ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

COMO UMA FRAÇÃO RECEBE SEU NOME?[1]

HOW DOES A FRACTION GET ITS NAME?

Arthur B. Powell[2]

Resumo: Perspectivas filosóficas e culturais moldam como uma fração é nomeada e definida. Por sua vez, essas perspectivas têm consequências para a conceitualização de frações dos estudantes. Examinamos os fundamentos históricos de duas perspectivas do que são frações—particionamento e medição—e como essas visões influenciam o conhecimento das frações. Para a perspectiva dominante, partição, indicamos como sua abordagem ao que é uma fração que discretiza objetos e seu correlato visual bem-intencionado causa aos alunos uma série de dificuldades perceptivas. Com base na prática cultural e social humana de medir quantidades contínuas, oferecemos um entendimento alternativo do que é uma fração e ilustramos a promessa dessa visão para o conhecimento da fração. Introduzimos ferramentas pedagógicas, varas Cuisenaire e ilustramos como elas podem ser usadas para implementar uma perspectiva de medição para compreender propriedades e uma definição de frações. Terminamos esboçando como iniciar uma perspectiva de medição em uma sala de aula de matemática.

Palavras-chave: Frações; Gattegno; Medição; Partição; Frações unitárias.

Abstract: Philosophical and cultural perspectives shape how a fraction is named and defined. In turn, these perspectives have consequences for learners' conceptualization of fractions. We examine historical foundations of two perspectives of what are fractions—partitioning and measuring—and how these views influence fraction knowledge. For the dominant perspective, partitioning, we indicate how its approach to what is a fraction that discretizes objects and its well-meaning visual correlates cause learners a host of perceptual difficulties. Based on the human cultural and social practice of measuring continuous quantities, we then offer an alternative understanding of what is a fraction and illustrate the promise of this view for fraction knowledge. We introduce pedagogical tools, Cuisenaire rods, and illustrate how they can be used to implement a measuring perspective to comprehending properties and a definition of fractions. We end by sketching how to initiate a measuring perspective in a mathematics classroom.

Keywords: Fractions; Gattegno; Measuring; Partitioning; Unit fractions.

1 Introdução

Uma resposta à pergunta — como uma fração recebe seu nome? — pode parecer sem problemas e direta. Um indivíduo escolarizado pode responder: “uma fração é parte de um todo”. De fato, esse é o ponto de vista encontrado em livros didáticos aprovados para escolas (SCHEFFER; POWELL, 2019) e aparece em outras fontes oficiais, como

[1] Este artigo foi traduzido do inglês para o português pela Profa. Dra. Maria Alice Veiga Ferreira de Souza do Instituto Federal de Espírito Santo. Ela e o autor colaboram em um projeto de pesquisa que envolve a perspectiva de medição, uma abordagem descrita neste artigo. O projeto foi apoiado pelo *International Collaborative Research Grant* da *Rutgers University*, “*Aligning Neuroscientific and Mathematics Education Research to Understand Rational Number Cognition*.”

[2] Professor Titular, Rutgers University. Department of Urban Education, Rutgers University-Newark, Newark, New Jersey, USA. E-mail: powellab@newark.rutgers.edu

DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

dicionários físicos e sites da Internet. No entanto, por mais simples que seja uma fração, as ideias sobre *o que é* e *como defini-la* se dividem em duas perspectivas distintas: partição e medição. A primeira perspectiva enfatiza a contagem de objetos discretos e a segunda a comparação de quantidades contínuas. Cada visão tem sua origem histórica e consequência epistemológica. A seguir, é apresentada uma breve descrição do nascimento de cada perspectiva e como cada uma delas influencia o conhecimento de fração. Posteriormente, como a perspectiva de partição é bem conhecida, é descrita mais amplamente a influência da perspectiva de medição no entendimento das frações.

2 Perspectiva de Partição

A atual compreensão dominante de como uma fração recebe seu nome está enraizada em um desenvolvimento relativamente recente na história da matemática. Esse desenvolvimento histórico ocorreu no início do século XX e está baseado em uma visão filosófica defendida pelo influente matemático alemão, David Hilbert, chamada formalismo. Os formalistas acreditavam que toda a matemática pode ser formulada com base em regras para manipulação de fórmulas sem qualquer referência aos seus significados ou contextos práticos. Em outras palavras, os formalistas sustentam que os objetos iniciais do pensamento matemático são os próprios símbolos matemáticos e não quaisquer significados atribuídos a eles (SIMONS, 2009). Essa crença filosófica sobre a natureza da matemática permeia a educação matemática. Uma consequência do formalismo é como os números racionais são definidos, em especial as frações (SCHMITTAU, 2003). Uma definição formalista de números racionais é a seguinte: Os números racionais representados como frações comuns são símbolos bipartidos que expressam quocientes ou proporções de dois números inteiros, a/b, sendo a e b inteiros e $b \neq 0$. Na expressão, a/b, a é chamado de dividendo ou numerador e b de divisor ou denominador.

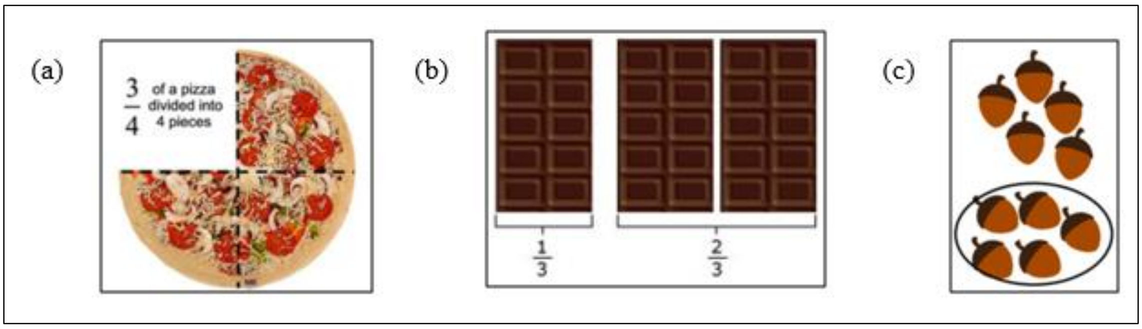
Essa é uma definição formal de uma fração. No entanto, como essa definição faria pouco sentido para os estudantes, os educadores matemáticos inventaram correlações visuais para frações que envolvem particionar itens do cotidiano (DAVYDOV; TSVETKOVICH, 1991; SCHMITTAU, 2003), como pizzas, barras de chocolate e castanhas. Depois de dividir em partes iguais uma pizza ou uma barra de chocolate, ou ainda, identificar um subconjunto de uma coleção de castanhas, o denominador de uma fração representa uma contagem das partes igualmente divididas ou da coleção, e,

ReBECEM
Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

separadamente, o numerador é uma contagem das partes de interesse ou do subconjunto identificado (Figura 1).

Essas representações visuais dão sentido à definição formal de uma fração com interpretações cotidianas. Embora esses significados contradigam o projeto formalista, eles fornecem às crianças acesso visual à definição formalista de uma fração e seu símbolo bipartido, a/b. O significado da representação visual envolve dividir uma área em partes iguais discretas ou identificar um subconjunto de uma coleção de objetos e, em seguida, um processo de dupla contagem e registro: (1) o número de partes ou objetos iguais e (2) o número de partes de interesse ou objetos em um subconjunto identificado. Essa visão de como uma fração recebe esse nome pode ser chamada de perspectiva de partição e é dependente da contagem.

Figura 1: Três representações de partição de frações: (a) Uma pizza que foi dividida em quatro partes, agora é mostrada com apenas três partes ou 3/4 da pizza. (b) Uma barra de chocolate de várias seções dividida igualmente em três partes com indicação de 1/3 e 2/3 da barra. (c) Uma coleção de 10 castanhas com destaque de um subconjunto de cinco castanhas identificado como 5/10



Fonte: Acervo do autor

Essas representações visuais dão sentido à definição formal de uma fração com interpretações cotidianas. Embora esses significados contradigam o projeto formalista, eles fornecem às crianças acesso visual à definição formalista de uma fração e seu símbolo bipartido, a/b. O significado da representação visual envolve dividir uma área em partes iguais discretas ou identificar um subconjunto de uma coleção de objetos e, em seguida, um processo de dupla contagem e registro: (1) o número de partes ou objetos iguais e (2) o número de partes de interesse ou objetos em um subconjunto identificado. Essa visão de como uma fração recebe esse nome pode ser chamada de perspectiva de partição e é dependente da contagem.

Para os estudantes, essa perspectiva implica em dificuldades cognitivas. Um desafio conceitual é que a divisão em partes iguais de um objeto não atribui significado a uma fração imprópria, uma fração cujo numerador é maior que o seu denominador. Mack

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

(1993) registra que os estudantes consideram sem sentido frações impróprias como a de $4/3$, uma vez que não se pode ter 4 partes de um objeto que é dividido em 3 partes. Outra questão cognitiva surge de uma ênfase instrucional na estrutura da forma simbólica de duas partes de uma fração. Em vez de comunicar que uma fração de forma holística é de uma magnitude única, o foco instrucional sugere aos estudantes que uma fração é composta de duas partes numéricas distintas e os/as levam a aplicar, inapropriadamente, propriedades de números inteiros para avaliar frações. Os estudantes confundem o seguinte:

1. o número de partes em uma partição com o tamanho de cada parte; portanto, $1/4$ é maior que $1/3$, pois 4 é maior que 3;
2. a adição de frações com adição de números inteiros: $1/2 + 1/3 = 2/5$; e;
3. a exigência de partes iguais, “contar partes não-congruentes para nomear uma fração de *um terço* em um círculo que está dividido ao meio e dois quartos” (NI; ZHOU, 2005, p. 29, ênfase original).

Os três equívocos conceituais acima, bem como a relutância documentada de estudantes em ver frações impróprias como significativas, são levados pelo modo como a perspectiva de partição define uma fração, partes de um único todo igualmente particionado.

3 Perspectiva de Medição

Há outra visão de como o nome de uma fração se origina. Em vez de filosófica, essa perspectiva é cultural. Essa visão alternativa de como as frações surgiram está baseada no entendimento da prática social humana de comparar ou medir quantidades contínuas. Mais de quatro milênios atrás, nas culturas da Mesopotâmia e Egípcia, ao longo dos rios Tigre, Eufrates e Nilo, com o nascimento da agricultura, as condições materiais introduziram a necessidade de medir quantidades de terra, plantações, sementes e, assim por diante, para registrar medidas (CLAWSON, 1994/2003; STRUIK, 1948/1967). Para medir as distâncias da terra, os antigos agrimensores egípcios esticaram cordas nas quais o comprimento entre dois nós representava uma unidade de medida. Dessa prática social, surgiram simultaneamente geometria e números fracionários (ALEKSANDROV, 1963; CARAÇA, 1951; ROQUE, 2012). Mais especificamente, surgiram frações à medida que os indivíduos queriam saber, por exemplo, a extensão de uma distância d, em comparação com uma unidade de medida u. Existem dois casos. Ou

DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

d é igual a um múltiplo exato de u, ou não, o que ocasiona a necessidade de números fracionários. A seguir, apresentamos uma ferramenta pedagógica para nos ajudar a examinar cada dos dois casos de uma perspectiva de medição.

Figura 2: Barras de Cuisenaire

Fonte: Acervo do autor

No primeiro caso, d é igual a exatamente k unidades de medida u, onde k é um número inteiro, então $d = k \times u$. Para ilustrar essa expressão, considere as barras de Cuisenaire (Figura 2). Elas são quantidades mensuráveis de dez cores e tamanhos diferentes. As cores são branca, vermelha, verde clara, roxa, amarela, verde escura, preta, marrom, azul e laranja. Em termos de tamanhos, o comprimento de cada barra de cor diferente organizadas em sequência aumenta em um centímetro, começando com um cubo cujo comprimento é de um centímetro, onde barras de mesmo comprimento têm a mesma cor e *vice-versa*. Esses materiais podem ser usados para fundamentar uma perspectiva de medição para o conhecimento de fração, como uma relação particular de quantidades (GATTEGNO, 1974/2010). Sobre este ponto, Gattegno (1974/2010) [3], com referência às barras de Cuisenaire, resume o papel da medição na matemática elementar:

> A medida, no trabalho com as barras, é emprestada da física e introduz a contagem pela porta dos fundos, pois é necessário saber *quantas* vezes a unidade foi usada para associar um número a um determinado comprimento. Mas a medida também é a fonte de frações e números mistos e serve mais tarde para introduzir números reais. Assim, a medida é uma ferramenta mais poderosa do que a contagem, a qual é usada como gerador de matemática. Contar ... pode ser interpretado novamente como sendo uma medida com barras brancas. Medida também é naturalmente uma interpretação da iteração ... (p. 196, ênfase original).

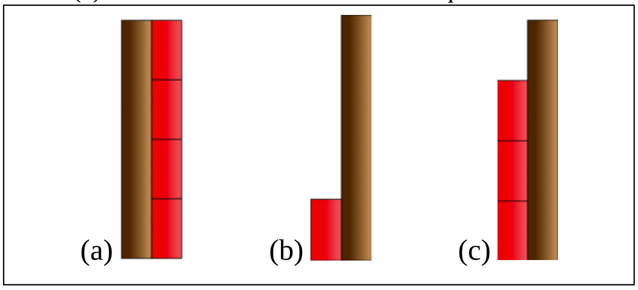
[3] Outros pesquisadores desenvolveram e investigaram abordagens instrucionais baseadas na medição de quantidades contínuas. Veja, por exemplo, o trabalho de Brousseau, Brousseau, e Warfield (2004); Carraher (1996); Davydov e Tsvetkovich (1991); Dougherty e Venenciano (2007); Powell (em prelo); Venenciano e Heck (2016); e Venenciano, Slovin, e Zenigami (2015).

DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

As barras de Cuisenaire têm muitos atributos. Um atributo é a cor e outro é o comprimento. Está implícito na afirmação de Gattegno que o comprimento é o atributo de interesse e para ser medido. Considere uma barra marrom e selecione como unidade de medida a barra vermelha. Qual é o comprimento da barra marrom em unidades de barras vermelhas? A Figura 3a mostra que, lendo da esquerda para a direita, o comprimento de uma barra marrom é igual ao comprimento de quatro barras vermelhas. Esta afirmação revela uma relação comparativa entre as duas quantidades, barras marrons e vermelhas. A relação é multiplicativa, pois quatro barras vermelhas são iguais a uma barra marrom. Esta comparação multiplicativa particular entre as duas quantidades pode ser declarada de maneira diferente. Entre as possibilidades, são apresentadas três expressões verbais equivalentes à declaração original:

1. Uma barra marrom mede quatro barras vermelhas.
2. Quando medida por barras vermelhas, a barra marrom é equivalente a quatro barras vermelhas.
3. Uma barra marrom medida por barras vermelhas é igual a quatro.

Figura 3: (a) A barra marrom é igual a quatro barras vermelhas. (b) A barra vermelha é um quarto da barra marrom. (c) Três barras vermelhas são três-quartos da barra marrom



Fonte: Acervo do autor

Essas são maneiras alternativas de falar sobre o comprimento de uma barra marrom quando a barra vermelha é a unidade de medida. Agora, se o comprimento de uma barra marrom é a unidade de medida, qual é o comprimento da barra vermelha em unidades de barras marrons? Como o comprimento de quatro barras vermelhas é igual ao comprimento de uma barra marrom, então na Figura 3b, lendo da esquerda para a direita, o comprimento de uma barra vermelha é um quarto do comprimento de uma barra marrom. O comprimento de três barras vermelhas é então três quartos do comprimento de uma barra marrom (Figura 3c). Continuando com o padrão, o comprimento de cinco barras vermelhas é cinco quartos do comprimento de uma barra marrom. E assim por diante. Em suma, comparando o comprimento de duas quantidades—com uma

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

quantidade considerada como a unidade de medida e usada para medir a outra quantidade—é como uma fração recebe seu nome. Esse entendimento pode ser chamado de perspectiva de medição.

As declarações verbais associadas às configurações da barra na Figura 3 têm maneiras de ser representadas simbolicamente, usando notação matemática. Para esse fim, cada barra de Cuisenaire pode ser expressa com uma letra. A Tabela 1 exibe correspondências entre a cor de cada barra e uma letra para simbolizá-la.

Tabela 1: Correspondência de cores-letras das barras de Cuisenaire, da menor (1 centímetro) para a maior (10 centímetros)

branca	vermelha	verde clara	roxa	amarela	verde escura	preta	marrom	azul	laranja
b	v	c	r	d	e	p	m	a	l

Fonte: Autor

Na coluna da esquerda da Tabela 2 estão listadas as declarações verbais associadas às configurações da barra da Figura 3 e, na coluna da direita, as expressões simbólicas matemáticas correspondentes. Algumas expressões matemáticas correspondem a mais de uma afirmação verbal.

Tabela 2: Correspondência entre expressões verbais e simbólicas

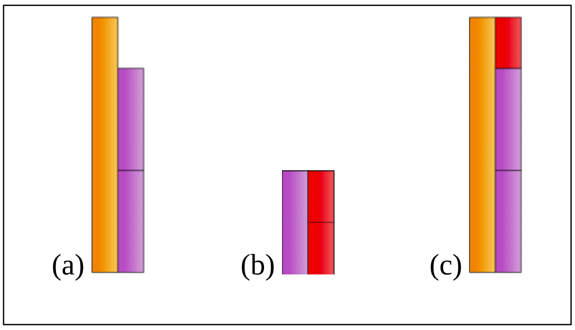
Expressões	
Verbal	Simbólico
1. O comprimento de uma barra marrom é igual ao comprimento de quatro barras vermelhas. 2. Quando medida por barras vermelhas, a barra marrom equivalente a quatro barras vermelhas. 3. Uma barra marrom mede quatro barras vermelhas.	$m = 4v$
4. Uma barra marrom medida por barras vermelhas é igual a quatro.	$\frac{m}{v} = 4$
5. O comprimento de uma barra vermelha é igual a um quarto do comprimento de uma barra marrom. 6. A vermelha é um quarto da marrom.	$v = \frac{1}{4} \times m$
7. A barra vermelha medida por barras marrons é igual a um quarto.	$\frac{v}{m} = \frac{1}{4}$

Fonte: Acervo do autor

Agora, o caso que desencadeou a invenção de frações. Quando os antigos agrimensores egípcios queriam saber a extensão de uma distância d, em comparação com uma unidade de medida u, nem sempre era o caso de d ser exatamente k unidades de medida u, onde k é um número inteiro. Ou seja, não é garantido que d, medido por u, seja exatamente igual a $k \times u$. Por exemplo, usando barras de Cuisenaire, considere o comprimento da barra roxa como a unidade de medida. Qual é a medida do comprimento

ISSN 2594-9179
DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846
da barra laranja? Na Figura 4a, uma barra laranja não mede exatamente um número inteiro do comprimento das barras roxas. É igual a duas roxas e menos do que outra barra roxa. O comprimento de uma barra roxa mede um número inteiro de comprimentos de outra barra? Na Figura 4b, uma barra roxa é igual a duas barras vermelhas. Uma barra vermelha, que é uma parte da barra roxa, é exatamente o comprimento que completa a medida da barra laranja (Figura 4c). Como a barra roxa é a unidade e é igual ao comprimento de duas barras vermelhas, o comprimento de uma barra vermelha é um meio do comprimento de uma barra roxa. Além disso, a vermelha pode ser chamada de subunidade da barra roxa. Em conclusão, quando medido por uma barra roxa e sua subunidade, o comprimento de uma barra laranja mede o comprimento de duas das barras roxas e um meio do comprimento de uma barra roxa. A conclusão na notação matemática é a seguinte: $l = 2 \times r + \frac{1}{2} \times r$, $l = 2 \times r + \frac{1}{2} \times r$ ou, já que cada barra roxa é igual a duas barras vermelhas, esta: $l = \frac{5}{2} \times r$.

Figura 4: Medir o comprimento da barra laranja tendo a barra roxa como a unidade de medida



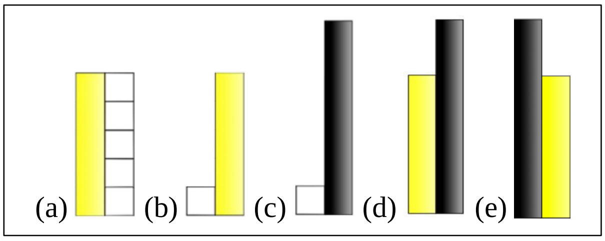
Fonte: Acervo do autor

Usando barras de Cuisenaire, o nome da porção do comprimento das barras pode ser obtido usando qualquer barra como unidade de medida. Por exemplo, determine o nome do comprimento de uma barra preta medida por uma barra amarela. Use a barra amarela para medir o comprimento de uma barra branca (Figuras 5a e 5b). Aqui, a barra branca é usada como uma subunidade da barra amarela e seu comprimento é igual a um quinto do comprimento de uma barra amarela, que é escrito como $b = \frac{1}{5} \times d$. Como sete barras brancas medem o comprimento de uma barra preta, a barra branca também é uma subunidade da barra preta (Figura 5c). Uma barra amarela representa cinco sétimos de uma barra preta (Figura 5d), e inversamente, seu comprimento é sete quintos de uma barra

DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

amarela (Figura 5e). Respectivamente, essas expressões verbais são simbolizadas da seguinte maneira: $d = \frac{5}{7} \times p$ e $p = \frac{7}{5} \times d$.

Figura 5: (a) $y = 5w$. (b) $w = \frac{1}{5} \times y$, (c) $y = \frac{5}{7} \times e$, and (d) $e = \frac{7}{5} \times y$



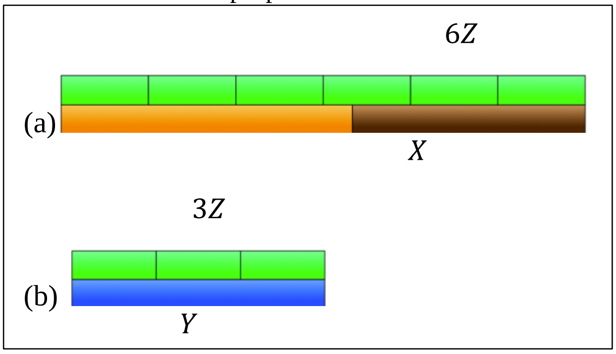
Fonte: Acervo do autor

Em geral, se d não for igual a um múltiplo exato de u, poderá existir uma subunidade da medida v, de modo que d seja igual a exatamente m subunidades de v, isto é, $d = m \times v$; e u é igual a exatamente n subunidades de v, ou seja, $u = n \times v$, o que implica que $v = \frac{1}{n} \times u$. Como $d = m \times v$, então $d = \frac{m \times 1}{n \times u}$; isto é $d = \frac{m}{n} \times u$. Assim, a distância d é igual à razão m enésimos (ou m um-enésimo) da unidade de medida u, onde $\frac{m}{n}$ é uma fração. Essa expressão—$d = \frac{m}{n} \times u$—representa uma comparação multiplicativa entre as duas quantidades mensuráveis d e u.

O fato de haver uma comparação multiplicativa entre os comprimentos d e u significa que os dois comprimentos são comensuráveis. Em Matemática, a comensurabilidade de duas quantidades diferentes, como comprimentos, X e Y, indica que eles têm uma unidade de medida comum. Possuir uma unidade de medida padrão significa que existe um terceiro comprimento, Z, menor que ou igual ao menor de X e Y, de modo que, quando colocado de ponta a ponta, um número inteiro de vezes cria um comprimento igual a X (Figura 6a). Da mesma forma, quando Z é colocado de ponta a ponta, um número inteiro de vezes diferente cria um comprimento igual a Y (Figura 6b). A proporção de X e Y, é uma fração, X/Y.

ReBECEM | Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

Figura 6: Os comprimentos X e Y têm Z como uma unidade de medida comum e, portanto, são proporcionais



Fonte: Acervo do autor

Algum tempo depois que os egípcios inventaram frações e uma notação para elas[4], os gregos antigos descobriram que essas proporções nem sempre eram comensuráveis (STRUIK, 1948/1967), significando mensuráveis pela mesma unidade, levando à descoberta de números irracionais[5].

Com base nessa perspectiva de medição, uma fração é definida como *uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis da mesma espécie*.

4 Considerações finais

Essa definição é derivada de um entendimento histórico do surgimento de números fracionários e das implicações matemáticas de medir comprimentos para um entendimento de números racionais e irracionais. No passado antigo, as condições materiais evoluíam e necessitavam de linguagem para descrever magnitudes cujas medidas eram maiores que um número inteiro, mas menores que seu sucessor. Com frações, essas magnitudes de comprimento poderiam ser quantificadas com mais precisão. Comentando sua utilidade cognitiva para a aprendizagem de matemática, Carraher (1993) observa que “o comprimento, mais do que outras quantidades, expressa a magnitude direta e inequivocamente. Um estudante pode comparar diretamente dois comprimentos por meio da inspeção visual” (p. 284).

Pesquisadores da educação matemática como Carraher (1993) e Gattegno (1974/2010), observaram que a comparação do comprimento, uma quantidade contínua,

[4] Veja Ifrah (1981/1998) ou Roque (2012) para obter informações sobre como os antigos egípcios simbolizavam frações.
[5] Para discussões sobre números irracionais e reflexões para a sala de aula, veja Broetto e Santos-Wagner (2017).

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846
é conceitualmente direta. Há evidências crescentes de que os seres humanos têm uma capacidade inata de discernir a magnitude relativa entre proporções de quantidades contínuas não simbólicas (MATTHEWS; ZIOLS, 2019). Os estudos funcionais de neuroimagem identificaram consistentemente regiões cerebrais sobrepostas envolvidas na comparação de razões não-simbólicas e frações simbólicas (JACOB; NIEDER, 2009; MOCK; HUBER; BLOECHLE; BAHNMUELLER et al., 2019; MOCK; HUBER; BLOECHLE; BIETRICH et al., 2018). Como destacam Matthews e Ellis (2018) e Matthews e Ziols (2019), essa capacidade não-simbólica de discriminar magnitudes de proporções contínuas ainda precisa ser recrutada e investigada no contexto da instrução de fração. Essa investigação é facilitada com uma perspectiva de medição para o conhecimento de fração (POWELL, 2019).

A perspectiva de medição tem vários resultados matemáticos e cognitivos teorizados que merecem destaque. Pode instigar nos estudantes as seguintes consciências matemáticas e cognitivas:

- Quando a quantidade a ser medida não for um número inteiro múltiplo da unidade de medida, a necessidade de uma subunidade de medida que seja comensurável à unidade de medida e à quantidade a ser medida;
- Os comprimentos podem ser expressos como frações impróprias ou números mistos;
- A magnitude de uma quantidade pode ser expressa por diferentes números fracionários como uma consequência de diferentes unidades de medida;
- Para um determinado comprimento, diferentes unidades de medida produzem medidas diferentes—quanto menor a magnitude da unidade, maior a medida;
- Ao contrário da perspectiva de particionamento—cujo ato de contar partes de uma única quantidade sugere uma relação aditiva—uma fração é uma relação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis; a relação é comparação.

As duas primeiras dessas consciências fornecem insights sobre a definição de uma fração de uma perspectiva de medição. A definição pode ser formulada em duas partes, definindo primeiro uma fração unitária e, em seguida, um número fracionário geral:

Para uma determinada unidade de medida e número inteiro b, a expressão simbólica $\frac{1}{b}$ é uma *fração unitária* e representa o comprimento de uma quantidade. Quando essa quantidade é iterada b vezes, o resultado é um comprimento igual à unidade de medida. Mais geralmente, para uma dada unidade de medida e números inteiros a e b,

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

a expressão $\frac{a}{b}$ representa uma fração cuja magnitude é igual ao comprimento $\frac{1}{b}$ iterado a vezes.

Nesta definição, o termo "comprimento" pode ser substituído por qualquer outro atributo mensurável de uma quantidade como área, volume, massa ou tempo. Para frações como números abstratos, a afirmação é a seguinte:

Para uma dada unidade e número inteiro b, a expressão simbólica $\frac{1}{b}$ é uma *fração unitária* e representa um número. Quando é iterado b vezes, o número resultante é igual à unidade. Mais geralmente, para uma dada unidade e números inteiros a e b, a expressão $\frac{a}{b}$ representa uma fração cuja magnitude é igual a $\frac{1}{b}$ iterada a vezes.

Nos estudos em sala de aula, a necessidade surge naturalmente de um item lexical para nomear a magnitude de uma subunidade de medida (POWELL, no prelo). A subunidade facilita medir e nomear e, eventualmente, simboliza a medida do comprimento quando não é um múltiplo exato da unidade de medida.

Finalmente, aqui está uma maneira de iniciar um módulo sob a perspectiva de medição sobre como uma fração obtém seu nome. Um começo é envolver os alunos na medição do comprimento de diferentes objetos disponíveis na sala de aula. Pode ser necessário transmitir o significado do comprimento como um atributo dos objetos e esclarecer que a medição é um processo para determinar uma contagem de quantas iterações de uma unidade de medida são iguais ao comprimento de um objeto. Os estudantes podem escolher a unidade de medida. A classe pode discutir as medidas inconsistentes do comprimento de um objeto para diferentes unidades de medida e a eficácia de diferentes unidades de medida dada a extensão de um determinado comprimento. Além dos objetos do dia a dia, os estudantes podem receber posteriormente barras de Cuisenaire, para que trabalhem em pares para praticar a medição do comprimento de objetos, como os lados das mesas. Os estudantes podem se beneficiar discutindo a relação entre o tamanho de uma unidade de medida e o número de iterações necessárias para medir um comprimento específico. Eles podem convergir para a necessidade de ter uma unidade de medida padrão e um nome para a parte que permanece quando o comprimento de um objeto não é um múltiplo exato da unidade de medida.

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

Referências

ALEKSANDROV, A. D. A general view of mathematics. *In*: ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N. *et al*. (ed.). **Mathematics**: its content, methods, and meaning. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, v. 1, p. 1-64, 1963.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. D. **Números irracionais para professores (e futuros professores) de matemática**: uma abordagem direcionada à sala de aula. Vitória, ES: Edifes, 2017.

BROUSSEAU, G.; BROUSSEAU, N.; WARFIELD, V. Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 1: Rationals as measurement. **The Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdã , v. 23, n. 1, p. 1-20, 2004.

CARAÇA, B. D. J. **Conceitos fundamentais da Matemática [Fundamental concepts of mathematics]**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARRAHER, D. W. Learning about fractions. *In*: STEFFE, L. P.; NESHER, P. *et al*. (ed.). **Theories of mathematical learning**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1996. p. 241-266.

CARRAHER, D. W. Lines of thought: a ratio and operator model of rational number. **Educational Studies in Mathematics**, Berlim, v. 25, n. 4, p. 281-305, 1993.

CLAWSON, C. C. **The mathematical traveler**: exploring the grand history of numbers. Cambrige, MA: Perseus, 1994/2003.

DAVYDOV, V. V.; TSVETKOVICH, Z. H. On the objective origin of the concept of fractions. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 13, n. 1, p. 13-64, 1991.

DOUGHERTY, B. J.; VENENCIANO, L. C. H. Measure up for understanding. **Teaching Children Mathematics**, v. 13, n. 9, p. 452-456, 2007.

GATTEGNO, C. **The commonsense of teaching mathematics**. New York: Educational Solutions Worldwide, 1974/2010.

IFRAH, G. **The universal history of numbers**: from prehistory to the invention of the computer. Tradução de BELLOS, D.;HARDING, E. F. *et al*. London: Harvill, 1981/1998.

JACOB, S. N.; NIEDER, A. Notation-Independent Representation of Fractions in the Human Parietal Cortex. **Journal of Neuroscience**, Amsterdam, v. 29, n. 14, p. 4652-4657, 2009.

MACK, N. K. Learning rational numbers with understanding: the case of informal knowledge. *In*: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. *et al*. (ed.). **Studies in mathematical thinking and learning. Rational numbers**: an integration of research. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1993. p. 85-105.

MATTHEWS, P. G.; ELLIS, A. B. Natural alternatives to natural number: the case of ratio. **Journal of Numerical Cognition**, [*S.I.*], v. 4, n. 1, p. 19-58, 2018.

MATTHEWS, P. G.; ZIOLS, R. What's perception got to do with it? Re-framing foundations for rational number concepts. *In*: NORTON, A.; ALIBALI, M. W. (ed.). **Constructing Number**: merging perspectives from Psychology and Mathematics Education. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 213-235.

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: http://dx.doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

MOCK, J. *et al*. Magnitude processing of symbolic and non-symbolic proportions: an fMRI study. **Behavioral Brain Functions**, [*S.I.*], v. 14, n. 9, p. 1-19, 2018.

MOCK, J. *et al*. E. Processing symbolic and non-symbolic proportions: domain-specific numerical and domain-general processes in intraparietal cortex. **Brain Research**, Amsterdam, v. 1714, n.1, p. 133-146, 2019.

NI, Y.; ZHOU, Y.-D. Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. **Educational Psychologist**, Hillsdale, v. 40, n. 1, p. 27-52, 2005.

POWELL, A. B. Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: um estudo preliminar com alunos nos anos inicias [Improving student knowledge about fraction magnitude: an initial study with students in early elementary education]. **International Journal for Research in Mathematics Education**, [*S.I.*], v. 9, n. 2, p. 50-68, 2019.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, [*S.I.*], v. 1, n. 3, p. 476-503, 2019.

SCHMITTAU, J. Cultural-historical theory and mathematics education. *In*: KOZULIN, A.;GINDIS, B. *et al*. (ed.). **Vygotsky's educational theory in cultural context**. Cambridge, UK: Cambridge, 2003. p. 225-245.

SIMONS, P. Formalism. *In*: IRVINE, A. D. (ed.). **Philosophy of mathematics**. Burlington, MA: North Holland, 2009. p. 291-310.

STRUIK, D. J. **A concise history of mathematics**. 3rd Revised ed. New York: Dover, 1948/1967.

VENENCIANO, L.; HECK, R. Proposing and testing a model to explain traits of algebra preparedness. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 92, n. 1, p. 21-35, 2016.

VENENCIANO, L.; SLOVIN, H.; ZENIGAMI, D. Learning place value through a measurement context. **Conference Proceedings of ICMI Study 23: Primary Mathematics Study on Whole Numbers**, 2015. p. 575-582.

Convidado em: 20 de agosto de 2019.

Submetido em: 17 de novembro de 2019.

Revisado em: 11 de dezembro de 2019.