fizemos foi acrescentar na reconstrução praxeológica dos docentes, tipos de tarefas e técnicas que permitissem incluir a interpretação frequentista em sua organização didática e assim propiciar um trabalho mais efetivo sobre a aleatoriedade.

Quadro 7: Análise do 6º encontro

Análise <i>a priori</i>	Análise <i>a posteriori</i>
Aqui, objetivamos uma sequência didática que trabalhe o conceito de Probabilidade observando seu caráter aleatório. Acreditamos que os professores, com o aporte do livro didático e dos artigos estudados, integrarão nesta sequência escolhas de tipos de tarefas que permitam a abordagem da interpretação frequentista.	Apesar de algumas dificuldades na construção, os professores classificaram algumas questões e as incluíram em seus planos de aula.

Fonte: Almeida (2018)

A sequência didática foi planejada para ser realizada em cem minutos. Foi escolhido pelos professores começar com o exemplo de um experimento de uma moeda. Abaixo, segue a atividade planejada.

Atividade 1: Lançar uma moeda 50 vezes e verificar qual face aparece voltada para cima contabilizando-se a quantidade de caras e coroas do experimento. De acordo com o experimento realizado, você poderia encontrar a frequência de sair cara? E coroa?

Ao proporem esta atividade, os professores pretendem fazer com que os alunos retomem conhecimentos anteriores, quando, por exemplo, experimentam calcular a frequência do acontecimento de determinada face da moeda repetida sobre as mesmas condições e com cada resultado fornecido independentemente do outro. Os professores depois perguntariam: qual a Probabilidade de sair cara?

Neste sentido, trabalha-se nos estudantes o processo de geração de resultados aleatórios e a sequência de resultados obtidos. Os professores almejam, com esta atividade, definir Probabilidade, falar da frequência relativa e delinear os termos experimento determinístico e experimento aleatório. Além disso, alegam que esta experimentação poderá ser retomada ao longo de toda a aula, servindo de ilustração na introdução para os demais conceitos.

Depois desta atividade, os professores destacam que seria o momento de definir espaço amostral, evento, Probabilidade e suas propriedades. Abaixo, consta a atividade referida.

Atividade 2: Uma urna contém 15 bolas numeradas de 1 a 15. Determine os seguintes subconjuntos: a) conjunto dos números de 1 a 15, b) o conjunto dos números menores que 1, c) o conjunto dos números pares e d) o conjunto dos números ímpares.

Os professores descrevem que estas atividades seriam realizadas conjuntamente com os alunos no intuito de apresentar os conceitos descritos acima ao longo de sua resolução. Na caracterização destes conjuntos, seria definido o que é o espaço amostral como o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório e o evento como seu subconjunto. Verificamos que os professores realizaram essas escolhas baseados no livro didático, que propõe essa formatação priorizando o caráter determinista da matemática, com exemplos e escolhas sobre um ambiente fechado. Os docentes pesquisados aqui priorizam definir primeiro o conceito que desejam e depois abordar exemplificações. Na concepção deles, desta forma os estudantes assimilam melhor as tarefas propostas, isto é, quando apresentadas após o conceito. Inferimos que esta escolha se dá devido à escola de formação dos professores pesquisados, que possui um caráter conteudista e tradicionalista e também por resistência a mudança em suas práticas.

Defendemos que os alunos explorem dificuldades e entendam de onde partiu a construção do conhecimento, para, assim, proporcionar-se o desenvolvimento de novas abordagens.

Os professores definem Probabilidade como a razão entre o número de elementos do evento solicitado e o número de elementos do espaço amostral sobre espaços amostrais equiprováveis.

Empreendemos uma intervenção ao questionar aos professores sobre a *equiprobabilidade*, perguntando para eles: *o que seria um espaço amostral equiprovável?* Buscamos fazer com que os professores abordem um momento de exploração deste tópico na sequência elaborada por eles.

Verificamos este momento na aula do professor Carlos, que cita os exemplos da jaula dos animais. Neste trecho, argumenta o seguinte:

Professor Carlos: ...presta atenção você está num zoológico numa jaula quem tá na jaula do lado da jaula, presta atenção tem uma anta... zebra e uma onça pintada...você passa e recebe uma azunhada nas costas...zráss, aí você olha aí tá todo mundo assim (professor assobia olhando para cima)... aí você olha assim, quem terá sido, meu Deus, quem me azunhou...quem foi?... zebra dá unhada em alguém? Hipopótamo dá unhada em alguém? Então aquilo ali é um espaço amostral que não é equiprovável... entendeu? Tem um bicho ali que tem mais chance de ser o culpado e você pode ter certeza, vá encima dele, prenda e condena!

A preocupação em deixar claro aos estudantes o significado da palavra equiprovável é verificada neste exemplo. Os professores definem Probabilidade como a razão do número de elementos do evento sobre o número de elementos do espaço amostral (interpretação clássica). Apoiamos os docentes quanto a decisão à retomada da atividade 1, enfatizando aos estudantes a verificação da ausência de padrão na sequência de resultados obtidos por repetição do lançamento da moeda, mas que o aumento deste número de jogadas faz se aproximar da probabilidade clássica, conceituada pela interpretação frequentista.

Salientamos aos docentes a relevância de associarmos o cálculo de Probabilidades por meio da interpretação clássica e da interpretação frequentista, pois, nessa perspectiva, proporcionamos aos estudantes a confrontação do que é calculado teoricamente (interpretação clássica) com o cálculo através da experimentação (frequentista) – deixando explícito aos estudantes que a Probabilidade é uma teoria que tem sua formalização através dos seus axiomas, mas sua base é intuitiva, caracterizada pelo cálculo sobre a realização de fenômenos aleatórios.

9 Algumas considerações

Neste artigo, buscamos construir um modelo didático de referência para o ensino do conceito de Probabilidade partindo das concepções de três professores de uma escola pública federal de Salvador - BA. A nossa proposta era permitir que os professores desenvolvessem um modelo didático para o ensino de Probabilidade quando identificada a importância do seu conceito. Para realizarmos essa construção, nos apoiamos teoricamente na TAD. A partir das organizações matemáticas dos professores, identificamos possíveis lacunas para intervenções sobre a nossa proposta de ensino do conceito de Probabilidade por meio de duas interpretações: clássica e frequentista.

Assim, empreendemos uma engenharia didática de formação que direcionou os seis encontros realizados com os professores. Os docentes se reuniram juntamente conosco e então discutimos a criação de um trabalho colaborativo, a fim de estabelecer uma melhoria do ensino deste saber em sala de aula.

Partimos de uma visão reducionista em algumas respostas dos professores, no sentido dado a importância do ensino do conceito de Probabilidade na apresentação de outras interpretações. Essa postura nos motivou a continuar com a proposta de formação, a fim de mudarmos este paradigma.

O que de fato almejávamos, era que o conceito de Probabilidade não só fosse lecionado através de exemplos baseados em cálculo combinatório, mas que os estudantes e os professores pudessem explorar o caráter aleatório proposto nas tarefas escolhidas por eles.

Acreditamos que neste sentido, a nossa proposta de engenharia didática contribui para a formação inicial e continuada de professores de matemática que ensinam Probabilidade, pois permite o desenvolvimento de praxeologias voltadas à inserção de outras interpretações do conceito de Probabilidade em suas organizações didáticas.

Podemos constatar que é preciso capacitar os professores para ensinar Probabilidade com uma abordagem completa do caráter aleatório, possibilitando-se, assim, que se discutam diferentes significados da Probabilidade quando da apresentação dos seus conceitos.

Referências

- ABE, T. S.; BITTAR, M. Ensino de probabilidades: a articulação entre as visões clássica e frequentista. *In*: COUTINHO, C. de Q. e S. (org.). **Ensino e aprendizagem da estocástica na escola básica**. 1. ed. Campinas, Mercado das letras, 2013. p. 99-120.
- ALMEIDA, C. M. C.; FARIAS, L. M. S. Uma Análise do conceito de Probabilidade nos Livros didáticos do Ensino Médio à luz da Teoria Antropológica do Didático. *In*: SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 1., 2016, Bonito, Mato Grosso do Sul. **Anais...** Bonito, Mato Grosso do Sul: [s.n.], 2016. p. 164-187.
- ALMEIDA, C. M. C., **Um modelo didático de referência para o ensino de Probabilidade**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2018.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia didática: característica e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ ANPEd. **REVEMAT**, Santa Catarina, v. 6, n. 3, p. 62-77. 2008.
- ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 13, p. 281-308. 1988.
- ARTIGUE, M. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática**. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. 1ª Edição. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.
- BAILLEUL, M. L'Ingénierie de la formation: l'exemple de la formation des tuteurs de stages en formation d'enseignants. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 1, p. 137-161. 2015.
- BARBOSA; E.S.T.; LINS, A.F. Equações polinomiais do primeiro grau em livros didáticos: organizações matemática e didática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n.2, p. 337-357. 2013.
- BATANERO, C. Significados de La Probabilidad en La Educación Secundária. **Relime**, Santa Maria la Ribera, v. 8, n. 3, p. 247-263, 2005.
- BATANERO, C. **Understanding randomness**: challenges for research and teaching. *In*: Ninth EUROPEAN CONGRESS OF RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 9., 2015, Prague. **Anais...** Prague: [s.n.]. Disponível em: <http://www.ugr.es/~batanero/documentos/cerme-lecture.pdf>. Acesso em: 15 maio. 2017.
- BOSCH, M. *et al.* Estudiar matemáticas el es labón perdido entre enseñanza y aprendizaje. 3º Edição. Cidade: Barcelona, Editora Horsori, 2006.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Matemática**. Brasília: SEF/MEC, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio(PCNEM/OCEM) – Matemática**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**. Lei 9394/96. Brasília, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm. Acesso em: 03 abr. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos PNLD**, Ensino Médio. Brasília: MEC, 2015.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Marseille, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

COMITI, C. Recherche en Didactique et Formation des Enseignants. **Revista Perspectivas em Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 7, n. 15, p. 444-456, 2014.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista – Estudo Epistemológico e Didático**. 1994. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

COUTINHO, C. Q. S. **Introduction aux Situations Aléatoires dès le collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-GeomètreII**. 2001. Thèse (Doctorat em Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001.

FONSECA, C.; GASCÓN, J. P.; LUCAS, C. O. Desarrollo de um modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 17, n. 3, p. 289-318, 2014.

GONÇALVES, M. C. **Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática: ciências e aplicações**. 7. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2013.

LIMA, R. C.; BEZERRA, F. J. B; VALVERDE, M. A. H. Uso de materiais manipulativos: a oficina “mãe dinada” como introdução ao estudo de probabilidade e estatística. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: 2016.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Caderno CEDES**, São Paulo, v. 28, n. 74, p. 57-73, 2008.

LUZ, C. C. L. **Letramento Probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados pelos alunos**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

MAGALHÃES, M. N. Atividades para o ensino de probabilidade e estatística na educação básica. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: [s.n.], 2016.

MORGADO, A. C. O. *et al.* **Análise combinatória e probabilidade**. 13. ed. Cidade: São Paulo, Editora SBM, 2000.

DOI: <http://dx.doi.org/10.33238/ReBECeM.2019.v.3.n.2.22612>

NOGUEIRA, L. M.; FERREIRA, R.S. Análise de invariantes operatórios dos esquemas de estudantes do ensino médio em situações de probabilidade. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., São Paulo, 2016. **Anais...** São Paulo: [s.n.], 2016.

PAREDES, H.M. La Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevallard como sustento teórico para analizar el saber didáctico y matemático en la formación de profesores en la universidad católica de Concepción. *In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 8., 2013, Montevideo. **Anais...** Montevideo: [s.n.], 2013.

PEREIRA, P. B. S. S. *et al.* Definição clássica e definição frequentista de probabilidade: uma abordagem em sala de aula. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: [s.n.], 2016.

RIBEIRO, N. A.; PINHEIRO, R. M.; DAMIN, W. O bingo como recurso didático para o ensino de probabilidade: uma experiência no 9º ano do ensino fundamental *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: [s.n.], 2016.

RIBEIRO, R. E. S. **Uma proposta de ensino de Probabilidade no ensino médio**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SILVA, I. M. **Probabilidade**: A visão Laplaciana e a visão Frequentista na Introdução do Conceito. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

Recebido em: 14 de junho de 2019.

Aceito em: 17 de agosto de 2019.