

UMA ABORDAGEM DE MATRIZES NA PERSPECTIVA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

AN APPROACH OF MATRICES IN THE PERSPECTIVE OF PROBLEM SOLVING

Dulcyene Maria Ribeiro¹

Lucas Campos Araujo²

Evandro Sozo de Oliveira³

Alexandre Carissimi⁴

Elisangela Cristina Ribeiro⁵

Resumo: Este trabalho tem por objetivo apresentar o relato e as reflexões referentes a uma experiência vivenciada com alunos do 2º ano do Ensino Médio, no desenvolvimento de atividades para o ensino-aprendizagem do conteúdo Matriz. A Resolução de Problemas, conforme Onuchic e Allevato (2011), Onuchic e Allevato (2004), Onuchic (1999), foi a metodologia de ensino-aprendizagem adotada. A elaboração e a implementação ocorreram no contexto de duas disciplinas do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste). Como principal resultado da prática realizada destacamos a participação e o envolvimento dos estudantes na realização das atividades propostas, bem como a oportunidade dos professores em formação experienciarem e refletirem sobre a realização de atividades em sala de aula, por meio da Resolução de Problemas.

Palavras-chave: Resolução de problemas; Matrizes; Educação Matemática; Ensino Médio.

Abstract: This paper aims to present a report and the reflections related to an experience with students of the 2nd year of High School, in the development of activities for the teaching-learning about Matrix concepts. Problem Solving, according to Onuchic and Allevato (2011), Onuchic and Allevato (2004), Onuchic (1999), was the teaching-learning methodology adopted. The elaboration and implementation became of in the context of two subjects of the Mathematics Degree Course in the State University of Western Paraná (Unioeste). As a main result of the practice we highlight the participation and involvement of students in the realization of the proposed activities, as well as the opportunity for teachers in formation to experience and reflect about the application of activities in the classroom, through Problem Solving.

Keywords: Problem solving; Matrices; Mathematics Education; High School.

¹Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Docente da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Cascavel, Paraná, Brasil. E-mail: dulcyenemr@yahoo.com.br

²Graduando em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Cascavel, Paraná, Brasil. E-mail: kopier_business@hotmail.com

³Graduando em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Cascavel, Paraná, Brasil. E-mail: evandrolatrivan@gmail.com

⁴Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste). Mestrando pela Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, São Paulo, Brasil. E-mail: alexandre.carissimi.96@gmail.com

⁵Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste). Professora da Secretaria de Estado da Educação do Paraná (Seed), Cascavel, Paraná, Brasil. E-mail: lis_matematica@hotmail.com

1 Introdução

Neste trabalho apresentamos o relato e as reflexões a cerca de algumas atividades realizadas para o ensino-aprendizagem do conteúdo matriz, com uma turma do 2º ano do Ensino Médio de um colégio público da cidade de Cascavel, no Paraná. Essas atividades foram desenvolvidas durante o estágio supervisionado de dois dos autores deste texto, o qual ocorreu durante o primeiro semestre do ano letivo de 2017, na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, *campus* de Cascavel. Além das atividades de observação, caracterização e do projeto realizado na escola, os estagiários foram responsáveis por ministrar 18 horas-aulas, para a turma do segundo ano.

Na regência, trabalhou-se com o conteúdo de matriz, mais especificamente, classificação de matrizes, operações elementares (soma, subtração e multiplicação de matrizes), matriz transposta, igualdade entre matrizes e determinantes pelo método de Sarrus e de Laplace. Seguiu-se a ordem dos conteúdos apresentados no livro didático adotado pela turma naquele ano.

No início, pensamos em elaborar atividades que oportunizassem uma apropriação significativa dos conteúdos e que fosse além do uso do livro didático. Sabíamos que não seria uma tarefa fácil apresentar matrizes e determinantes de maneira diferente, visto que são conteúdos que de modo geral são ensinados por meio da transmissão de regras, descontextualizados da realidade e com aplicação apenas na própria matemática. Para Sanches

Matrizes e determinantes aparecem apenas como ferramentas ágeis na discussão e resolução de sistemas lineares, não sendo apresentada nenhuma sugestão quanto à introdução do conceito através de situações-problema e também não é feita qualquer menção à história do surgimento do conceito de matrizes (SANCHES, 2002, p. 6).

Na busca de estratégias e metodologias de como ensinar tais conteúdos de modo diferente e proporcionar um conhecimento significativo aos alunos e práticas de sala de aula que também fossem enriquecedoras aos professores em formação que estavam envolvidos, decidimos por utilizar em parte das aulas a Resolução de Problemas.

Manter o interesse dos alunos pela aula e dar sentido à mesma é um dos maiores desafios para um professor de matemática. Pensando em resolver este impasse, preparamos uma atividade que envolvia aspectos lúdicos e que pudesse servir de estopim

para apresentarmos os conceitos iniciais sobre matriz, por meio de atividades que pudessem despertar o interesse dos alunos e possibilitar uma associação com a realidade, já que “na verdade, fazer sentido, deveria ser a principal atividade da escola” (SCHOENFELD, 1996, p. 11).

Para a elaboração de uma das atividades desenvolvidas, nos baseamos em um exemplo de aplicação contido no livro didático usado pelos alunos, no qual imagens digitais eram relacionadas com matrizes, em que a ordem representava a resolução da imagem e cada elemento da matriz um *pixel*, ou seja, um ponto luminoso colorido.

Abordamos a multiplicação de matrizes e a multiplicação de um número real por uma matriz, por meio de uma atividade baseada na Resolução de Problemas. Tratava-se de um problema referente a um estabelecimento comercial, custo de produção e lucros, que propunha calcular o custo de produção de determinados produtos de uma confeitaria.

A seguir, apresenta-se o referencial teórico e a metodologia seguida para a elaboração e aplicação das atividades de ensino envolvendo conceitos de matriz, bem como os resultados e conclusões.

2 Resolução de Problemas

Um dos fatores que nos levou a trabalhar com Resolução de Problemas foi por não quisermos simplesmente escrever definições no quadro e fazer com que os alunos repetissem procedimentos, sem entendê-los.

Segundo Onuchic e Allevato (2011) foi a partir dos anos 2000 que:

[...] os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática *através* da resolução de problemas. Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.79-80, destaque dos autores).

A Resolução de Problemas visa propiciar aos discentes, com a mediação do professor, problemas com múltiplos caminhos para solução e que realmente sejam problemas, ou seja, não possuam mecanismos de resolução já pré-determinados.

Para Onuchic e Allevato (2011), há diferentes concepções de problema. As autoras, citando Van de Walle (2001) apresentam que:

[...] um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Para nós *é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer* (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81, destaque dos autores).

Ainda,

[...] denominam-se de problemas matemáticos as formulações de questões, em linguagem oral ou escrita, ligadas a um contexto significativo para as crianças, que exijam delas um raciocínio matemático para encontrar uma resposta a determinada questão (JUSTO, 2013, p.38).

No entanto, sua implementação não é uma tarefa fácil devido às diversas interpretações de cada educador. Ou seja, não existe um modelo único de se trabalhar a partir da resolução de problemas. É o professor quem deve traçar seus objetivos e os possíveis meios de alcançá-los, de forma que o estudo se torne interessante aos estudantes sem perder o seu propósito. Segundo Polya:

Primeiro, ele deveria estabelecer a classe certa de problemas para os seus alunos: não muito difíceis, nem fáceis demais, naturais e interessantes, que desafiem sua curiosidade, adequados a seu conhecimento. Ele deveria também se permitir algum tempo para apresentar o problema apropriadamente de modo que apareça sob o ângulo correto. Depois, o professor deveria ajudar seus alunos convenientemente. Não muito pouco, senão não há progresso. Não demais, senão o aluno não terá o que fazer. Não ostensivamente, senão os alunos adquirem aversão ao problema, em cuja solução o professor ficou com a maior parte. Entretanto, se o professor auxilia seus alunos apenas o suficiente e discretamente, deixando alguma independência ou pelo menos alguma ilusão de independência, eles podem se inflamar e desfrutar a satisfação da descoberta. Tais experiências podem contribuir decisivamente para o desenvolvimento mental dos alunos (POLYA, 1997, p.3).

O papel e as ações do professor são fundamentais na condução de atividades envolvendo a Resolução de Problemas. Para Meneghetti (2011), a Resolução de Problemas como metodologia surge para alterar a postura do ensino tradicional, na qual os problemas são simplesmente propostos e resolvidos e sugere-se que questionem as respostas obtidas e os próprios problemas propostos, enfatizando o processo de construção e não simplesmente a resposta final. Quando trabalhamos com resolução de problemas, estamos possibilitando que os alunos construam seu próprio conhecimento, façam suas próprias conjecturas e não sejam meramente repetidores.

Dante (1991) afirma que é possível, a partir da resolução de problemas, desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem no seu dia a dia, na escola ou fora dela.

O uso de resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática tem sido fruto de discussões entre educadores e nos documentos que nortearam a Educação Básica nas últimas décadas, tanto que nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN de Matemática do Ensino Fundamental seu valor é ressaltado:

A resolução de problemas, [...] possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 1998, p.40).

Para Dante (1991) é muito comum os alunos saberem efetuar algoritmos e não conseguirem resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos, devido à maneira como os problemas matemáticos são trabalhados na sala de aula e apresentados nos livros didáticos, muitas vezes, apenas como exercícios de fixação dos conteúdos trabalhados.

Devemos propor aos estudantes várias estratégias de resolução de problemas, mostrando-lhes que não existe uma única estratégia, ideal e infalível. Cada problema exige uma determinada estratégia. A resolução de problemas não se deve constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo (DANTE, 1991, p.52).

Um problema pode envolver muito mais do que somente a aplicação de algoritmos e repetição de procedimentos, ele deve sim possibilitar que os alunos pensem, conjecturem e planejem suas próprias alternativas de resolução, não focando simplesmente na resolução final.

3 As aulas

Na tentativa de fazer algo que chamasse a atenção dos alunos desde a primeira aula, preparamos atividades que os levassem a reconhecer situações que envolvem matrizes e a sua importância em áreas tecnológicas e no dia a dia, mas sem deixar de nos preocuparmos com o ensino de definição, notação e termos de uma matriz. Iniciamos a aula abordando um assunto que, acreditávamos ser do conhecimento geral dos alunos: resolução de imagens.

Para a elaboração de uma das atividades desenvolvidas, nos baseamos em uma situação de aplicação presente no livro didático usado pelos alunos, pertencente à coleção *Novo olhar Matemática*, de Joamir Roberto de Souza, coleção de livros utilizada na escola naquele ano, para o Ensino Médio. No livro do 2º ano (SOUZA, 2013), as imagens digitais eram abordadas como matrizes, nas quais a ordem representava a resolução da imagem e cada elemento da matriz um *pixel*, ou seja, um ponto luminoso colorido.

Baseados nessa ideia, encontramos uma imagem quadriculada *online*, criamos uma legenda relacionando cada cor com um número e construímos uma matriz para representar tal imagem. Com essa matriz e sua legenda em mãos, os alunos deveriam pintar cada elemento com a cor correspondente para encontrar a imagem desejada, além de dar instruções de como localizar um elemento específico desta matriz. Escolhemos uma imagem que representava um personagem que consideramos conhecido da maioria dos alunos e, portanto, poderia ser algo mais atrativo.

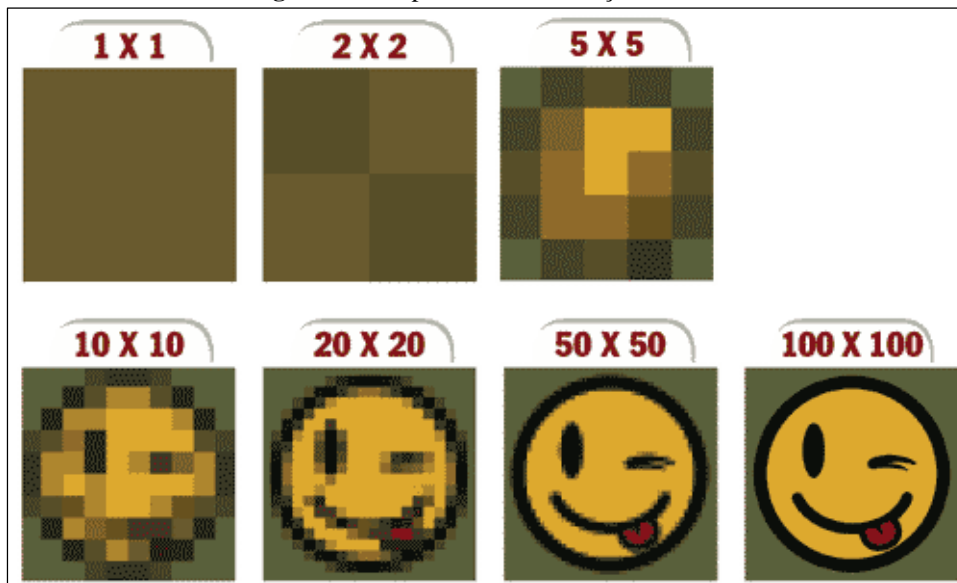
Primeiro, perguntamos aos alunos se eles entendiam o significado dos valores $144p$, $240p$, $360p$, $480p$, $720pHD$, $1080pHD$. Vários deles deram respostas afirmativas, dizendo que tinham visto vídeos com essas informações. Completamos dizendo que representam algumas das principais resoluções de telas, assim como resoluções de vídeos em plataformas da *Internet*.

Neste momento, para que os discentes entendessem o significado do que foi falado, os questionamos sobre *pixels* e alguns responderam que são partes das imagens. Explanamos então, que é a menor parte de uma imagem digital com informações que determinam a sua cor, sendo que a partir de três cores básicas (vermelho, verde e azul) é possível gerar mais de 16 milhões de possibilidades de cores. Por serem pequenos pontos de luz, próximos uns aos outros, acabam sendo praticamente imperceptíveis a olho nu. Desta maneira, quanto maior a quantidade de *pixels* melhor é a qualidade de uma imagem.

Assim, voltamos ao questionamento anterior, explicando que aqueles valores apresentados eram parte de expressões do tipo: 144×256 , 240×427 , 360×640 , 480×853 , 720×1280 e 1080×1920 , que representam a quantidade de *pixels* de uma imagem. Para exemplificar, ressaltamos que o termo $720p$ significa que a imagem é formada por 720 linhas e 1280 colunas de *pixels*, totalizando 921600 *pixels*.

Para que os alunos notassem a diferença que isso causa na percepção, apresentamos no material que lhes era entregue impresso, uma imagem comparativa, porém com valores adaptados:

Figura 1: Comparativo de resoluções



Fonte: <https://susanasarmento22.files.wordpress.com/2010/09/ggg.png>. Acesso em: 11 maio. 2017

Então, explicamos que cada *pixel* carrega as informações da cor que representa e que arranjos como estes são representados matematicamente como matrizes, induzindo assim que, quanto maior a resolução, maior será a matriz associada, conceito que definimos no final da aula.

Na sequência, passamos à segunda parte da atividade, na qual constava o seguinte quadro, em que cada elemento é comparado com um elemento de uma matriz de mesma ordem.

Quadro 1: Quadro para colorir

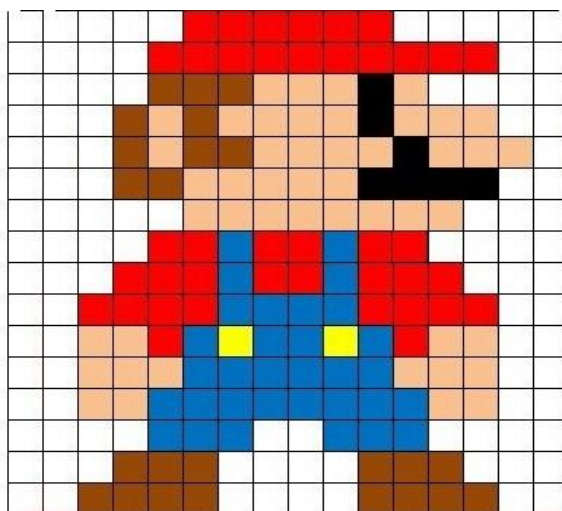
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	4	4	4	2	2	5	2	0	0	0	0	0
0	0	0	4	2	4	2	2	2	5	2	2	2	0	0	0
0	0	0	4	2	4	4	2	2	2	5	2	2	2	0	0
0	0	0	0	4	2	2	2	2	5	5	5	5	0	0	0
0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	3	1	1	3	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	3	1	1	3	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	3	3	3	3	1	1	1	1	0	0
0	0	2	2	1	3	6	3	3	6	3	1	2	2	0	0
0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2	2	0	0

0	0	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	0	0
0	0	0	0	3	3	3	0	0	3	3	3	0	0	0	0
0	0	0	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	0	0	0
0	0	4	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	4	0	0

Fonte: Elaborado pelos autores

Definimos que cada número no quadro representava uma cor de acordo com a legenda seguinte e utilizando lápis de cor, os alunos foram orientados a pintar cada elemento com a cor representada pelo número dentro da célula (0 – branco; 1 – vermelho; 2 – rosa claro; 3 – azul; 4 – marrom; 5 – preto; 6 – amarelo). A imagem obtida foi:

Figura 2: Personagem famoso



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/255790453816164770/>. Acesso em: 11 maio. 2017.

Depois de pintar as células, os alunos deveriam responder às questões:

- Localize uma célula pintada de cada cor (branco, vermelho, rosa claro, marrom, preto e amarelo) e escreva instruções para encontrá-la.
- Existe alguma maneira padronizada para dar tais instruções? Em caso afirmativo diga qual, em caso negativo, diga no que este padrão poderia contribuir.

Quanto à primeira questão, alguns alunos não conseguiram responder, pois não conseguiram formular uma maneira de dar a localização das células, já outros, tiveram algumas ideias para tal tarefa. Dentre os comentários que pudemos observar destacaram-se: enumerar as linhas e as colunas, ou então, enumerar as linhas e relacionar letras para as colunas, ou vice-versa, ou simplesmente enunciar o ordinal correspondente da linha e da coluna da célula escolhida.

A questão que tratava sobre a utilidade de haver uma maneira padronizada de referenciar tais elementos, tinha a intenção de fazer com que os alunos entendessem a importância de tal padronização, dado que uma matriz pode ser entendida como uma tabela ordenada. Alguns responderam que serviria para que todos usassem a mesma linguagem.

Ao final da aula, apresentamos a definição de matriz, juntamente com a notação e representação dos seus elementos, relacionando com a atividade realizada. Primeiramente, escolhemos uma célula do desenho e pedimos aos alunos que nos dissessem qual era o elemento associado a ela, isto é, a linha e a coluna, nesta ordem, às quais a célula pertencia. Inversamente, apresentamos um elemento da matriz associada e pedimos aos alunos que dissessem a cor presente nesta célula.

De modo geral, a maioria dos alunos teve um pouco de dificuldade para entender a maneira como se localiza um elemento de uma matriz, no entanto, após algumas explicações, eles conseguiram compreender e perceberam a importância da notação utilizada. Depois, apresentamos a definição de matriz, presente no livro didático utilizado pelos alunos e a representação genérica de uma matriz A de ordem $m \times n$.

Essa primeira atividade foi realizada em uma hora-aula, e com ela, além de introduzir os conceitos relacionados ao estudo das matrizes, conseguimos envolver e estimular os alunos na resolução das tarefas, obtendo a atenção deles, o que para nós foi essencial para o prosseguimento das demais atividades. Nas duas aulas seguintes, foram resolvidos exercícios que tratavam de tipos de matriz e de operações de adição e subtração de matrizes.

Para abordar multiplicação de matrizes e multiplicação de um número real por uma matriz, utilizamos uma atividade baseada na Resolução de Problemas. Tal atividade havia sido planejada por um dos autores desse texto na disciplina Tendências em Educação Matemática, que é uma das disciplinas do curso de licenciatura em Matemática da Unioeste, *campus* de Cascavel.

Tratava-se de um problema referente a um estabelecimento comercial, custo de produção e lucros, que propunha calcular o custo de produção de determinados produtos de uma confeitaria. Para isto as informações eram dispostas em dois quadros: um com a informação dos valores de cada ingrediente e o outro com a informação da quantidade necessária de cada ingrediente na fabricação de cada produto. Para encontrar os valores procurados, era preciso realizar uma multiplicação de matrizes.

O problema está descrito abaixo:

Um novo centro comercial está sendo construído na cidade de Cascavel, no estado do Paraná, com alguns pontos de venda na praça de alimentação ainda vagos. Seu Jerônimo, que se aposentou recentemente, tem interesse em investir suas economias e montar uma confeitaria. Para isto, decidiu pesquisar, com seu amigo Emanuel, a respeito dos rendimentos deste ramo comercial. Emanuel, para demonstrar como administra as vendas de seu negócio, mostrou-lhe as tabelas a seguir:

Quadro 2: Quantidade de ingredientes

		Ingredientes				
		Ovos	Farinha	Leite	Chocolate	Açúcar
Produtos	Torta	0	2	3	5	3
	Bolo	4	3	2	4	2
	Brigadeiro	0	0	3	5	4
	Rocambole	3	3	5	4	2

Fonte: Elaborado pelos autores

Quadro 3: Preço dos ingredientes

Ingredientes	Preço (R\$)
Ovo	0,20
Farinha	0,35
Leite	0,25
Chocolate	1,00
Açúcar	0,35

Fonte: Elaborado pelos autores

Baseando-se nos quadros, era preciso responder:

- 1) O que é possível perceber sobre a quantidade de linhas e de colunas de cada quadro?
- 2) É possível representar matematicamente estas informações por meio de algum conteúdo estudado? Se a resposta for afirmativa, faça esta representação.
- 3) Como podemos calcular o preço de produção de cada produto da confeitaria? Represente estas informações da mesma maneira como no item anterior.
- 4) Para cobrir os demais custos do estabelecimento, seu Jerônimo deve vender seus produtos com um valor 10% maior do que o custo de produção. Calcule qual deve ser este preço de venda para cada produto e represente estas informações da mesma maneira como nos itens anteriores.
- 5) Pensando em obter algum lucro com a venda de seus produtos, seu Jerônimo decidiu vendê-los 25% mais caros do que o valor necessário para cobrir os seus custos. Calcule qual deve ser este preço de venda para cada produto e represente estas informações da mesma maneira como nos itens anteriores. Qual é o ganho líquido de cada produto?

Nessa atividade, os alunos deveriam organizar as informações contidas nos quadros e calcular o custo de produção de cada um dos produtos, representando-os

matricialmente. Por trás destes cálculos, estava implícita a operação de multiplicação de matrizes. Após encontrar o custo de produção, os alunos deveriam calcular o valor de venda destes produtos, primeiramente, com um acréscimo de 10% sobre o preço de custo, valor necessário para cobrir as demais despesas do estabelecimento e, em seguida, um novo acréscimo de 25%, visando a obtenção de lucro por parte do dono do negócio. Nestes cálculos, estava implícita a operação de multiplicação de uma matriz por um escalar. Por fim, os alunos deveriam calcular o lucro obtido com cada produto, realizando uma operação de subtração de matrizes.

Foram utilizadas para a realização dessa atividade duas horas-aula. Tínhamos levado as atividades impressas, com o objetivo de no final da aula recolher as folhas para verificar como os alunos haviam organizado as informações e as principais dúvidas e erros cometidos, para que na aula seguinte pudéssemos ajudá-los de maneira mais objetiva.

Percebemos durante a verificação destas atividades e, mesmo durante as demais aulas destinadas à resolução dos problemas, que nem todos os alunos conseguiram utilizar corretamente as informações dos quadros para calcular o que era pedido, principalmente no cálculo do custo de produção. Alguns alunos acabaram calculando não o gasto necessário para produzir uma unidade de cada produto, mas o valor gasto com cada ingrediente para a produção de uma unidade de cada produto, como na imagem seguinte, em que na cor rosa é possível ver os acréscimos realizados pela aluna, quando percebeu que o que tinha feito até então não era a resposta adequada.

Figura 3: Exemplo de resolução feita por uma aluna

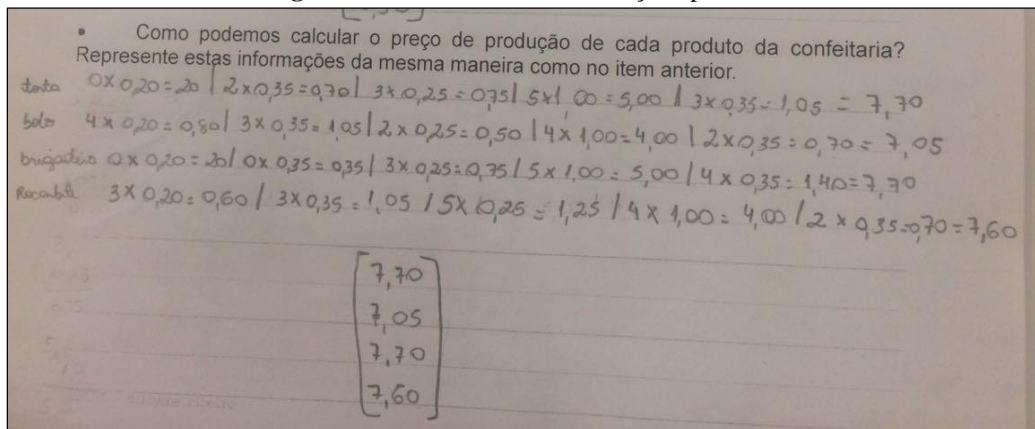
• Como podemos calcular o preço de produção de cada produto da confeitaria? Represente estas informações da mesma maneira como no item anterior.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,35 & 0,25 & 3,00 & 0,35 \\ 0,20 & 0,35 & 0,25 & 4,00 & 0,35 \\ 0,20 & 0,35 & 0,25 & 5,00 & 0,35 \\ 0,20 & 0,35 & 0,25 & 4,00 & 0,35 \end{bmatrix}$
$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0,70 & 0,75 & 5,00 & 3,05 & 7,50 \\ 0,80 & 3,05 & 0,50 & 4,00 & 0,70 & 7,05 \\ 0 & 0 & 0,75 & 5,00 & 3,40 & 7,35 \\ 0,60 & 3,05 & 1,25 & 4,00 & 0,70 & 7,60 \end{bmatrix}$	$PC = \begin{bmatrix} 7,50 \\ 7,05 \\ 7,35 \\ 7,60 \end{bmatrix}$

Fonte: Acervo dos autores

Vários outros alunos realizaram os cálculos corretamente, mas ao seu modo, como ilustrado nas imagens seguintes.

Figura 4: Outra maneira de resolução apresentada



Fonte: Acervo dos autores

Figura 5: Modo diferente de resolução do problema

3 • Como podemos calcular o preço de produção de cada produto da confeitaria? Represente estas informações da mesma maneira como no item anterior.

	ovo	farinha	leite	chocolate	açúcar	Total
Torta	$0 \times 0,20 = 0$	$2 \times 0,35 = 0,70$	$3 \times 0,25 = 0,75$	$5 \times 1,00 = 5,00$	$3 \times 0,35 = 1,05$	7,70
Bolo	$4 \times 0,20 = 0,80$	$3 \times 0,35 = 1,05$	$2 \times 0,25 = 0,50$	$4 \times 1,00 = 4,00$	$2 \times 0,35 = 0,70$	7,05
Brigadeiro	$0 \times 0,20 = 0$	$0 \times 0,35 = 0,35$	$3 \times 0,25 = 0,75$	$5 \times 1,00 = 5,00$	$4 \times 0,35 = 1,40$	7,70
Biscoito	$3 \times 0,20 = 0,60$	$3 \times 0,35 = 1,05$	$5 \times 0,25 = 1,25$	$4 \times 1,00 = 4,00$	$2 \times 0,35 = 0,70$	7,60

Fonte: Acervo dos autores

Até esse momento da aula, os alunos mesmo sabendo que o conteúdo envolvido era matriz, não tinham visto nenhum modelo de como organizar os dados para fazer a multiplicação de matrizes. Então como representado nas figuras 3, 4 e 5, cada um deles organizou do modo que considerou mais conveniente.

Os alunos foram capazes de propor uma solução trabalhando de forma intuitiva, sem precisar de algoritmos para chegarem aos resultados, o que corrobora com o que Dante (1991, p. 52) afirma, sobre “propor aos estudantes várias estratégias de resolução de problemas, mostrando-lhes que não existe uma única estratégia, ideal e infalível”.

As formalizações do conceito de multiplicação de matrizes, bem como de multiplicação de um número real por uma matriz, foram realizadas na aula posterior, utilizando como exemplos as próprias questões da atividade. Convém destacar que as várias maneiras de organização apresentadas pelos alunos surpreenderam positivamente os professores envolvidos, já que estavam acostumados a observar um único modo de

organização de dados para multiplicação de matrizes.

A organização das informações para a realização da multiplicação de matrizes feita pelos futuros professores na aula seguinte, foi considerada pelos alunos como uma forma adequada para simplificar e representar o que eles tinham feito. Acrescentamos que, apesar disso, a forma tradicional de multiplicar matrizes só fez sentido para os alunos, pois já tinham passado pelo processo de organizar os dados da forma como achavam melhor.

4 Resultados e considerações

Para que momentos como o descrito ocorram nas salas de aula não basta uma preocupação conteudista ou centrada nas práticas pedagógicas e metodológicas apenas. Segundo Becker (1993) é necessária uma mudança epistemológica, visto que nas salas de aula os professores dizem adotar uma posição ora empirista e ora apriorista, ou seja, uma valorizando a prática/experiência e outra o raciocínio. Essas posições se pautam na transmissão dos conteúdos como se fosse a única forma de abstraí-los, desconsiderando a criatividade que pode estar envolvida no processo.

Já a Resolução de Problemas permite que os alunos estejam livres para pensar em como resolver as tarefas, e não simplesmente em resolver de uma maneira que lhes foi passada como modelo. Percebemos que, quando não se trabalha com um modelo rígido, gera-se uma variedade de respostas e de formas de organização, em que a criatividade de cada um aparece. Além disso, ela permite que os alunos se mostrem, se sintam valorizados e responsáveis pela construção do seu conhecimento, cabendo ao professor apenas conduzir esse o processo.

É preciso levar em consideração que o aluno deve ser o agente da construção do seu conhecimento, o protagonista da construção de sua aprendizagem. Isso tem redefinido o papel do aluno diante do saber. Então é preciso que o papel do professor alcance novas dimensões. Entre elas ser o organizador da aprendizagem, ser o facilitador nesse processo, aquele que fornece as informações necessárias que o aluno não tem condições de obter sozinho, mas sem dar informações demasiadas, as quais os alunos podem chegar por seus próprios meios, além de ser o mediador das situações ocorridas na sala de aula, sejam elas de ordem prática ou relativas aos procedimentos empregados e debates sobre resultados e métodos (Brasil, 1998). Acreditamos que a Resolução de problemas propicia isso ao professor.

Notamos que ao trabalharmos com a metodologia de Resolução de Problemas, e até mesmo com atividades lúdicas, como na primeira atividade descrita, os alunos conseguiram sistematizar os conteúdos que lhes foram propostos da forma que quiseram. Isso nos leva a pensar que vale a pena dedicarmos mais tempo das nossas aulas para a realização de aulas diferenciadas, para que não sejam apenas a sistematização de fórmulas e definições, mas para que os alunos possam por si próprios, com situações cotidianas e mais próximas da realidade, entenderem o que está acontecendo, atribuindo-lhes significado.

Constatamos que os alunos que conheciam pouco, ou praticamente nada a respeito de matrizes, conseguiram resolver as operações e entender como ela se relaciona com a vida cotidiana. Além disso, eles participaram e se envolveram ativamente na resolução das atividades propostas. Nas palavras da professora responsável pela turma, na qual o estágio aconteceu, seus alunos agiram naturalmente,

[...] não se sentindo em momento algum, inibidos pela presença de outros professores em sala de aula, mostrando interesse e um bom desempenho em relação às atividades que lhes foram propostas, tornando as aulas um momento de aprendizagem e oportunidade de compreensão do significado do conteúdo ensinado. Pude perceber que ao final do período do estágio ocorreu a compreensão do conteúdo abordado sendo possível, tranquilamente, dar continuidade ao assunto nas aulas seguintes. A experiência mostra o quanto é importante diversificar as maneiras de trabalhar os conteúdos em sala de aula, e como os alunos tem interesse por aprender, se forem incentivados a fazê-lo. (Professora responsável pela turma)

Por depoimentos como esse e também por entender o quanto é importante para os alunos que estão em formação, preparando suas primeiras aulas, testarem metodologias e abordagens diferenciadas, que precisamos lutar por uma formação adequada nos cursos de licenciaturas. Isso corrobora com o que afirmam Costa e Allevato (2019, p. 47) de que “a formação inicial de professores de Matemática deveria incluir atividades voltadas à aprendizagem através da resolução de problemas, para que os licenciandos vivenciem experiências a serem colocadas em sua prática de sala de aula”.

Uma formação inicial que preze por explorar abordagens diferenciadas, que permitam que os futuros professores não apenas conheçam as metodologias preconizadas para o ensino de matemática, mas possam testá-las, certamente possibilitará que os futuros professores sejam profissionais mais seguros para realizarem a abordagem de conteúdos de maneira diferenciada.

Bom seria se todos os alunos, futuros professores, estivessem dispostos e pudessem viver experiências durante o estágio supervisionado, que possibilitassem o uso

da história da matemática, dos jogos, das tecnologias, meios preconizados pelos PCN, como “recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução” (BRASIL, 1998, p. 42) e que são “alguns caminhos para fazer matemática na sala de aula” (BRASIL, 1998, p. 42).

Tal como a Resolução de Problemas, poderíamos considerar outras possibilidades de abordagens de conteúdos matemáticos em sala de aula, pois entendemos que o conhecimento de diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática.

Referências

- BECKER, F. **A epistemologia do professor: o cotidiano da escola**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 1993.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.
- COSTA, M. dos S.; ALLEVATO, N. G. A formação inicial de futuros professores de matemática sob a perspectiva da Resolução de Problemas. **Revista Brasileira de Educação de Ciências e Educação Matemática**, Cascavel, v. 3, n. 1, p. 40-65, 2019.
- DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.
- JUSTO, J. C. R. Resolução de problemas matemáticos no ensino fundamental. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul. v. 1, n. 13, p.37- 45, 2013.
- MENEGHETTI, F. K. O que é um ensaio teórico? **Revista de Administração Contemporânea**, Curitiba. v. 15, n. 2, p. 320-332, 2011.
- ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199-220.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98. 2011.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (org.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2. Reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1997.
- SANCHES, M. H. F. **Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000253634>. Acesso em: 13 jun. 2019.

SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? *In*: Abrantes, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (ed.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM e Projecto MPT. 1996. p. 61-72. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM). Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/schoenfeld%2091.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2019.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar matemática**: 2. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

Recebido em: 03 de julho de 2019.

Aceito em: 27 de novembro de 2019.