Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

CONTRIBUIÇÕES DE UMA OFICINA SOBRE GEOMETRIA DO TÁXI NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: ENTRE DESCOBERTAS, APRENDIZAGENS E PRÁTICA DOCENTE

CONTRIBUTIONS OF A WORKSHOP ON TAXI GEOMETRY IN THE TRAINING FOR TEACHERS WHO TEACH MATHEMATICS: AMONG DISCOVERIES, LEARNING AND TEACHING PRACTICE

Renan Oliveira Altoé[1]

Jéssica Mistura Zanon[2]

Beatriz Moreira Pereira[3]

Sebastião Berçaco Gussani[4]

Vitor Botelho Cecotti[5]

Resumo: Este trabalho apresenta as contribuições da oficina "Geometria do Táxi: teoria e prática" para a formação de professores que ensinam matemática, ministrada no VIII Seminário Nacional da Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), campus Cachoeiro de Itapemirim – ES. De abordagem qualitativa, buscou responder à seguinte questão de investigação: que contribuições esta proposta de oficina pode trazer para a formação de professores, considerando pertinente o ensino da Geometria do Táxi na Educação Básica? Os dados foram produzidos por questionário, com perguntas abertas, respondidas pelos participantes, ao término da oficina. As análises apontaram que a experiência possibilitou descobertas, aprendizagens e práticas docentes no campo da geometria, contribuindo na formação e atuação profissional dos participantes, bem como despertou interesses em buscarem novos conhecimentos relativos à importância da presença da Geometria do Táxi no ensino de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino de Matemática; Educação Básica.

Abstract: This paper presents the contributions of the workshop "Taxi Geometry: theory and practice" for the formation of teachers who teach mathematics, given during the VIII National Seminar of the Undergraduate Degree in Mathematics, of the Federal Institute of Espírito Santo (Ifes), Cachoeiro de Itapemirim campus - ES. Of qualitative approach, it sought to answer the following research question:

[1] Doutorando em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes). Secretaria de Estado da Educação (SEDU), Espírito Santo, Brasil. E-mail: renan.o.altoe@gmail.com.

[2] Mestra em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). Secretaria de Estado da Educação (SEDU), Espírito Santo, Brasil. E-mail: 1jessica.zanon@gmail.com.

[3] Licencianda em Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes). E-mail: beatrizmoreirapereira@gmail.com.

[4] Licenciando em Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes). E-mail: sebastiao.gussani@hotmail.com.

[5] Licenciado em Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes). E-mail: vitorb.cecotti@gmail.com.

what contributions can this workshop proposal bring to the formation of teachers, considering the teaching of Taxi Geometry pertinent in Basic Education? The data were produced by a questionnaire, with open questions, answered by the participants at the end of the workshop. The analyses pointed out that the experience enabled discoveries, learning and teaching practices in the field of geometry, contributing to the participants' education and professional performance, as well as awakened their interest in seeking new knowledge about the importance of the presence of Taxi Geometry in mathematics teaching.

Keywords: Mathematics Education; Mathematics Teaching; Basic Education.

1 Introdução

O ensino de matemática é alvo de constantes reflexões, tanto com relação à prática pedagógica quanto à formação de professores que ensinam matemática. Assim, aprendizagens teóricas e metodológicas, em espaços de formação, têm contribuído para aprofundar a importância do protagonismo discente, destacando o papel relevante da motivação na aprendizagem de matemática. Segundo Fiorentini (2003), a formação inicial deve possibilitar que os futuros professores de matemática melhorem e ampliem a compreensão das noções e representações matemáticas, desenvolvendo, também, a metacognição[6].

Quando se objetiva ensinar e aprender geometria, a Geometria Euclidiana tem predominância na matemática da Educação Básica. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a geometria envolve o estudo de amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas de diferentes áreas do conhecimento (BRASIL, 2017). No entanto, existem situações-problemas cujos conhecimentos da Geometria Euclidiana não são capazes de responder como, por exemplo: qual a menor distância entre dois pontos em uma cidade, se consideramos a existência de prédios e demais obstáculos? Nesse sentido, temos defendido que reflexões e debates sobre Geometrias Não-Euclidianas[7], na Educação Básica, são capazes de despertar novos olhares sobre o ensino e aprendizagem de geometria.

Na tentativa de promover espaços que discutam esses novos olhares, desenvolvemos uma oficina, intitulada “Geometira do Táxi: teoria e prática”, ministrada

[6] Para Ribeiro (2003, p. 109), “etimologicamente, a palavra metacognição significa para além da cognição, isto é, a faculdade de conhecer o próprio ato de conhecer, ou, por outras palavras, consciencializar, analisar e avaliar como se conhece”.

[7] Uma geometria é considerada Não-Euclidiana caso ela possua um sistema axiomático diferente, mas próximo do da Geometria Euclidiana. As Geometrias Não-Euclidianas surgiram a partir das tentativas de provar o quinto postulado de Euclides. Segundo Krause (1973), seria ideal, entretanto, que essa nova geometria atendesse a três critérios: (1) estar próxima da geometria euclidiana na estrutura axiomática; (2) ter aplicações significativas e (3) ser compreendida por qualquer pessoa que tenha uma pequena base na geometria euclidiana.

no VIII Seminário Nacional da Licenciatura em Matemática (SEMAT), que objetivou promover reflexões teóricas e práticas a partir de investigações entre Geometria Euclidiana e Geometria do Táxi. Para Kallef e Nascimento (2004), a Geometria do Táxi possibilita mudanças no ensino de matemática, integrando-a à prática social dos estudantes, permitindo conexões e contextualizando a geometria.

Portanto, este trabalho apresenta as contribuições da referida oficina ministrada no VIII Seminário Nacional da Licenciatura em Matemática (SEMAT), do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), campus Cachoeiro de Itapemirim – ES, para a formação de professores que ensinam matemática. De abordagem qualitativa, os dados foram produzidos por meio de um questionário aberto, respondido por oito participantes (que à época, eram licenciandos em matemática), com o qual buscamos responder à seguinte pergunta de investigação: que contribuições essa proposta de oficina pode trazer para a formação de professores, considerando pertinente o ensino da Geometria do Táxi na Educação Básica?

Nessa forma de construção de conhecimento, a oficina foi idealizada por anseios em possibilitar reflexões sobre a multiplicidade de olhares sobre o ensino de geometria, promovendo avanços no campo da matemática e a necessidade de proporcionar o estudo de outras geometrias no processo educativo.

Na seção **Geometria do Táxi: apontamentos teóricos e práticos**, apresentamos os elementos alvos de estudos decorrentes da oficina e que sustentam as reflexões que realizamos sobre a temática.

Na seção **Formação de Professores que Ensinam Matemática: alguns apontamentos**, discorremos brevemente sobre formação inicial de professores que ensinam matemática, destacando alguns elementos que orientam o processo formativo. Essa seção se constitui a partir da nossa compreensão de que a oficina se configurou como um ambiente de formação inicial, uma vez que os participantes foram, estritamente, licenciados em matemática.

Na seção **Desenho Metodológico**, destacamos os elementos que constituem o percurso metodológico da investigação, bem como as etapas de desenvolvimento da oficina, com destaque aos tópicos de discussão.

À guisa de conclusão, na seção **Análise de dados: o que encontramos nas respostas dos participantes?** Apresentamos as análises relativas às duas perguntas respondidas pelos participantes da pesquisa, buscando identificar possíveis contribuições da oficina no que tange às descobertas, aprendizagens e prática docente[8].

2 Geometria do Táxi: apontamentos teóricos e práticos

Desde os primórdios da humanidade, o homem está evoluindo as capacidades de compreender o mundo e interagir com ele. A matemática, por sua vez, tem contribuído para explicar uma gama de fenômenos que perspassam e influenciam a nossa existência. Contudo, nem todo conhecimento matemático é capaz de elucidar algumas situações-problemas que enfrentamos no cotidiano.

Assim como a Geometria Euclidiana que teve o seu desenvolvimento pautado nos problemas que emergiam das interações sociais, a Geometria do Táxi, segundo Leivas e Souza (2015), se desenvolveu a partir dos problemas não explicados pela Geometria Euclidiana. Historicamente, a Geometria do Táxi surgiu dos estudos de Topologia, nas definições de espaços métricos, sendo o matemático alemão (nascido na Rússia) Hermann Menkowski (1864-1909), responsável pela métrica do táxi (FUZZO; REZENDE; SANTOS, 2010). No entanto, o termo **Geometria do Táxi** surgiu em 1952, quando Karl Menger apresentou seu livreto intitulado ***You will like geometry*** no *Museum of Science and Industry of Chicago* e, mais tarde, em 1875, quando Eugene F. Krause publicou seu livro ***Taxicab Geometry: an adventure in non-euclidean geometry***, apresentando a perspectiva educacional dessa geometria (GUSMÃO; SAKAGUTI; PIRES, 2017).

A Geometria do Táxi é considerada uma Geometria Não-Euclidiana. Assim,

> [...] para lidar com a geografia urbana, um modelo conveniente é chamado geometria do táxi, assim denominada porque a distância percorrida por um táxi aproxima-se muito mais desta do que da distância euclidiana, já que o táxi não é um passarinho, tendo que obedecer ao traçado das ruas (WANDERLEY; CARNEIRO; WAGNER, 2002, p. 24).

Diante do exposto, percebemos que a Geometria do Táxi é um caminho que nos possibilita refletir sobre a importância de conhecermos outras geometrias e interpretar nossas práticas sociais a partir de outras lentes. Assim, Gusmão, Sakaguti e Pires (2017) apontam que a Geometria do Táxi aborda um novo conceito de geometria, contribuindo para responder ao antigo questionamento dos estudantes sobre a aplicabilidade da matemática. Esse pensamento vai ao encontro de Kallef e Nascimento (2004, p. 13),

---

[8] Assumimos como prática docente a ação didático-pedagógica do professor no ambiente da sala de aula.

quando denotam que "a Geometria do Táxi pode ser apresentada com intenção de se integrar a matemática ao cotidiano do aluno, pois esta se apresenta em todos os lugares [...]", permitindo que os estudantes façam conexões entre suas vivências e matemática, contextualizando a geometria.

No ensino de matemática, a defesa por práticas educativas que possibilitem aos estudantes visualizem ideias por diferentes perspectivas é um ponto de destaque em debates no campo da Educação Matemática. Nesse sentido,

> [...] ao introduzir o estudo da geometria do táxi na sala de aula, os alunos têm, por meio dele, a oportunidade e a capacidade de investigar tópicos da matemática tradicional por uma nova perspectiva, fazendo conexões dentro da própria Matemática e com o mundo a sua volta (GUSMÃO; SAKAGUITI; PIRES, 2017, p. 223).

Nessa ótica, a Geometria do Táxi é um conhecimento capaz de desvelar novas reflexões sobre o próprio pensamento geométrico euclidiano, além de possibilitar conexões dentro e fora da matemática. É importante destacar que a Geometria do Táxi possui uma métrica (distância entre pontos) diferente da métrica euclidiana, que afirma ser o segmento de reta a menor distância entre dois pontos.

Antes de principiarmos os estudos da métrica táxi, destaca-se algumas definições na Geometria do Táxi como: malha táxi, ponto (adjacente e não adjacente), bloco (incidente e congruente), curva fechada ou viagem redonda, viagem ou arco de curva fechada, viagem direta ou caminho direto, reta e reta paralela.

Na esfera da abordagem táxi, o **universo** é um conjunto de retas paralelas, verticais e horizontais, todas coplanares (CÉSAR, 2010). Assim, a **malha táxi** representa uma cidade "perfeita", ou seja, onde ruas são as retas verticais e horizontais e os espaços, entre elas, são representados por quarteirões ou obstáculos quaisquer. Na Figura 1, podemos visualizar a representação dessa ideia.

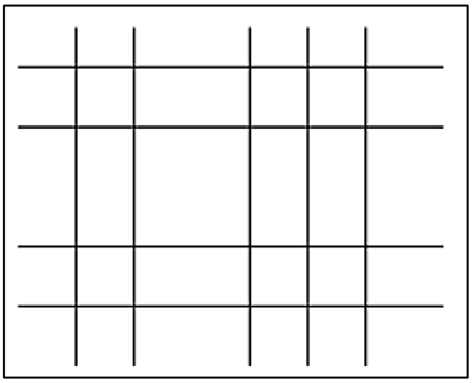

Figura 1: Malha quadriculada
Fonte: César (2010).

Segundo Kallef e Nascimento (2004), a malha quadriculada, nos estudos da Geometria do Táxi, se constitui um recurso que busca simplificar a medição da métrica táxi, cuja visualização é mais simples para os estudantes. Além disso, os pontos não precisam ter, necessariamente, coordenadas inteiras.

O **ponto**, na Geometria Táxi, carrega a mesma definição daquele da Geometria Euclidiana (CÉSAR, 2010; GUSMÃO; SAKAGUTI; PIRES, 2017). Ele se constitui um objeto adimensional, não sendo possível lhe atribuir medida. É representado por um “pingo” ou uma “bolinha”, úteis para representar uma localização espacial. Já o **bloco** é o segmento de reta que une dois pontos. Na Figura 2, encontramos marcados os pontos A, B e C e, na Figura 3, os blocos AB e CD.

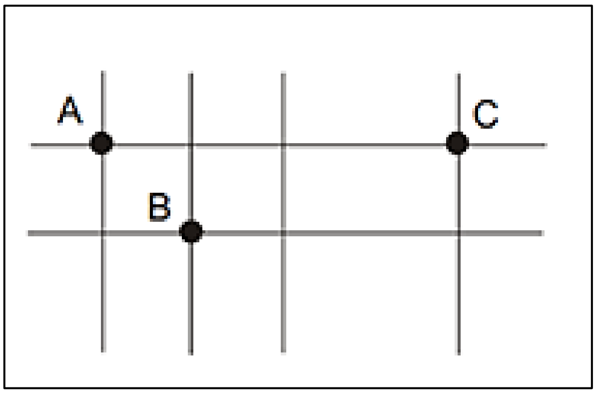

Figura: **2**: Pontos A, B e C
Fonte: Miranda (1999).

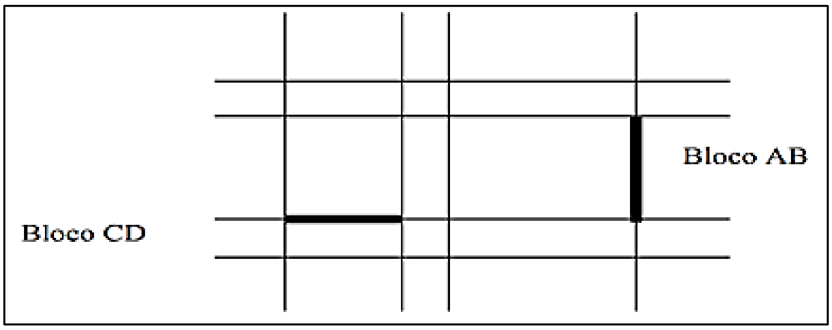

Figura 3: Blocos AB e CD
Fonte: Miranda (1999).

Segundo César (2010), uma **curva fechada** ou **viagem redonda** é definida como um conjunto de blocos, tal que cada bloco do conjunto seja incidente com exatamente dois outros. Em contra partida, uma **viagem** ou **arco de curva fechada** é o trecho de uma viagem redonda entre dois pontos distintos. Na Figura 4, temos um exemplo de viagem redonda, que inicia em **A** e termina no mesmo ponto, bem como podemos representar um arco de curva fechada partindo de **A** até **H**.

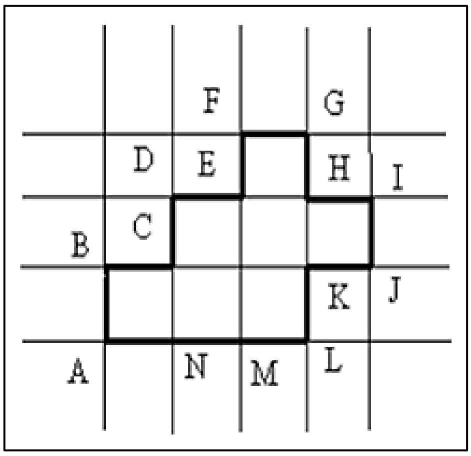

Figura 4: Viagem redonda
Fonte: Miranda (1999).

Assim, $T\ (A, H)$ é uma viagem entre os pontos A e H da malha táxi. Segundo César (2010), $T(A, H)$ representa o conjunto de blocos $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH$ ou $AN, NM, ML, LK, KJ, JI, IH$ dessa viagem. Além disso, "o **comprimento** ou a **norma** de uma viagem é o número inteiro de blocos dessa viagem" (CÉSAR, 2010, p. 36, grifo nosso). Logo, $T(A, H)\ =\ 7$.

A **viagem direta** ou **caminho direto** é o caminho que possui a menor distância entre dois pontos, que é denominada de distância táxi entre os dois pontos. Assim, na Figura 5, onde $T(A, B)\ =\ 5$.

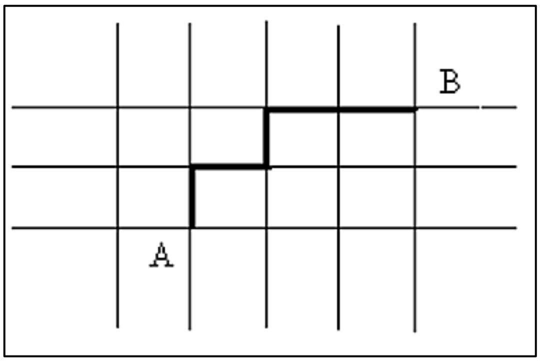

Figura 5: Viagem direta ou caminho direto entre A e B
Fonte: Miranda (1999).

No campo da definição de **reta**, ela é considerada a união de viagens diretas ou caminhos diretos, considerando sempre o menor caminho entre dois pontos dessa viagem (MIRANDA; BARROSO; ABREU, 2005). Segundo César (2010, p. 41), a reta é representada "[...] por duas letras maiúsculas precedidas pela palavra reta, ou por uma letra minúscula. Por um ponto passa infinitas retas". Na Figura 6, encontramos representações para essas afirmações.

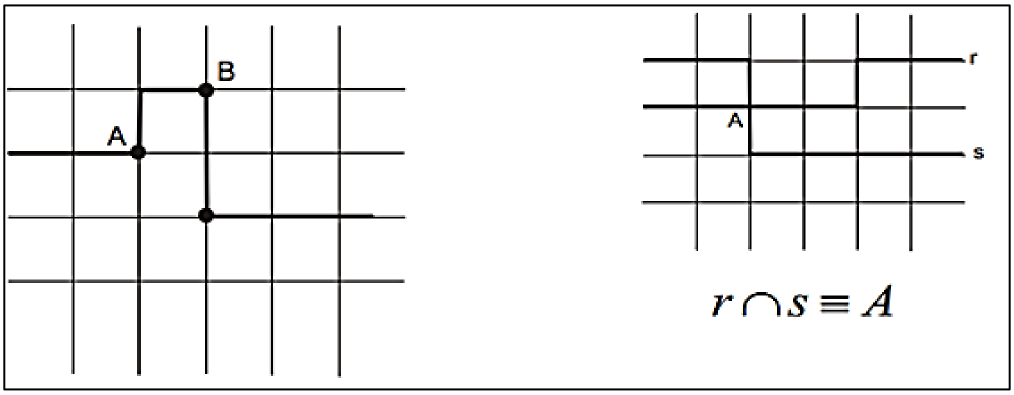

Figura 6: Reta AB e infinitas retas por A
Fonte: César (2010).

Em se tratando de **retas paralelas**, César (2010) afirma que a definição de retas paralelas é a mesma da Geometria Euclidiana, ou seja, retas coplanares e que não se interceptam. Na Figura 7, podemos ver duas retas r e s, paralelas à reta t, mas r e s possuem um ponto em comum. Ainda, segundo a autora, temos a negação do quinto postulado de Euclides, pois construímos, pelo ponto (C) fora da reta (t), duas retas $(r$ e $s)$ paralelas à reta (t).

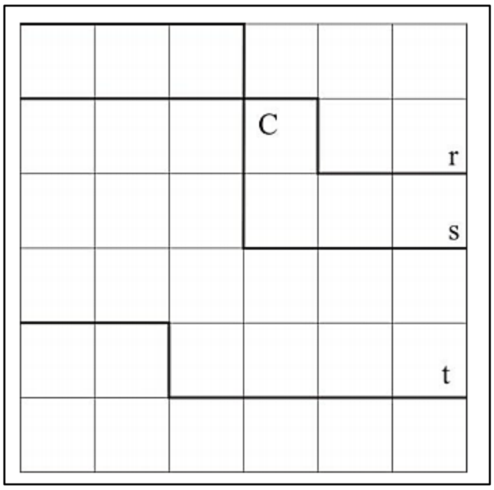

Figura 7: Retas paralelas, não paralelas e quinto postulado de Euclides
Fonte: César (2010).

Após essa abordagem inicial, que tratou de aspectos principais para os estudos da Geometria do Táxi, é possível definir a **métrica táxi**. Segundo Gusmão, Sakaguti e Pires (2017), a métrica euclidiana e táxi assumem a mesma definição: uma métrica num conjunto M é uma função $D: M \: x \: M \; \rightarrow \Re$, conjunto dos reais, que associa cada par ordenado dos elementos $x, y \; \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado de distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas às seguintes condições para quaisquer x, y e $z \; \in M$:

$d(x, x) = 0$ (1)

Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$ (2)

$d(x, y) = d(y, x)$ (3)

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (4)

Como podemos ver nas Figuras 8 e 9, a métrica da Geometria do Táxi não é uma linha reta, mas o menor percurso entre os pontos A e B. Já a métrica da Geometria Euclidiana é uma linha reta, pois ela não leva em consideração os obstáculos entre os pontos, que estariam nos quarteirões.

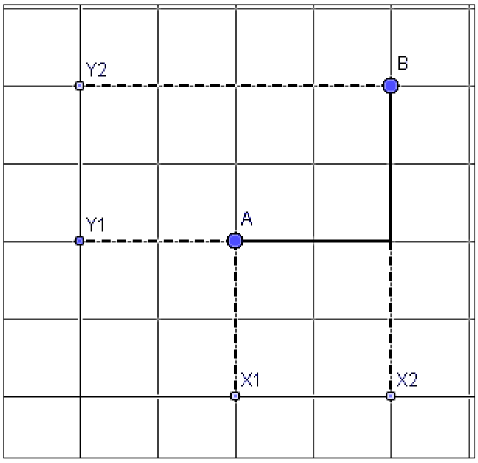

Figura 8: Métrica Táxi
Fonte: Autores (2018).

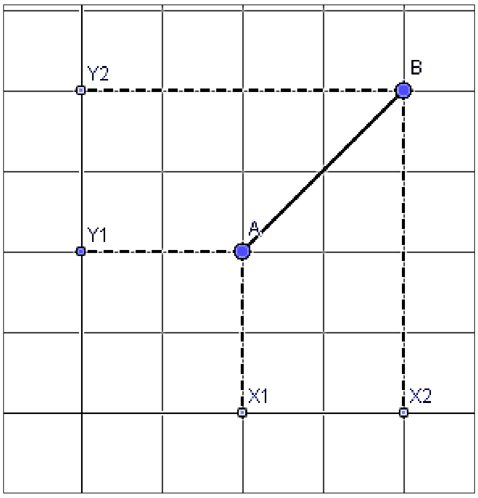

Figura 9: Métrica Euclidiana
Fonte: Autores (2018).

O cálculo da distância na métrica euclidiana provém da fórmula $d_e(A, B) = [\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$, $\forall\, x, y \in \Re$. Tratando-se de cálculo de distância em uma métrica euclidiana ($\Re^2$), tomando $n = 2$, e as coordenadas dos pontos da Figura

9, temos: $d_t(A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$, que pode ser facilmente definida pelo Teorema de Pitágoras. Já na Geometria do Táxi, a fórmula da distância entre dois pontos se dá por $d_t(A,B) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$. Assim, de modo semelhante, temos que $d_t(A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.

Comparamos, também, algumas figuras geométricas na perspectiva das duas Geometrias. Na Geometria Euclidiana, a circunferência é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância (raio) de um ponto fixo (centro). A Geometria Táxi utiliza do mesmo conceito, porém segue a sua métrica. Os raios das circunferências (Figura 10 e 11) são determinados pelas respectivas fórmulas de distância entre dois pontos.

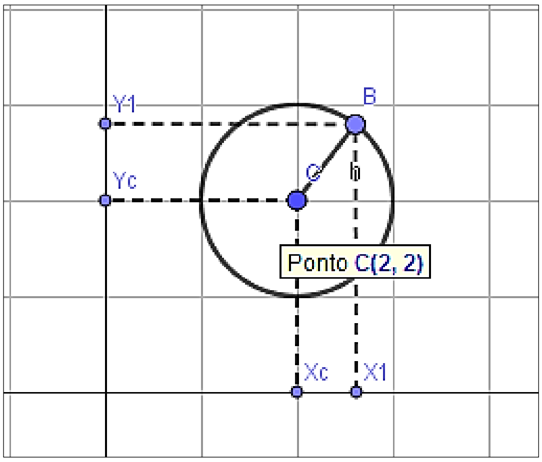

Figura 10: Circunferência Euclidiana
Fonte: Autores (2018).

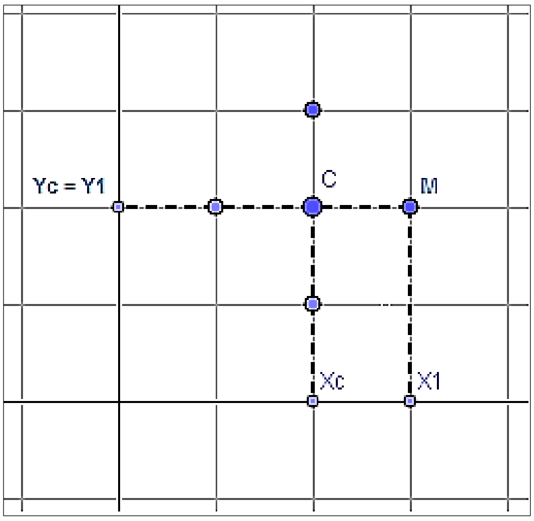

Figura 11: Circunferência Táxi
Fonte: Autores (2018).

Em ambas as geometrias, o cálculo de π é determinado pela razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro $\left[\frac{2\pi r}{d}\right]$. Na Geometria Euclidiana, o valor numérico de π é de, aproximadamente, 3,14, enquanto que na Geometria do Táxi, $\pi = 4$. Além disso, na circunferência táxi, o número de esquinas depende diretamente do tamanho do raio, cuja fórmula para determinar essa quantidade é $4r$.

No campo da tangência entre circunferências, na Geometria Euclidiana duas circunferências se tangenciam em apenas um ponto, enquanto que na Geometria do Táxi, podem ser tangentes em apenas um ponto ou em inúmeros pontos, conforme Figura 12.

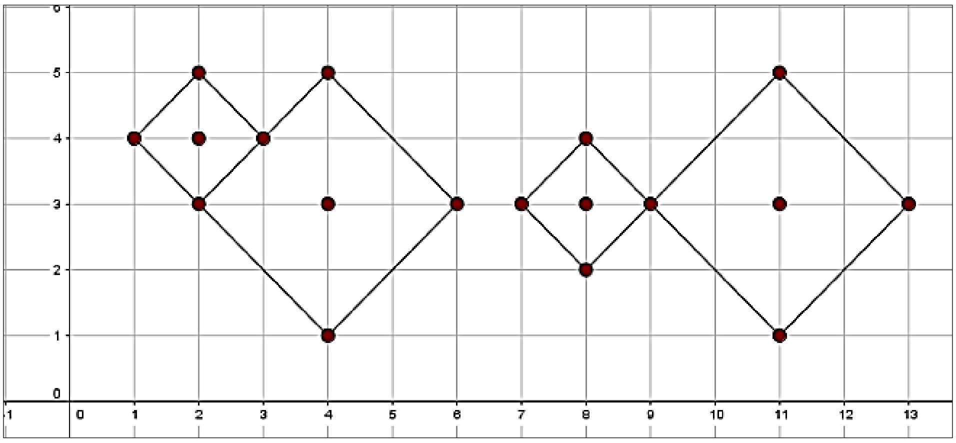

Figura 12: Circunferências tangentes
Fonte: Gusmão, Sakaguti e Pires (2017).

O círculo táxi é considerado o conjunto de todos os pontos da malha, ou seja, as esquinas cuja distância ao centro é menor ou igual à quantidade de quadras. Abaixo, apresentamos um círculo táxi de raio 3, cujo ponto C, em azul, é o centro do círculo.

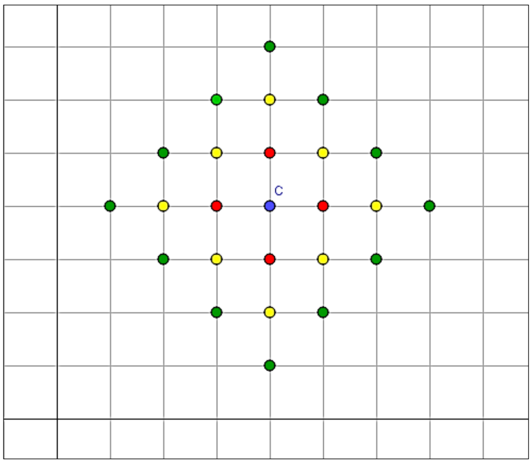

Figura 13: Círculo Táxi
Fonte: Autores (2018).

Na Figura 13, os pontos em vermelho correspondem à circunferência de raio 1; os pontos em amarelo, à circunferência de raio 2; e, por fim, os pontos verdes, aquela de raio 3. Por exemplo, para determinar a quantidade de pontos de um círculo de raio 3, adiciona-se a quantidade de pontos da circunferência de raio 1, mais a quantidade de pontos da circunferência de raio 2 e, por fim, a quantidade de pontos da circunferência de raio 3. No final, adicionamos 1, pois devemos considerar o ponto correspondente ao centro.

Podemos perceber que a ideia acima se refere à soma de uma Progressão Aritmética (PA), que é dada por $s_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$. A partir de cálculo envolvendo Progressão Aritmética (PA) da quantidade de pontos de uma circunferência de raio (1, 2, 3, 4, ..., r), podemos chegar à seguinte PA $(4, 8, 12, 16, 20, \ldots, 4r)$. Considerando a formula da soma de uma PA, temos: $a_1 = 4$, $a_n = 4r$ e $n = r$. Sendo assim: $s_r = \frac{(4+4r).r}{2} + 1$. Adicionamos 1, pois precisamos considerar o ponto do centro da circunferência. Desenvolvendo a fórmula, chegamos a $(r+1)^2 + r^2$. Vale ressaltar que, segundo Gusmão, Sakaguti e Pires (2017), o surgimento da circunferência táxi gerou preocupação entre estudiosos, uma vez que se acreditava ser impossível ou absurda a ideia da existência de **círculos quadrados** ou **quadrados redondos**.

Na Geometria do Táxi, "o triângulo táxi é formado pela união de 3 viagens diretas e essa união é uma viagem redonda" (MIRANDA, 1999, p. 103). Além disso, essa Geometria respeita a classificação dos triângulos da Geometria Euclidiana quanto aos lados. Na Figura 14, apresentamos um exemplo de um triângulo isósceles, um equilátero e um escaleno.

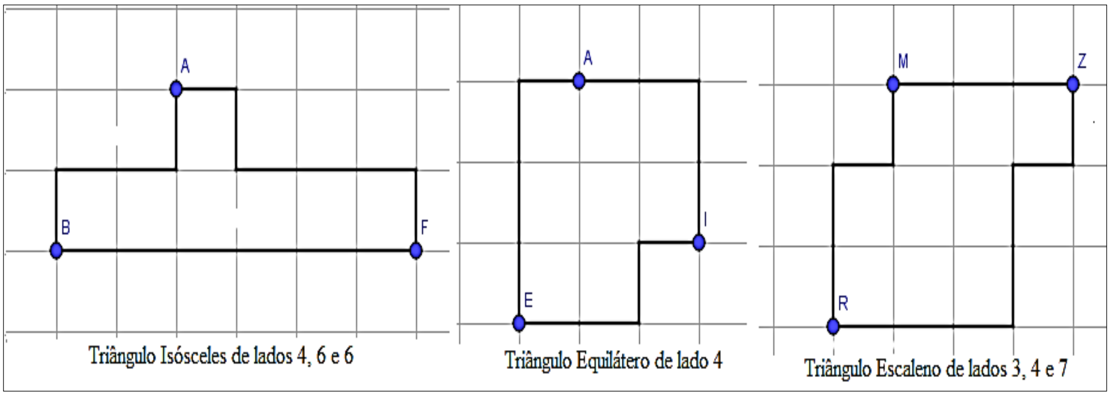

Figura 14: Triângulos Táxi
Fonte: Autores (2018).

É possível perceber que o triângulo equilátero é, portanto, uma figura plana que possui lados de mesma medida (congruentes), mas não lados iguais, pois as viagens diretas são diferentes em representação. O mesmo ocorre com o triângulo isósceles, possuindo dois lados de mesma medida, mas não iguais entre si, em representação.

No campo dos quadriláteros, César (2010, p. 56) afirma que "um quadrilátero é uma viagem redonda, formada pela união de quatro viagens diretas". Além disso, na Geometria do Táxi, "um quadrado é um quadrilátero de lados com a mesma medida" (CÉSAR, 2010, p. 56), mas não iguais em representação. Na Figura 15, podemos conhecer três exemplos de quadrados táxis.

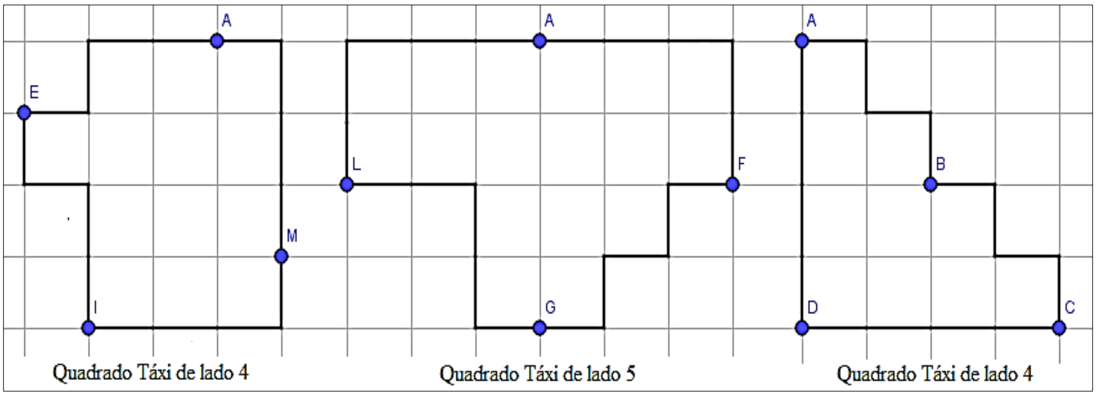

Figura 15: Quadrados Táxi
Fonte: Autores (2018).

Do exposto acima, vemos que os quadrados $AEIM$ e $ABCD$ possuem lados de mesma medida, mas não iguais entre si em representação. Assim, podemos concluir que existem inúmeros quadrados táxis que possuem lados de mesma medida.

Ainda, nos estudos de quadrados táxis, é importante mencionarmos que ora respeitam as propriedades dos quadrados euclidianos, ora não.

Propriedade 1 – "os ângulos formados pelos lados de um quadrado medem $90°$". Essa propriedade não se verifica na Geometria Táxi, pois, conforme o terceiro quadrado (da esquerda para a direita) da Figura 15, o ângulo formado pelos lados AB e BC mede $270°$.

Propriedade 2 – "em todo quadrado, as diagonais são congruentes". Essa propriedade não se verifica na Geometria Táxi, pois, conforme o segundo quadrado (da esquerda para a direita) da Figura 15, a diagonal AG mede 4 e a diagonal FL mede 6,

Propriedade 3 – "em todo quadrado, as diagonais se interceptam em seu ponto médio". Essa propriedade não se verifica na Geometria Táxi, pois, conforme o quadrado da Figura 16, as diagonais EM e IA não se interceptam nos respectivos pontos médios P e Q.

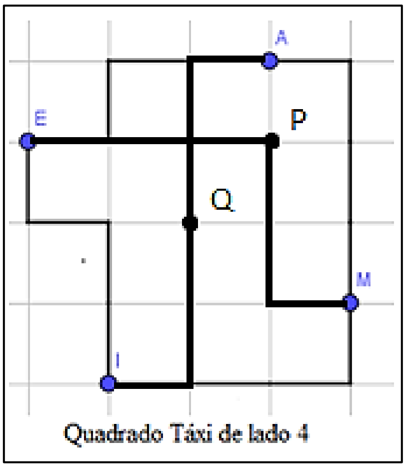

Figura 16: Par de diagonais do quadrado $AEIM$
Fonte: Autores (2018).

Propriedade 4 – "em todo quadrado, as diagonais se cruzam formando ângulos de $90°$". Para que essa propriedade se verifique na Geometria do Táxi, é necessário condicionar as diagonais interceptadas em um ponto. Caso elas se interceptem em um bloco, a propriedade não é válida, pois o ângulo entre as diagonais seria de $0°$. Na Figura 17, vemos que as diagonais AI e ME tem o bloco PQ em comum, logo formam ângulo de $0°$.

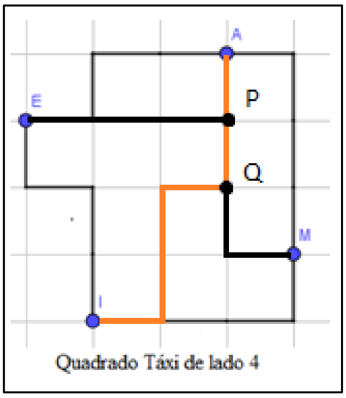

Figura 17: Diagonais do quadrado formando ângulo nulo
Fonte: Autores (2018).

Propriedade 5 – "em todo quadrado, as diagonais são bissetrizes dos ângulos dos vértices". Essa propriedade não se verifica na Geometria Táxi. Na Figura 17, a diagonal IA coincide, parcialmente, com o lado IM, não dividindo o ângulo $\hat{I}$ em dois ângulos congruentes.

Diante dessas explanações, corroboramos com Kallef e Nascimento (2014), quando apontam que os estudos de Geometria Táxi podem levar os estudantes a perceberem a existência de outras Geometrias, despertando a curiosidade em investigar diferentes ambientes matemáticos geométricos e desenvolverem suas capacidades de investigar tópicos matemáticos por uma nova perspectiva. Assim, entendemos que essa abordagem geométrica contribui para a produção de significados em matemática e gera conexões dentro da própria matemática.

3 Formação de Professores que Ensinam Matemática: alguns apontamentos

Há tempos se discute sobre os processos de formação de professores e (re)construção de sua identidade docente. Nesse contexto, a formação de professores como:

> [...] a área de conhecimentos, investigações e de propostas teóricas e práticas que, no âmbito da Didática e da Organização Escolar, estuda **os processos através dos quais os professores – em formação ou em exercício – se implicam individualmente ou em equipe, em experiências de aprendizagem através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições**, e que lhes permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do ensino, do currículo e da escola, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem (MARCELO GARCIA, 1999, p. 26, grifo nosso).

Assim, os processos de formação de professores devem possibilitar o desenvolvimento de conhecimentos que nortearão a prática do professor e, em se tratando da formação inicial, proporcionar aos futuros professores aprendizagens de competências profissionais que permitam tornarem-se professores e se prepararem para seu ofício.

Nesse caminho, Fiorentini (2003) indica que os espaços de formação de professores devem ajudar os futuros professores a questionarem seus conhecimentos prévios, a ampliarem suas noções matemáticas, a desenvolverem conhecimento pedagógico e a gerarem destrezas cognitivas e processos de raciocínio pedagógicos.

Fiorentini (2003) sugere, ainda, que na formação de professores de matemática, por exemplo, as conexões dentro da matemática e com o mundo real sejam temáticas que possibilitem ampliar o conhecimento. Para isso, é preciso que o futuro professor tenha experiências de cunho científico e prático, que oportunizem a reflexão, o raciocínio, a busca de conexões dentro e fora da matemática e que o possibilitem relacionar os conhecimentos matemáticos com situações concretas.

No olhar de Fiorentini (2003, p. 105),

> [...] a consciência metacognitiva permite, ao licenciando, pensar sobre seu conhecimento dos conteúdos matemáticos visando ao ensino deles, isto é, seu

> conhecimento sobre a aprendizagem matemática das noções matemáticas e seu conhecimento sobre o ensino de matemática.

Esse pensamento aponta o desejo de o processo metacognitivo ser valorizado na formação de professores, pois contribui na (re)construção de suas crenças pedagógicas e do próprio conhecimento matemático. Assim, essas reflexões nos fazem pensar no professor em constante processo de formação e reflexão da sua prática, mesmo porque vivemos em um mundo informatizado, cujos avanços tecnológicos transformam as sociedades, ampliando as formas de comunicação e produção de conhecimentos.

Nesse campo de envolvimento com um mundo em evolução, onde novas tecnologia tem possibilitado novos modos de pensar e agir, corroboramos com as ideias de Fiorentini (2003), ao pontuar o uso das tecnologias numa perspectiva de oportunizar o ensino da matemática de maneira inovadora, bem como para a exploração e investigação na construção das noções matemáticas. Assim, denota que as novas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) constituem espaços de formação e que “os professores precisam saber como usar os novos equipamentos e software e também qual é o seu potencial [...]” (FIORENTINI, 2003, p. 163), ou seja, os futuros professores necessitam aprendê-las com confiança.

Portanto, é preciso oportunizar aos atuais e futuro professores, a variedade de experiências, pois a construção do “eu profissional” e o aprender a ensinar está relacionada às crenças e experiências que trazem de sua trajetória profissional (MARCELO GARCIA, 2009).

4 Desenho Metodológico

Em busca de identificarmos as contribuições que a oficina **Geometria do Táxi: teoria e prática** trouxe para a formação dos participantes, decidimos pela realização de uma pesquisa qualitativa, pois “a interpretação dos fenômenos e atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa [...]. O ambiente natural é fonte direta para coleta dos dados” (KAUARK; MANHÃES; MEDEIROS, 2010, p. 26). Além disso, utilizamos um questionário, considerado um instrumento de produção de dados de pesquisas qualitativas, com duas perguntas abertas, a saber: 1) quais as contribuições que a oficina trouxe para sua formação, tanto no campo prático quanto teórico? e 2) Após participar da oficina, você considera pertinente trabalhar com a Geometria do Táxi, nas aulas de Geometria, na Educação Básica? Por quê?

O tempo de duração da oficina foi de três horas e contou com a participação de oito licenciandos, identificados pelas letras de A à H. Estes receberam, individualmente, um lápis, uma borracha, um compasso e um exemplar do material impresso, que continha seis atividades propostas para discussão. No decorrer da oficina, debateram teorias (históricos e didáticos) a respeito da Geometria do Táxi, bem como a realização de atividades de investigação entre a Geometria Euclidiana e Geometria do Táxi.

Na primeira atividade, buscamos diferenciar a métrica das duas geometrias, propondo que os participantes determinassem o menor percurso (a menor distância) entre a casa de Ricardo e a lanchonete.

Na segunda atividade, propomos a construção de uma circunferência euclidiana e uma táxi, um momento de investigação sobre o valor de π em ambas as Geometrias e a apresentação de uma expressão geral do número de pontos de uma circunferência táxi, em função do seu raio.

Na terceira atividade, solicitamos aos participantes que construíssem duas circunferências tangentes, tanto euclidianas quanto táxi. Essa atividade proporcionou reflexões sobre tangência e como ela se comporta em ambas as geometrias.

Na quarta atividade, orientamos que fosse construído um círculo euclidiano e um táxi e que determinassem uma expressão matemática que possibilitasse calcular o número de esquinas (pontos de um círculo táxi), percorrendo uma distância menor ou igual ao raio do círculo táxi.

Na quinta atividade, pedimos que fossem construídos triângulos (escalenos, equiláteros e isósceles) na Geometria Táxi, seguindo a mesma definição de triângulos euclidianos quanto aos lados. Nessa proposta, propusemos o debate sobre a diferença entre "ser de mesma medida" e "ser igual". Enquanto a primeira está no campo numérico, a segunda está relacionada à representação.

Para encerrar as atividades práticas, na sexta atividade, convidamos os participantes a construírem dois quadrados táxi e a verificarem se as propriedades dos quadrados euclidianos são válidas na Geometria do Táxi.

Para fechar as discussões sobre a temática e maximizar as reflexões sobre a presença de novas Tecnologias Digitais nas aulas de Matemática, apresentamos as potencialidades do Recurso Educacional Multimídia "Geometria do Táxi: formas geométricas”[9] , com o objetivo de utilizar o sistema de coordenadas cartesianas no plano e a noção de distância do táxi para explorar as formas geométricas de circunferência e círculo na geometria do táxi. É uma ferramente que pode potencializar os estudos da temática nas aulas de matemática.

5 Análise de dados: o que encontramos nas respostas dos participantes?

Nesta seção, apresentamos as análises relativas aos dois questionamentos realizados aos participantes da pesquisa. Nosso intuito foi o de identificar contribuições oriundas da participação na oficina, no que tange às descobertas, aprendizagens e prática docente. Assim, discorremos estas análises em dois subtítulos, conforme cada questionamento, para melhor organização.

5.1 Quais as contribuições que a oficina trouxe para sua formação, tanto no campo prático quanto teórico?

O objetivo deste primeiro questionamento foi identificar as contribuições que a oficina trouxe para a formação dos participantes, seja no campo prático (prática educativa em sala de aula) quanto no campo teórico. Segundo o participante B,

> B: a oficina me possibilitou conhecer a Geometria do Táxi, algo que até então não tinha conhecimento. Tanto no campo prático e teórico despertei certo interesse, [e] espero ter a oportunidade de trabalhar com a Geometria do Táxi com meus alunos.

Como podemos perceber, o relato do participante B indica que a oficina se constituiu do primeiro espaço no qual teve proximidade com a Geometria do Táxi, despertando interesse, inclusive, em trabalhá-la na Educação Básica. Não muito diferente foi para o participante D, quando pontuou que a oficina trouxe “a adição de um novo conhecimento científico”. Nesse sentido, Fiorentini (2003) ressalta a importância de os espaços de formação possibilitarem ampliar as noções matemáticas dos estudantes, contribuindo para a sua formação. Além disso, nessa mesma vertente de ampliação das noções matemáticas, segundo o participante C, “aprendi novos conceitos. Foi criativo desenvolver as atividades e considero importante que práticas como essa

[9] O material digital se encontra disponível no endereço https://m3.ime.unicamp.br, da Unicamp, que é um site da coleção Matemática Multimídia, um conjunto com mais de 300 recursos educacionais de Matemática para o Ensino Médio.

continuem sendo desenvolvidas”. Percebemos que as atividades desenvolvidas geraram motivação em aprender Geometria do Táxi e que esses modelos de atividades devem continuar a fazer parte das práticas escolares.

Sobre os processos metacognitivos na formação de professores, Fiorentini (2003) aponta ser importante oportunizar experiências de formação, nas quais os estudantes reflitam sobre seu conhecimento e sobre o ensino de matemática. Dessa forma, o participante A pontuou que a oficina “[...] fez enxergar a geometria de uma maneira diferente. Além de divertido, ela trouxe a geometria de forma mais realista e assimila[da] ao dia-a-dia”. Dessa fala, entendemos que a oficina produziu reflexões sobre geometria, mostrando uma nova face de estudo e oportunizando ver sua ligação com situações cotidianas. Do mesmo modo, segundo o participante H, a oficina possibilitou “[...] observar melhor e principalmente entender mais sobre a geometria. Enxergar além e não ficar preso a uma coisa só. Foi possível ter uma visão bastante ampla”. Portanto, esses posicionamentos evidenciam que a oficina possibulitou aprendizagens, gerando processos metacognitivos, importantes na formação de professores.

No decorrer da oficina, as atividades objetivavam refletir sobre a importância de a Geometria do Táxi ser trabalhada em sala de aula. Nessa ótica, o participante F denotou que “[...] a oficina foi trabalhada de modo interessante, possibilitando-o a compreender os estudos dessa geometria e apresentou modelos de como ela poderia ser aplicada em sala de aula”. Assim, entendemos a necessidade de oportunizar experiências variadas aos docentes, pois a construção do “eu profissional”, o aprender a ensinar, está relacionada às crenças e às experiências (Marcelo Garcia, 2009), sendo preciso que o futuro professor vivencie experiências de cunho científico e prático, que oportunizem a reflexão, o raciocínio e a busca de conexões dentro e fora da matemática (FIORENTINI, 2003).

Para Fiorentini (2003), a reflexão sobre os próprios conhecimentos, na formação de estudantes para professor, contribui na construção do seu desenvolvimento profissional. Nesse sentido, os participantes E e G pontuaram que a oficina possibilitou, por meios dos estudos de Geometria do Táxi, rever alguns conceitos em Geometria Plana, que já tinham estudado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática. No entanto, segundo o participante G, o mesmo:

> G: já havia visto um pouco sobre o conteúdo em uma matéria da faculdade, só que eu não aprendi tanto quanto hoje. Percebe-se pelo fato que eu não lembrava nada. Me fez relembrar e reaprender sobre a geometria não-euclidiana.

Do exposto acima, percebemos que o Curso Superior de Licenciatura em Matemática, frequentado pelo participante G, contemplou na formação, os estudos de Geometria Não-Euclidiana, reafirmando o compromisso com a formação ampla e aprofundada no campo da matemática. Contudo, segundo o participante, a oficina trouxe conhecimentos a mais do que foi trabalhado no Curso, ao afirmar não ter aprendido tanto quanto aprendeu na oficina. Nesse mesmo viés, com relação às novas (re)aprendizagens, o participante E afirmou que a oficina.

> E: foi importante, pois com ela adquirimos mais aprendizagens sobre coisas novas, como o conhecimento da geometria do táxi e também podemos relembrar alguns conteúdos que vimos no curso de licenciatura [...].

O posicionamento dos participantes E e G, evidenciou que as discussões possibilitaram conexões entre as duas geometrias, quando o estudo da Geometria do Táxi oportunizou revisitar/lembrar/reaprender conceitos de geometria estudados. Esse tipo de atividade vai ao encontro de Fiorentini (2003), onde a formação de professores fomenta as conexões dentro da matemática e com a realidade por meios de temáticas, ampliando o conhecimento dos futuros professores. Vale recordar que o participante A apontou as atividades da oficina como capazes de envolver "o mundo real", ao afirmar que a Geometria do Táxi foi trabalhada mais realisticamente com o dia a dia.

Com isso, entendemos que a oficina trouxe contribuições para a formação dos participantes, uma vez que denotaram novas aprendizagens (e por que não, descobertas!) teóricas e práticas e fomentou reflexões sobre noções matemáticas no campo da geometria.

5.2 Após participar da oficina, você considera pertinente trabalhar com a Geometria do Táxi nas aulas de geometria, na Educação Básica? Por quê?

Gostaríamos de reafirmar que a Geometria Táxi é considerada importante nos estudos de geometria e nas práticas de sala de aula (KALLEF; NASCIMENTO, 2004; GUSMÃO; SAKAGUTI; PIRES, 2017). Partindo desse pressuposto, as discussões desse questionamento buscam evidenciar a oficina, a partir de suas atividades e debates, despertando interesse dos participantes em trabalhar com a Geometria do Táxi nas aulas de matemática, na Educação Básica. Assim, o participante B declarou que trabalharia com a temática, pois "o aluno poderá ter outra visão sobre a Geometria. É possível desenvolver nos alunos certa criatividade e acredito que se ensinada como foi na oficina, a aula será muito produtiva”. Além disso, segundo o participante C, trabalharia com a Geometria do Táxi.

> C: pois é uma forma de contextualizar. O estudante pode sentir-se atraído para desenvolver atividades de Geometria do Táxi, uma vez que é algo que se relaciona com a vida real do educando. Ele pode passar a refletir mais a respeito da conexão da matemática e seu cotidiano.

Diante desses posicionamentos, percebemos que os dois participantes encontraram, na Geometria do Táxi, a possibilidade de gerar novas reflexões em relação aos estudos de geometria, bem como, acreditam que esse tipo de trabalho possa motivar e reafirmar o compromisso de ensino de matemática com conexões entre a cienficidade e a utilidade. Esse pensamento dialoga com o de Kallef e Nascimento (2004), ao apontarem que a Geometria do Táxi vai ao encontro das necessidades requeridas para as mudanças no ensino da matemática, por contribuir para o ensino significativo, como resultado de trabalhar com situações cotidianas (ambientes) dos estudantes.

Os estudos de Geometria do Táxi, além de tornar o ensino mais prazeroso e motivador, aborda um novo conceito de geometria, contribuindo para responder ao velho questionamento dos estudantes sobre a aplicabilidade da matemática (GUSMÃO; SAKAGUTI; PIRES, 2017). Assim, o participante G afirmou seu compromisso em trabalhar com a temática, na Educação Básica, e salientou:

> G: se for feito desta forma e com dinâmica parecida, os alunos crescem aprendendo [não] apenas uma geometria. Introduzindo essa geometria eles podem perceber [que existem] geometrias não-euclidianas. Também responde dúvidas dos alunos pertinentes a distância entre dois pontos.

Conforme expresso na fala do participante G, a Geometria do Táxi deve ser trabalhada para os estudantes conhecerem outras geometrias, sendo destacado por Kallef e Nascimento (2004), que os estudos de Geometria Táxi podem levar os estudantes a perceberem a existência de outras geometrias, possibilitando despertar a curiosidade para novos ambientes matemáticos e desenvolver a capacidade de investigar tópicos matemáticos por uma nova perspectiva. Ademais, seu estudo pode contribuir na discussão de algumas noções matemáticas, por exemplo, distância entre pontos, uma vez que ela coloca em dúvida a linearidade da distância entre pontos da Geometria

Euclidiana. Assim, “através dela o estudante poderá ampliar o conhecimento de geometria e o modo que se interliga com o nosso dia a ia” (Participante H). O participante H complementa esse posicionamento, ao encontrar nessa geometria, a possibilidade de novas aprendizagens. Interligar a geometria com o cotidiano é um caminho sustentada por Kallef e Nascimento (2004, p. 13), os quais encontram na Geometria do Táxi, “[...] a intenção de se integrar a matemática ao cotidiano do aluno, pois esta se apresenta em todos os lugares [...]”, permitindo fazer conexões com o mundo em que os estudantes vivem, contextualizando a geometria estudada.

Nos apontamentos teóricos da Geometria do Táxi, por exemplo, vemos que os quadrados táxi não respeitam as propriedades dos quadrados euclidianos e, portanto, existem outros quadrados para além dos euclidianos. Buscar por essas reflexões se torna fundamental na promoção da capacidade crítica dos nossos estudantes. Assim, o participante E trabalharia com a Geometria do Táxi, pois “[...] é uma visão totalmente diferente do que vimos. Regras diferentes e que podem ser ofertadas como matéria na Educação Básica [...]”. Sendo assim, Gusmão, Sakaguti e Pires (2017, p. 223) apontam que “ao introduzir o estudo da geometria do táxi na sala de aula, os alunos têm, por meio dele, a oportunidade e a capacidade de investigar tópicos da matemática tradicional por uma nova perspectiva [...]”.

Mesmo com tantas evidências de que a Geometria do Táxi deve fazer parte dos estudos da matemática, o participante A, afirmou insegurança para trabalhá-la, pois acredita ser necessários ampliar conhecimentos sobre a temática. Contudo, o mesmo, ao responder o primeiro questionamento, apontou que a oficina o “[...] fez enxergar a geometria de uma maneira diferente. Além de divertido, ela trouxe a geometria de forma mais realista e assimila[da] o dia a dia”. Assim, mesmo diante da insegurança, acreditamos que a oficina lhe possibilitou conhecer uma nova geometria, o que poderá lhe despertar o interesse em continuar estudando sobre a temática e alcançar a segurança necessária para discuti-la com os seus estudantes da Educação Básica. Não diferente, aconteceu com o participante D, pois, segundo ele,

> D: no momento não vejo um encaixe adequado para o conteúdo, mas de maneira nenhuma iria descartar essa possibilidade, pelo fato de agregar um conteúdo de uma forma prática e suave.

Portanto, acreditamos que a oficina contribuiu para que os participantes desejassem discutir a Geometria do Táxi, na Educação Básica, ao mesmo tempo em que “plantou” uma pequena semente pela busca de novos conhecimentos e aprofundamentos, que gerará novas descobertas, aprendizagens e prática docentes em Geometria do Táxi.

6 Considerações Finais

Os resultados deste estudo mostram a oficina **Geometria do Táxi: teoria e prática** como espaço de reflexão sobre aspectos teóricos e práticos do ensino da Geometria do Táxi na Educação Básica, fomentando o desejo dos participantes buscarem novos conhecimentos sobre a temática. As contribuições dessa dinâmica possibilitaram conhecer uma nova geometria e compreender a sua importância no estudo da Geometria Euclidiana, como forma de promover reflexões sobre conceitos e demonstrar a aplicabilidade da geometria no cotidiano dos alunos.

Ressalta-se a postura dos participantes da oficina em relação a receptividade das atividades desenvolvidas, interagindo ativamente nos debates. No decorrer das tarefas, constatamos a sua realização facilitada, visto que as discussões teóricas foram consistentes e contribuíram para a sua execução. Entendemos que o quantitativo de atividades, considerando a proposta da oficina e o tempo disponibilizado pelo evento, foi suficiente na produção de conhecimentos sobre a temática, na medida que a própria análise dos dados sinalizou o interesse dos participantes em novas descobertas e sua inserção no ensino de matemática, na Educação Básica.

Acreditamos que espaços de promoção e produção de conhecimentos teóricos e práticos, na formação de estudantes para professor de matemática, como é o caso das oficinas, devem fomentar a descoberta e o estudo de Geometrias Não-Euclidianas, pois as mesmas trazem potencialidades pedagógicas para melhor compreender a própria Geometria Euclidiana.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 13 nov. 2019.

MIRANDA, D. F.; BARROSO, L. C.; ABREU, J. F. Geometria Táxi: uma geometria não-euclidiana descomplicada. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO (EEMOP), 3, 2005. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto. **Caderno de Resumos**. Ouro Preto: UFOP, 2005.

CÉSAR, S. M. C. **Geometria táxi:** uma exploração através de atividades didáticas. 2010. 96 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

FIORENTINI, D. **Formação de professores de matemática:** explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

FUZZO, R. A.; REZENDE, V.; SANTOS, T. S. dos. Geometria do Táxi: a menor distância entre dois pontos nem sempre é como pensamos. In: ENCONTRO DE PRODUÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA (EPCT), 5, 2010. Campo Mourão. **Anais do V Encontro de Produção Científica e Tecnológica**. Campo Mourão: FECILCAM/NUPEM, 2010.

GUSMÃO, N. L.; SAKAGUTI, F. Y.; PIRES, L. A. A geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 2, p. 211-235. 2017.

KAUARK, F. da S.; MANHÃES, F. C.; MEDEIROS, C. H. **Metodologia da pesquisa:** guia prático. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. do. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, n. 44, p. 11-42. 2004.

KRAUSE, E. F. Taxicab geometry. **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 66, n. 8, p. 695-706, 1973.

LEIVAS, J. C. P.; SOUZA, H. M. de. Geometria do Taxi: uma investigação com alunos do ensino médio no Brasil. In: CONFERÊNCIAS INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CIAEM), 14, 2015, Chiapas. **Anais da Conferências Interamericana de Educação Matemática**. Chiapas, 2015.

MARCELO GARCÍA, C. Desenvolvimento Profissional Docente: passado e futuro. **Revista de Ciência da Educação**, Espanha, n. 8, p. 7-22. 2009.

MARCELO GARCÍA, C. **Formação de Professores:** para uma mudança educativa. 1. ed. Porto - PT: Porto Editora, 1999.

MIRANDA, D. F. de. **Geometria Táxi, uma métrica para os espaços geográficos e urbanos uma análise exploratória**. 1999. Dissertação (Mestrado em Tratamento da Informação Espacial) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1999.

RIBEIRO, C. Metacognição: Um Apoio ao Processo de Aprendizagem. **Psicologia: Reflexão e Crítica**. Rio Grande do Sul, Porto Alegre, v. 16. n. 1, p. 109-116. 2003.

WANDERLEY, A. J. M; CARNEIRO, J. P. Q.; WAGNER, E. Como melhorar a vida deum casal usando uma geometria não-euclidiana. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 50, p. 23-30. 2002.

Recebido em: 31 de outubro de 2021

Aceito em: 12 de julho de 2022