Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

METASSÍNTESE DE PESQUISAS APOIADAS NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

METASYNTHESIS OF RESEARCH SUPPORTED ON THE THEORY OF SEMIOTIC REPRESENTATION RECORDS

Saddo Ag Almouloud[1]

Méricles Thadeu Moretti[2]

Resumo: Este artigo de cunho teórico-bibliográfico, tem por objetivo fazer uma metassíntese de oito trabalhos de conclusão de doutorado (sete) e mestrado (um) desenvolvidas na UFSC e na PUC-SP cujo referencial teórico principal é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. As obras escolhidas discutem questionamentos investigativos sobre os processos de ensino e de aprendizagem de alguns objetos matemáticos (geometria, superfícies quádricas, noção de infinitésimo no esboço de curvas, números inteiros relativos, sistema de numeração, resolução de inequações) e um estudo comparativo entre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a semiótica peirceana. Os resultados oriundos das pesquisas revisitadas revelam os desafios relacionados à escolha de situações que fossem pertinentes à formação dos sujeitos das pesquisas e ao ensino/aprendizagem dos objetos matemáticos escolhidos. Os constructos teóricos pesquisados permitiram aos autores escolher os elementos necessários para modelar os conteúdos matemáticos em jogo nas diferentes pesquisas. Os procedimentos metodológicos empreendidos no desenvolvimento das pesquisas e as triangulações realizadas entre os constructos da Teoria dos Registros de Representação semiótica, entre esta e outras referenciais teóricos, nos parecem ser contribuições importantes para a área, pois permitiram propor métodos de formação e análises dos achados que levaram a produzir novos conhecimentos para a área.

Palavras-chave: Registro de representação semiótica; Semiótica peirceana; Desconstrução dimensional de figuras; Funções discursivas e não discursivas.

Abstract: This theoretical-bibliographic article aims to make a meta-synthesis of eight doctoral (seven) and masters (one) concluding papers developed at UFSC and PUC-SP, whose main theoretical framework is the Theory of Semiotic Representation. The chosen works discuss investigative questions about the teaching and learning processes of some mathematical objects (geometry, quadratic surfaces, notion of infinitesimal in the outline of curves, relative integers, numbering system, resolution of inequalities) and a comparative study between Theory of Registers of Semiotic Representation and Peircean semiotics. The results from the revisited research reveal the challenges related to the choice of situations that were relevant to the training of research subjects and the teaching/learning of the chosen mathematical objects. The chosen theoretical constructs allowed the authors to choose the necessary elements to model the mathematical contents at play in the different research. The methodological procedure undertaken in the development of research and the triangulations carried out between the constructs of the Theory of Semiotic Representation Records, between this and other theoretical references, seem to be important contributions to the area, as they allowed to propose training methods and analysis of the findings that led to the production of new knowledge for the area.

Keywords: Registration of semiotic representation; Peircean semiotics; Dimensional deconstruction of figures; Discursive and non-discursive functions.

[1] Doutor em Matemática e Aplicações pela Universidade de Rennes I, Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. saddoag@gmail.com
[2] Doutor em Educação Matemática - Universidade de Estrasburgo, Universidade Federal de Santa Catarina (PPGECT/UFSC), Florianopolis, Santa Catarina, Brasil. mthmoretti@gmail.com

ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

1. Introdução

Neste artigo realizamos uma metassíntese qualitativa de sete teses de doutorado e uma dissertação de mestrado cujo referencial teórico principal é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (1995). A metassíntese qualitativa é realizada por meio de poucos estudos, a seleção das pesquisas segue critério pessoal do pesquisador e utiliza interpretações das investigações (ALENCAR; ALMOULOUD, 2017).

As investigações, cuja metassíntese é realizada neste artigo, têm como referencial teórico principal a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (doravante TRRS) de Duval (1995). As obras escolhidas vislumbram questionamentos sobre os processos de ensino e de aprendizagem de alguns objetos matemáticos (geometria, superfícies quádricas, noção de infinitésimo no esboço de curvas, números inteiros relativos, sistema de numeração, resolução de inequações) e um estudo comparativo entre a TRRS e a Semiótica peirceana.

A síntese das pesquisas que apresentamos mais adiante mostra as diferentes utilizações da TRRS aliadas a outros aportes teóricos. Essas pesquisas são voltadas para o estudo de problemas didáticos relacionados ao ensino e aprendizagem de conceitos e reflexões teóricas sobre a articulação entre a TRRS e a semiótica de Peirce.

As obras analisadas são trabalhos de conclusão de doutorado (sete) e mestrado (uma) que foram dirigidas pelos autores deste artigo, destacando os problemas e os objetivos de cada pesquisa, os referenciais teóricos e metodológicos que sustentam essas pesquisas, e as articulações feitas entre a TRRS e outras perspectivas teóricas na análise dos achados. Revisitamos também os resultados alcançados pelas pesquisas escolhidas para evidenciar sua relevância para a área de Educação Matemática. Para este estudo, escolhemos os trabalhos listadas no Quadro 1.

Estas sete teses e dissertação foram escolhidas por representarem as perspectivas teórico-metodológicas apoiadas na TRRS que norteiam as pesquisas que os autores realizaram ou estão realizando. Tecemos, de forma sintética, algumas reflexões sobre a TRRS que fundamentam as pesquisas apresentadas neste artigo.

Com a frase “Não existe noeses sem semiose, é a semiose que determina as condições de possibilidade e de exercício da noeses” em Duval (1995, p. 4) é dado tom

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

do conteúdo do seu livro que lança as bases de sua obra sobre aprendizagem intelectual, mais particularmente, sobre aprendizagem matemática. O acesso aos objetos de ensino matemático só pode ser conseguido por meio de representações e é a partir delas que a aprendizagem matemática pode ocorrer.

Título das teses e da dissertação	Autor (a)	Ano de defesa	Universidade
O que se revela quando o olhar não alcança? Em busca do acesso semiocognitiva aos objetos do saber matemático por uma estudante cega	Daiana Zanelato dos Anjos	2019	UFSC
Desconstrução dimensional das formas: gesto intelectual necessário à aprendizagem de geometria	Roberta Nara Sodré de Souza	2018	UFSC
Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas no ensino superior: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do Geogebra	Sérgio Florentino da Silva	2018	UFSC
A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais	Barbara Cristina Pasa	2017	UFSC
Os números inteiros relativos em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais	Selma Felisbino Hillesheim	2013	UFSC
Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração	Célia Finck Brandt	2005	UFSC
O uso de vários registros na resolução de inequações: Uma abordagem funcional gráfica	Vera Helena Giusti de Souza	2007	PUC-SP
Os signos peirceanos e os registros de representação semiótica: qual semiótica para a matemática e seu ensino?	Cintia Rosa Da Silva	2013	PUC-SP

Quadro 1 - Lista das pesquisas analisadas.
Fonte: Autores (2021).

A relação entre semiose e noesis concerne apenas as representações que Duval denomina de registro (ou sistema semiótico) que permitem três atividades de representação: inicialmente, constituir um traço ou um apanhado de traços que seja identificado como *uma representação de qualquer coisa* em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações pelas regras próprias do sistema de modo a obter outras representações que podem constituir um aporte de conhecimento em relação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema, em representações de um outro sistema, de tal modo que essas últimas possibilitem explicitar outros significados relativos ao que é representado (DUVAL, 1995, p. 21).

Duval (1995, p. 69) alerta ainda para o fato de que será necessário dispor de diversas representações semioticamente heterogêneas e coordená-las para evitar que se confunda um objeto com a sua representação e apresenta um esquema que mostra como construir processos de aprendizagem em matemática:

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

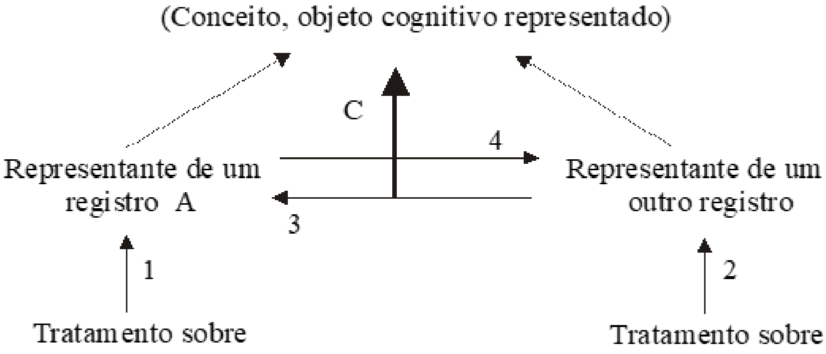


Figura 1- Hipótese fundamental de aprendizagem.
Fonte: Duval (1995, p. 67).

A seta C corresponde ao que Duval (1995, p. 67) chama de “compreensão integrativa de uma representação que pressupõe a coordenação de dois registros”. Na Figura 1 há duas operações cognitivas fundamentais na ideia de aprendizagem matemática de Duval (1995): o tratamento que é interno ao registro e a conversão que envolve dois registros. Na transformação de representações pode surgir um fenômeno chamado por Duval (1995) de não congruência semântica que mede o grau de transparência entre as representações transformadas e isso é ainda mais evidente na transformação de representações por conversão.

Duval (1995) considera a língua natural como sendo um registro muito importante para a aprendizagem matemática e dele extrai dois grupos de funções chamadas de funções metadiscursivas (comunicação, tratamento e objetivação) e funções discursivas (função referencial - designar objetos; função apofântica - dizer alguma coisa dos objetos sob a forma de uma proposição; função de expansão discursiva - religar uma proposição a outras e; função de reflexividade - marcar o valor, o modo ou estatuto acordado a uma expressão por aquele que a enuncia.

No ensino de geometria entram em jogo três grupos de operações semiocognitivas: quatro apreensões (preceptiva, discursiva, operatória e sequencial); quatro tipos de olhares (botanista, agrimensor, construtor e inventor) e mudanças de dimensão (DUVAL (1995, 2005, 2012b), SOUZA (2018), SOUZA, MORETTI, ALMOULOUD (2019), MORETTI, BRANDT (2005).

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

2. Metassíntese das pesquisas escolhidas

Nesta parte, apresentamos os oito trabalhos de conclusão de mestrado e doutorado escolhidos, apontando os focos de investigação, os aportes dos referenciais teóricos utilizados e das metodologias empregadas, e os principais resultados de cada pesquisa. No final do artigo, tecemos reflexões sobre os diferentes enfoques e as perspectivas de investigação do ponto de vista teórico-metodológico, assim como das contribuições dessas pesquisas para a área de Educação Matemática.

Na primeira parte desta metassíntese, discutimos as pesquisas (6) que foram realizadas sob a direção de Méricles Thadeu Moretti (UFSC), e na segunda parte, as duas pesquisas realizadas sob orientação de Saddo Ag Almouloud (PUC-SP, na época).

Parte I

2.1 O que se revela quando o olhar não alcança? Em busca do acesso semiocognitiva aos objetos do saber matemático por uma estudante cega (Daiana Zanelato dos Anjos, 2019)

Esta pesquisa de cunho qualitativo exploratório visou responder à seguinte pergunta: como se dão os acessos semiocognitivos ao objeto do saber em matemática por uma estudante cega? Mais especificamente, visa analisar, por meio de reflexões analíticas, princípios concernentes aos acessos ao objeto do saber em matemática por uma estudante cega à luz de uma análise semiocognitiva fundamentada na TRRS e a Teoria da Relação com o Saber de Bernard Charlot.

Para alcançar este objetivo, a autora definiu as seguintes micrometas:

(1) Levantar dificuldades encontradas por uma estudante cega durante a sua passagem pelo Ensino Médio; (2) Analisar o ensino de matemática para estudantes cegos no que tange a diversidade e coordenação de registros de representação semiótica percebidas no Livro Didático em Braille; (3) Apontar as diferenças semiocognitivas encontradas entre o Livro Didático de matemática em Braille e em tinta; (4) Investigar a Relação com o Saber que a estudante cega estabelece com elementos sócio didáticos relacionados à aprendizagem em matemática; (5) Apontar perspectivas para a formação

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
de professores no que cerca o ensino de matemática a partir dos resultados obtidos na investigação com a estudante cega.

2.1.1 Referencial teórico

Para desenvolver sua pesquisa, Anjos (2019) escolheu como referenciais teóricos, alguns constructos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (2005) e da Teoria das relações com o saber de Bernard Charlot (2000).

Com relação à TRRS, Anjos (2019), tendo a necessidade da compreensão do funcionamento cognitivo do pensamento matemático de estudante e da questão epistemológica que, enfatiza, se apoiando em Duval (1995), que o pensamento é ligado às operações semióticas, portanto, não haverá compreensão sem o uso de representações e do trânsito entre os registros de representação. Além disso, a autora traz no bojo de seu referencial, os três polos constitutivos de toda representação de um objeto matemático: o objeto representado, o conteúdo da representação e a forma da representação (DUVAL, 2004a). As representações semióticas, criadas pelos signos, são descritas em função dos registros de representações nos quais foram produzidas. As representações semióticas são consideradas como um meio para que o indivíduo exteriorize as suas representações mentais, tornando-as visíveis e acessíveis (DUVAL, 2009, p. 15).

A diversidade das representações semióticas dos objetos de conhecimento possibilita uma variedade de representações mentais sobre aqueles objetos.

A autora tece reflexões sobre as funções das representações mentais (DUVAL, 2009) e sua relação com a semiose, por meio de três atividades cognitivas fundamentais: a formação, o tratamento e a conversão (DUVAL, 2004b, 2009, 2018).

Pensando que em uma classe regular de ensino, se trabalha com representações semióticas acessíveis à visão quase que exclusivamente, a autora volta-se às adaptações táteis desta semiose e das formas mostradas nas representações no Livro Didático de matemática em Braille. Nesta perspectiva, a autora procurou respostas para a seguinte questão: será que esta semiose adaptada permite o acesso aos objetos do saber em matemática pela estudante cega, a ponto de fazê-la diferenciar o objeto e a sua representação? Esta questão justifica-se, pois, no caso de objetos acessíveis pela percepção, mas no caso da estudante cega, a percepção se dá pelo tato basicamente ou, dependendo do objeto, por meio dos sentidos remanescentes (VYGOTSKI, 1983 apud

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
ANJOS, 2019). A estudante cega, por sua percepção tátil para acessar objetos normalmente tratados pela percepção visual por alunos de vista normal, não tem acesso de maneira imediata e global, pois o tato se dá de forma sequencial, estritamente temporal, mais lenta e não diretamente por todo do objeto, como acontece com a visão (SACKS, 2003, apud ANJOS, 2019).

A autora fez apelo também às **funções de uma língua** para analisar um discurso e entender a forma como se apresenta uma resolução de problema, compreender os significados e os sentidos presentes nos discursos apresentados na sua pesquisa e, analisar o poder da língua na resolução de problemas matemáticos.

No que diz respeito à relação com o saber, Anjos (2019), para compreender a variedade de relações, e ter condições de compor uma análise voltada à Relação com o Saber pela estudante cega, considerou as três dimensões que compõem as relações com o saber colocadas por Charlot (2000):

- **Relação Epistêmica com o saber** em que o aprender pode ser entendido como apropriar-se de saberes-objeto, de conteúdos intelectuais designados ou não (CHARLOT, 2000, apud ANJOS, 2019, p. 124) e em que se procura saber que tipo de atividade se quer aprender. Desta forma, a autora buscou entender como o indivíduo percebe as estruturas e características do saber tanto para si quanto para o mundo. Nesta relação, existem divisões que estão relacionadas com o grau de domínio sobre o objeto do saber em matemática. Essas divisões são:

a) Objetivação-denominação: "o saber pode ser enunciado sem a evocação do processo de aprendizagem" (CHARLOT, 2000, apud ANJOS, 2019, p. 124). O autor (2000, p. 69) exemplifica usando o caso do teorema de Pitágoras, onde pode-se falar do teorema sem dizer nada sobre a atividade que levou ao aprendizado;

b) Imbricação do eu na situação que se refere ao aprendizado como domínio de uma atividade em sua vida e que não é separável do saber-objeto (CHARLOT, 2000, p. 69, apud ANJOS, 2019);

c) Distanciação-regulação em que aprender é tido como "passar do não domínio para o domínio e não constituir um saber-objeto", vindo o aprendizado de uma reflexão do sujeito, munindo-se de ferramentas que possibilitem a interpretação do mundo a sua volta (CHARLOT, 2000, apud ANJOS, 2019, p. 124-125).

- **Relação Identitária com o saber**: "a relação com o saber também é relação consigo próprio" (CHARLOT, 2000, apud ANJOS, 2019, p. 125), ou seja, a construção da sua identidade passa pela relação com o outro, pois existe a ajuda, a troca e a partilha

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
com outros, que podem ser, pais, professores, colegas de classe, membros da equipe pedagógica, ou seja, todo o entorno social que compreende a escola;

- **Relação Social com o saber** que perpassa as duas dimensões anteriores (CHARLOT, 2000, apud ANJOS, 2019, p. 125), já que a identidade de si e o ser social compõem o mesmo sujeito. O sujeito, de forma individual, carrega com ele a sua história, as suas expectativas próprias e da família e isso, interfere naquilo que é aprendido no meio escolar.

2.1.2 Questões metodológicos

Tendo em conta os objetivos estabelecidos e material didático elaborado a partir do material didático de quem enxerga, Anjos (2019) buscou compreender a variedade de registros e sua coordenação. A aumento do número de caracteres, a linearidade nas expressões fracionárias e a elaboração do material didático para a pessoa cega levando em conta o material de quem enxerga, propiciaram à autora pistas relacionadas às diferenças no acesso tanto ao significante quanto ao significado do objeto do saber, pois o estudo mostra nas análises semiocognitivas que o estudante cego enfrenta dificuldades acentuadas ainda no acesso ao significante.

A estudante cega investigada estava no Ensino Médio de uma escola de ensino regular do Bairro Trindade na Grande Florianópolis. O acompanhamento extraclasse realizado por Anjos (2019) perpassou os conceitos aprendidos durante as 1ª e 2ª séries do Ensino Médio da estudante. Durante o ano em que a estudante cursava a 3ª série do Ensino Médio, a autora realizou uma verificação de aprendizagem com frações, por meio de uma entrevista para identificar a sua Relação com o Saber e ainda, alguns encontros de acompanhamento guiados pelo Livro Didático de matemática em Braille.

Para elaboração da pesquisa de Anjos (2019), a fase de observação e de coleta de dados passou por três momentos distintos e complementares, que apresentamos no quadro 2.

ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

<table>
<tr><td rowspan="3">Diagnóstico composto por três momentos com objetivos e tarefas diferenciadas. A autora alerta que a realização de cada momento gerou inferências e apontamentos que levaram à elaboração da próxima.
A primeira etapa surgiu de uma necessidade exploratória originada das hipóteses preliminares elencadas nas Considerações Iniciais com o trabalho de dissertação</td><td>Acompanhamento Semanal de Aulas Extras</td><td>aulas de acompanhamento em que a estudante cega foi acompanhada semanalmente par repassar os conteúdos estudados em sala de aula e fazer um levantamento de dificuldades ou entraves no processo de aprendizagem em matemática diante da cegueira.</td></tr>
<tr><td>Entrevista com professoras alfabetizadoras</td><td>O objetivo principal desta entrevista foi verificar como se dá a alfabetização dos estudantes cegos, principalmente, relacionada ao CMU. Optou por escolher a ACIC e uma professora do Estado, que tem apoio pedagógico a muitos estudantes cegos nesta Instituição e são reforçadas as questões da alfabetização</td></tr>
<tr><td>Entrevista semiestruturada com o responsável pelo Centro de Apoio Pedagógico e Atendimento às Pessoas com Deficiência Visual (CAP) da Fundação Catarinense de Educação Especial (FCEE)</td><td>Esta entrevista teve o intuito de desvelar o processo de adaptação de materiais didáticos para estudantes cegos, desde a entrega dos materiais pelas escolas da rede pública até a finalização do material. A escolha por este CAP é devido ao fato que ele atende, cerca de 70% da demanda de material adaptado de todo o Estado</td></tr>
<tr><td>Entrevista da Relação com o Saber com a estudante cega</td><td colspan="2">O intuito é ir além das questões semiocognitivas trazidas, e investigar algumas questões de cunho epistemológico, identitário e social, que compõem as três dimensões da Relação com o Saber estabelecidas pela estudante e embasadas pelos estudos de Charlot (2000). Este autor enfatiza que a questões que envolvem a dimensão epistêmica estão relacionadas à apropriação dos objetos do saber pela estudante. Nesta perspectiva, Anjod_2019) realizou as entrevistas durante o primeiro encontro de acompanhamento com o Livro Didático em Braille, em que estava em estudo e discussão, o conteúdo de Polinômios.</td></tr>
<tr><td>Acompanhamento do Livro Didático de matemática em Braille com a estudante cega</td><td colspan="2">A autora realizou 10 encontros semanais com a estudante cega, para investigar aspectos semiocognitivos no Livro Didático em Braille com objetivos preestabelecidos e divisão de conceitos analisados, que tiveram como ponto de partida as inferências pontuadas nas aulas de acompanhamento semanal da etapa diagnóstica mencionada anteriormente.</td></tr>
<tr><td>Reflexivo e de escrita</td><td colspan="2">Compreende todo o período de elaboração da pesquisa e é composta pelas seguintes etapas que estão intercaladas nos períodos descritos no momento diagnóstico: leituras da fundamentação teórica guiadas por cronograma preestabelecido e criado ao longo da pesquisa, revisão de literatura sobre ensino e aprendizagem de estudantes cegos em matemática, levantamento de inferências, escrita de resultados e do texto geral que compõe esta Tese</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Os momentos da fase de observação e coleta de dados.
Fonte: Construído a partir de Anjos (2019).

2.1.3 Apontamentos sobre os resultados da pesquisa

No **levantamento** realizado pela autora durante as sessões de acompanhamento nos anos de 2015 e 2016, constatou algumas dificuldades na aprendizagem em matemática da estudante cega e diferenças em relação à aprendizagem de quem enxerga, como no caso do aumento no número de caracteres em Braille em relação à tinta e a escrita linear de expressões fracionárias. A autora apresenta como exemplos, as

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

expressões do tipo $y = \frac{x+1}{2}$, para trabalhar os conceitos de função inversa e função composta; a escrita de sistemas lineares; o cálculo da inversa de uma matriz; as expressões fracionárias que envolvem o conceito de fatorial e de números binomiais. A autora observou que o número aumentado de caracteres resulta numa maior opacidade no acesso ao objeto de saber. O que aparenta o que Duval (2004b, p. 53) denomina de fenômeno da não congruência semântica que pode acarretar atrasos e bloqueios na aprendizagem em matemática. A autora afirma que no caso da estudante cega, esse fenômeno também pode acontecer, quando se analisa a situação do aumento do número de caracteres e confrontá-lo com o fato do tempo de leitura desta estudante que, tanto é mais lento quanto mais cansativo do que a leitura em tinta.

A autora observa que este aspecto é também identificado na escrita de expressões fracionárias e, para este caso, em especial, o alerta volta-se tanto para o número aumentado de caracteres quanto para a mudança na espacialidade destas expressões. As expressões fracionárias em tinta são escritas bidimensionalmente e, permitem a visualização imediata dos numeradores e denominadores da expressão, já que as pessoas que enxergam têm também uma visão global desta forma bidimensional, o que não acontece na escrita de expressões fracionárias em Braille. A escrita em tinta é transcrita em Braille na forma linear que rompe com a bidimensionalidade da forma em tinta, para o traço ou barra da fração é utilizado um mesmo símbolo que é o símbolo da operação de divisão em Braille.

No que diz respeito aos numeradores e denominadores, como a leitura da estudante cega se dá de forma tátil e sequencial, a autora assevera que há uma diferenciação entre estes elementos, pois a escrita linear dificulta a organização sintática dos registros literais. O traço ou barra da fração é identificado por Duval (2004b) como uma problemática para quem enxerga, uma vez que, por si só, ele não designa o objeto de saber, culminando em um custo para a aprendizagem, pois modifica o significado e a referência da escrita posicional ao objeto. No caso da estudante cega, além da escrita ser linear e dificultar a identificação do numerador e denominador, há um signo (símbolo de divisão) que remete a uma operação e não ao objeto de saber número fracionário.

Tanto o aumento de caracteres quanto a forma da expressão apresentada em Braille dificultam o acesso ao objeto ostensivo, uma vez que os tratamentos a serem realizados exigem o reconhecimento de elementos que não são transparentes.

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Anjos (2019) aponta os limites e avanços do Código Matemático Unificado – CMU, como por exemplo, a estudante cega não lembra de alguns elementos da linguagem formal matemática presente no CMU. Além disso, a autora identificou que certos símbolos relacionados a conceitos matemáticos não eram conhecidos, tais como, arco, ângulo, logaritmo etc. Esta mesma situação ocorre no acompanhamento com o Livro Didático em Braille em que a autora percebeu que o desconhecimento dos símbolos se alastra para outros casos. O fato de os símbolos em Braille não sejam identificáveis, função referencial da língua de acordo com Duval (2004b), tem por consequência levar, por exemplo, a estudante a não compreender a definição de Equação Polinomial, uma vez que diversos símbolos que ela não conhecia apareciam nas questões.

Com relação aos alcances e limitações do Sistema Braille, (ANJOS, 2019) identificou que alguns registros de representação não eram produzidos pelas mãos da própria estudante cega, tanto pela dificuldade de escrita na máquina Braille de algumas representações em matemática (por exemplo, o algoritmo da divisão, operações em figuras geométricas, matrizes, alguns tipos de tabelas), assim como, pela valorização dada por ela, aos cálculos mentais. Ainda observa que a dificuldade encontrada em representar alguns conceitos matemáticos no papel, geralmente, pela demora na execução desta tarefa, fez a estudante tratar alguns conceitos apenas pela via das representações mentais e não semióticas. A dificuldade na produção das representações semióticas impediu, em certos aspectos, o acesso aos objetos de conhecimento, tendo em mente, a necessidade de transitar entre variados registros de representação para acessar estes objetos (DUVAL, 2004b, 2011a). Em muitas situações, os cálculos mentais feitos pela estudante não alcançavam o resultado esperado, o que causava certa insatisfação e, como consequência disso, para determinados conceitos, o desinteresse em aprender aumentava, caso que pode ocorrer conforme prevê Charlot (2000, apud ANJOS, 2019).

A partir de seu estudo, Anjos (2019) inferiu que, mesmo com situações em Braille que envolvem uma diversidade de registros de representação semiótica tendo sido trabalhadas com a estudante, para alguns deles houve necessidade de ajustes tendo em conta o acesso diferenciado dessa estudante em alguns objetos ostensivos pela forma como são transcritos para o Braille como, por exemplo, nos casos de figuras geométricas em 3D em que percebeu que a apreensão perceptiva tátil por conta de leis

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

gestálticas e por dificuldades na leitura de imagens tridimensionais em tinta transcritas para o Braille interfere no acesso ao registro figural pela estudante.

A autora ainda destaca que várias situações em matemática requerem o uso da linguagem escrita, como por exemplo, resolver equações, criar traços em figuras, elaborar esquemas, esboçar gráficos, pois, "a matemática afigura-se como uma prática principalmente escrita e não oral da língua" (DUVAL; MORETTI, 2018, p. 99).

Anjos (2019) observa que as **diferenças semiocognitivas** observadas no Livro Didático em Braille levam a uma questão fundamental que diz respeito ao acesso aos objetos de saber em matemática pela estudante cega: Como ela lembraria de algo da qual não possui lembrança tátil? A autora assevera que tendo apenas acesso à palavra e não ao registro figural pela opacidade do objeto ostensivo transcrito, a estudante não acessou o objeto do saber em matemática no que se refere às figuras geométricas tridimensionais.

A autora assevera que a estudante demonstrou cansaço na execução de uma parte das tarefas. Assim, a desmotivação pode influenciar na aprendizagem matemática desta estudante, sendo um fator externo envolvendo a **Relação com o Saber** estabelecida no contato com o material didático em Braille e o saber- objeto (CHARLOT, 2000, apud ANJOS, 2019). Em consequência deste fato, sugere que o livro da estudante cega deveria ser pensado levando em conta as especificidades do funcionamento cognitivo e semiótico da sua aprendizagem em matemática e não ser elaborado levando em conta o material de quem enxerga.

2.2 Desconstrução dimensional das formas: gesto intelectual necessário à aprendizagem de geometria (Roberta Nara Sodré de Souza, 2018)

Souza (2018) procurou resposta à seguinte questão de pesquisa: Problemas que envolvem figuras podem intencionalmente envolver a desconstrução geométrica das formas, possibilitando a aprendizagem desse gesto intelectual na construção dos conceitos de Geometria no Ensino Básico? Portanto, visou analisar maneiras e direcionamentos que podem indicar em problemas que envolvem figuras, como abordar intencionalmente a desconstrução geométrica das formas, de modo a possibilitar a sua aprendizagem como operação fundamental à construção de conceitos de Geometria no Ensino Básico.

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Para alcançar esse objetivo geral, a autora delineou os seguintes objetivos específicos, apoiando-se na Teoria dos Registros de Representação semiótica (DUVAL, 2004a):

- Levantar e explicitar elementos teóricos intrínsecos aos objetos matemáticos necessários a considerar no campo da Geometria para sua aprendizagem.
- Situar, por meio da abordagem teórica e de exemplos, elementos semióticos e cognitivos que interagem na desconstrução dimensional das formas geométricas.
- Apresentar e utilizar atividades de Geometria que envolvam imagens baseadas em análises semiocognitivas, compreendendo e localizando posicionamentos, mudanças e reações dos estudantes em suas produções diante das operações de desconstrução dimensional propostas.

Para a autora, os objetos ideais que compõem o conhecimento matemático se diferenciam na sua forma de constituição do saber, em especial, os que tratam de aspectos geométricos que envolvam figuras possuem características semiocognitivas especiais a serem consideradas na aprendizagem. Assevera que a desconstrução geométrica é a operação intelectual e constituinte de muitos problemas com figuras geométricas, e que não é algo que se constrói naturalmente, pois envolve elementos semióticos e cognitivos que interagem junto aos problemas que precisam ser aprendidos. Além disso, a desconstrução geométrica pode ser abordada de forma intencional em problemas que envolvem figuras geométricas. Ainda observa que a desconstrução geométrica é um gesto intelectual essencial na construção de significados dos objetos geométricos e pode contribuir para que os estudantes minimizem dificuldades de visualizar elementos em dimensões diferentes das dadas.

2.2.1 Referencial teórico

Para desenvolver sua pesquisa, Souza (2018) procurou sustentação teórica essencialmente nos construtos teóricos oriundos da TRRS (DUVAL, 2004a). Nesta perspectiva teórica, a autora observa que os problemas que envolvem figuras geométricas, geralmente, exigem mudança(s) de dimensão(ões) para que se reconheçam e designem seus elementos. Esta operação se constitui como cognitiva e semiótica, visto que associar os objetos matemáticos ao(s) tratamento(s) e conversão(ões) de representações de

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

registros de representação semiótica (RRS) e constituem o gesto intelectual nomeado de desconstrução dimensional das formas. A ausência de intenção didática sobre a desconstrução dimensional pode explicar alguns bloqueios que os estudantes encontram na resolução desse tipo de problemas.

A autora destaca a importância do olhar com direcionamento do icônico para o olhar não icônico, que revela a ampliação na conceitualização dos objetos matemáticos. Essas operações semiocognitivas de desconstrução dimensional, de mudança de olhares e das diferentes apreensões em geometria, envolvem os diferentes registros de representação, compondo as diferentes semioses, que, no conjunto de intersecções, compõem o que chamou de semiosfera da aprendizagem em geometria.

A autora assevera que a TRRS se revela nas funções da Língua, nas apreensões, nos olhares e na desconstrução dimensional (DUVAL, 1995, 2005). Considera também o papel relevante da linguagem na mediação sujeito-objeto-conhecimento, especialmente na abordagem dos objetos ideais, como os da Matemática, e compreender, de forma mais ampla, as relações que possibilitam caracterizar o papel dos sistemas semióticos na construção da realidade.

No que diz respeito às operações semiocognitivas em geometria, a autora enfatiza a importância de se levar em consideração as diferentes apreensões de uma figura geométrica: a apreensão perceptiva, que permite identificar de imediato uma forma ou um objeto bidimensional ou tridimensional, a apreensão discursiva, que acontece quando um enunciado ou explicação acompanha um desenho, a apreensão sequencial refere-se a construções de figuras, que depende de suas propriedades e das restrições técnicas dos instrumentos utilizados, a apreensão operatória, que se relaciona às modificações ou transformações possíveis de uma figura inicial (DUVAL, 1994, p. 123). Também traz à tona as funções meta-discursivas e discursivas no uso de uma língua.

As figuras geométricas se distinguem de todas as outras representações visuais pelo fato que existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais, mesmo que o fato de reconhecer umas exclui a possibilidade de reconhecer outras. As unidades figurais que reconhecemos pode ser os cubos, as pirâmides, as esferas (3D), ou os polígonos, os círculos (2D), ou as retas, as curvas (1D), ou, ainda, os pontos (1D) (DUVAL, 2011a, apud SOUZA, 2018).

Souza (2018) acrescenta que a construção da visualização matemática é integrada à desconstrução dimensional de figuras geométricas, pois, por meio dessa dinâmica de ver, ela envolve o perceber e interpretar elementos e propriedades

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
conceituais dos objetos geométricos. Ainda reforça que as operações a serem desenvolvidas que envolvem o pensar são operações cognitivas próprias de cada registro. “Isso significa que o sujeito deve ter consciência para poder cumpri-las intencionalmente e espontaneamente” (DUVAL, 2011a, apud SOUZA, 2018). Essas operações cognitivas induzem a possibilidade de cumprir as três funções cognitivas (de referência, a objetivação, as transformações de representações). A desconstrução dimensional das formas é uma operação que envolve a cognição unida aos elementos semióticos dos RRS de forma intencional.

2.2.2 Aspectos metodológicos

Do ponto de vista metodológicos, Souza (2018) apoiou-se nos princípios da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1998) inserida num estudo de caso, com análises qualitativas e um direcionamento investigativo.

Por meio de uma sequência de atividades afinadas à fundamentação teórica, Souza (2018) propôs um conjunto de problemas para estudantes do Ensino Médio com foco em diferentes apreensões e mudanças dimensionais, envolvendo figuras geométricas. A autora assevera que a fase experimental foi realizada com treze estudantes do Instituto Federal de Santa Catarina, *campus* Itajaí, em seis encontros compostos de treze atividades. Os dados foram coletados a partir de instrumentos escritos e orais dos sujeitos, produzidos nos diferentes encontros e as entrevistas individualizadas. A autora utilizou também outros instrumentos de coleta de dados (aplicativo de mensagens em celular).

Souza (2018) buscou caminhos metodológicos que colocassem os estudantes em situação de resolução de problemas que envolvessem figuras apoiando-se nas seguintes categorias de análise: as questões ligadas à teoria Gestalt (gerar uma consciência da tendência de nossa percepção visual sob as figuras geométricas a serem inseridas nos problemas) que abrangem uma dimensão perceptiva inicial, as funções discursivas e meta-discursivas no uso da língua, as semiosferas envolvidas quando se procura aproximar sistemas semióticos diferentes, as apreensões e os aspectos sobre a visualização nos diferentes olhares das figuras geométricas entrelaçados a desconstrução dimensional.

A análise das atividades didáticas realizada por Souza (2018) envolve textos e figuras, relacionados com a Geometria, a ação didática sobre as funções da língua, as

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

meta-discursivas, próprias da comunicação da linguagem natural e as discursivas próprias da linguagem formal, que necessariamente presentes em todas as atividades semiocognitivas e perpassam pelos tratamentos e conversões de representações de registros semióticos utilizados no texto e na sua resolução (DUVAL, 1995)

2.2.3 Apontamentos sobre os resultados da pesquisa

Souza (2018, p. 12) enfatiza a "relevância da desconstrução dimensional de formas como um gesto intelectual intrínseco à aprendizagem da geometria que leva ao desenvolvimento do olhar não icônico em diferentes tipos de atividades".

A autora destaca que o uso de Geogebra, com a orientação de questionamentos, mostrou-se uma atividade que proporcionou aos sujeitos um avanço nas suas observações e designações em dimensões inferiores. A proposição de atividades que envolvam figuras geométricas que tendem a levar o estudante ao enclausuramento numa determinada dimensão, em função do aspecto perceptivo, pode, numa segunda vista, quando orientada para encaminhamentos de cálculos ou questionamentos, induzir os sujeitos à desconstrução dimensional, inicialmente não realizada.

Souza (2018, p.12) assevera que

> O caráter transitório de figuras geométricas em problemas viabiliza a desconstrução dimensional, que pode ocorrer por atividades que provoquem modificações mereológicas, cálculos em que se tenha a necessidade de identificar e designar elementos em dimensões diferentes das que foram dadas, construções de figuras, geometria dinâmica, acréscimo de elementos às figuras dadas, com um olhar de inventor, como o prolongamento de lados ou arestas. As inserções didáticas, em ambientes escolares, podem, preferencialmente, ocorrer por meio de ações intencionais sob problemas que possibilitem a não fixação na figura inicial dada e concedam um estado transitório às figuras geométricas fornecidas. Especialmente no Ensino Básico, essas ações podem formar um alicerce fundamental necessário ao desenvolvimento dos objetos desse campo.

A abordagem de conceitos abstratos, centrados em objetos ideais, os da matemática, traz, de acordo com Souza (2018), os aspectos semióticos, os signos, como essenciais para a natureza de sua constituição. O trânsito e a coordenação entre diferentes sistemas semióticos revelam-se ser condição necessária para desvincular os registros de representação semióticas dos conceitos ideais em si, no que diz respeito aos objetos da matemática.

A autora sinaliza, com relação aos conceitos geométricos, que as figuras, consideradas como um registro de representação semiótica e suas diferentes apreensões,

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

tornam-se fortemente relevantes ao ensino de geometria. Nesta perspectiva, chama a atenção sobre a necessidade de os processos semiocognitivos perpassem de forma contínua o ensino da matemática, já que eles constituem ferramentas operatórias para que o estudante transite com mais facilidade em problemas que envolvam figuras.

As atividades selecionadas, construídas ou modificadas, foram pensadas por Souza (2018) intencionalmente, incorporando os aspectos teóricos almejados. Observou, na mudança dimensional, que os aspectos relacionados às diferentes apreensões de figuras geométricas (perceptiva, operatória, discursiva e sequencial) e funções da língua se articulam para que os processos de aprendizagem ocorram.

A autora evidenciou, a partir dos constructos teóricos e dos registros dos sujeitos nas atividades experimentais, que a desconstrução geométrica, quando abordada de forma intencional em problemas que envolvam figuras, constitui-se como um gesto intelectual fortemente importante para dar significado e sentido aos conceitos de geometria. As maneiras e direcionamentos que podemos compor para desenvolver esse gesto intelectual variam de acordo com as potencialidades e aspectos transitórios para outras unidades da figura geométrica apresentada, seu aspecto perceptivo, as apreensões envolvidas e desses elementos para um olhar não icônico.

2.3 Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas no ensino superior: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do Geogebra (Sérgio Florentino da Silva, 2018)

Silva (2018) assevera que analisar gráficos de curvas e de superfícies é uma prática recorrente que não é exclusividade de pesquisadores e estudantes da área de Matemática. Do ponto de vista escolar, o estudo de curvas está constantemente presente nos Ensinos Fundamental, Médio e, ainda, em diversos cursos tanto de graduação quanto de pós-graduação. Já o estudo de superfícies, geralmente, inicia-se em diversos cursos de graduação e pode sofrer aprofundamentos em cursos de pós-graduações.

Para o autor, o entendimento dos gráficos permite compreender diversas situações que são tanto internas quanto externas a Matemática. No Ensino Superior, dentre os tipos de superfícies incluem-se aquelas que são conhecidas pelo nome genérico de superfícies quádricas ou, simplistamente quádricas.

Considerando a citada relevância das quádricas na compreensão de fenômenos e ainda admitindo dificuldades em sua aprendizagem, Silva (2018) analisou o ensino e

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

a aprendizagem das superfícies quádricas com especial atenção às quádricas não cilíndricas e não degeneradas (elipsoide; hiperboloide de uma folha; hiperboloide de duas folhas; cone quádrico elíptico; paraboloide elíptico; paraboloide hiperbólico). Algebricamente essas superfícies possuem como registro simbólico uma equação do segundo grau em três variáveis do tipo: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$, sendo A, B, C, D, E, F, G, H, I, J números reais diferentes de zero e x, y, z, variáveis reais

Tendo em conta a relevância das superfícies quádricas e a dificuldade em ensinar e aprender esses objetos, Silva (2018) formulou à seguinte questão de pesquisa: No Ensino Superior, com o uso do Geogebra e em *sintonia* com a TRRS, principalmente no que diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais, as Funções Discursivas da Linguagem e as operações cognitivas de Conversão e Tratamento, como abordar as superfícies quádricas?

Visa-se, na perspectiva da TRRS, em especial no que tange a abordagem de interpretação global de Propriedades Figurais, as Funções Discursivas da linguagem e as operações cognitivas de conversão e tratamento, analisar as superfícies quádricas sobre o ponto de vista das dimensões epistemológica, cognitiva, didática, perpassando por todas elas a dimensão semiótica. Para alcançar este objetivo, o autor delineou as seguintes submetas:

- identificar nos registros cartesiano, linguístico e simbólico das superfícies quádricas as correspondentes unidades básicas significantes e, então, criar quadros ou textos que correlacionam essas unidades;
- pesquisar propriedades que contribuam para a interpretação global das superfícies quádricas (propriedades de simetria e reflexão);
- no banco de Teses/Dissertações da capes e nos principais periódicos da área, analisar, na ótica da TRRS, as pesquisas que tratam das superfícies quádricas;
- analisar, na ótica da TRRS, os registros em língua natural das superfícies quádricas presentes nos principais livros de Ensino Superior e, a partir daí, propor registros;
- para as quádricas em geral, dando ênfase as não cilíndricas e não degeneradas na posição padrão, fazer uma análise preliminar e elaborar uma proposta de Sequência de ensino;

ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

- para os paraboloides elípticos padrão, realizar todas as fases da Engenharia Didática incluindo, claro, a elaboração e aplicação de uma proposta de uma sequência de ensino.

2.3.1 Referencial teórico

O autor tomou como pano de fundo teórico a TRRS (DUVAL, 1995), sobretudo a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, as funções discursivas da linguagem e as operações cognitivas de conversão e tratamento.

O autor observa que a potencialidade da aprendizagem (integral) têm exigências mais amplas e específicas, que não são naturais e espontâneas, e necessitam de uma abordagem que permita a **interpretação global de propriedades figurais**. Essa abordagem apoia-se na semiótica conforma Duval (1995), portanto, a razão profunda das dificuldades de aprendizagem está, muitas vezes, na falta de conhecimento das regras de correspondência e da necessidade de conversões de representações de dados registros em outras representações de outros registros de representação semiótica.

No estudo de problemas que envolvem gráficos, Duval (2011b) categoriza três maneiras clássicas de abordar esse processo*:* **Abordagem Ponto a Ponto (1); Abordagem de Extensão do Traçado Efetuado (2); Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais (3)**. Essas abordagens não levam em conta os mesmos dados visuais do gráfico e não são guiadas pelo mesmo tipo de questão.

Na abordagem (1) recorre-se a uma tabela de pontos para passar do registro simbólico para o registro gráfico, sem se preocupar em identificar ou usar as unidades significantes e, além do mais, não é dado ênfase a todas as transformações possíveis, pois se limita a alguns pontos particulares.

A abordagem (2) corresponde às atividades de interpolação e extrapolação. Silva (2018) afirma que esta perspectiva leva em consideração, diferentemente a abordagem (1), o conjunto infinito de pontos potenciais, ou seja, sobre os intervalos entre os pontos marcados, além disso, leva em conta os dados do traçado e não as *variáveis visuais*, sem se preocupar com a expressão algébrica.

Silva (2018) assevera que a abordagem (3) leva em consideração as propriedades globais de uma curva ou de uma superfície e possibilita a visualização como um todo, reforçando a relação entre o esboço e sua expressão algébrica e não entre a curva e alguns pontos.” (CORRÊA; MORETTI, 2014, p. 62) e favorece a discriminação e correspondência explícita das unidades significantes próprias a cada registro de representação.

2.3.2 Aspectos metodológicos

Para planejar e executar sua pesquisa, Silva (2018) valeu-se dos princípios da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988), articulando-os com as dimensões cognitiva, epistemológica, dimensão semiótica e didática concernentes ao objeto de estudo e, perpassando por essas dimensões.

Como assinalado no referencial teórico, o autor analisou nos estudos preliminares as variáveis visuais, os registros simbólicos e suas unidades significantes simbólicas, os registros em língua natural bem como as articulações entre os diferentes registros das quádricas. Ainda, dissertou sobre os registros em língua natural presentes em alguns livros didáticos clássicos e, identificou os limites e possibilidades desses registros, o que o levou ao uso de novos registros em língua natural.

O autor construiu sequências de ensino para as quádricas, proporcionando condições para que a participação dos alunos estivesse em sintonia com a os objetivos almejados. Integrou nesse processo o *software* Geogebra para favorecer uma abordagem experimental em Educação Matemática que integre as diferentes dimensões supracitadas.

Nas fases de concepção, análise a priori, experimentação e análise a posteriori, Silva (2018) focou principalmente os paraboloides elípticos padrão que considera como modelo para o estudo das demais quádricas. No que diz respeito à análise a priori de cada atividade de ensino proposta, o autor levou em consideração as seguintes variáveis de comando: tipo de situação; objetivos; hipóteses. A fase experimental foi realizada com dez alunos. Nas análises a posteriori e validação foram realizadas pelo autor tendo em conta, entre outros constructos teóricos, as funções discursivas da linguagem, as funções referencial e de expansão discursiva necessárias para o progresso do discurso, os tratamentos e as conversões de representações de dados registros para representações de outros registros.

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

2.3.3 Apontamentos sobre os resultados

A partir de sua análise apoiando-se na identificação das Variáveis Cognitivas da TRRS e o estudo sobre o ensino e a aprendizagem das quádricas, Silva (2018) identificou que essas superfícies têm várias variáveis visuais que, por sua vez, possuem unidades significantes simbólicas e linguísticas correspondentes. A articulação entre essas unidades permitiu ao autor identificar treze casos para os elipsoides, três para os hiperboloides de uma folha, três para os hiperboloides de duas folhas, três para os cones quádricos, seis para os paraboloides elípticos e seis para os paraboloides hiperbólicos. Esta diversidade de casos atestaria a complexidade das quádricas no que tange as dimensões epistemológica e cognitiva.

Conscientes dessas dificuldades, para estar em **sintonia** com a TRRS, principalmente no que diz respeito à abordagem de interpretação global de propriedades figurais, as funções discursivas da linguagem e as operações cognitivas de conversão e tratamento, o autor enfatiza a importância das variáveis visuais que permitem identificar/analisar as diferenças e semelhanças tanto entre os vários casos de quádricas quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes no sistema cartesiano.

A primeira variável visual que foi considerada por Silva (2018), foi à posição da quádrica no sistema cartesiano que pode assumir três valores: padrão, transladada e rotacionada. Assim, para o autor, as unidades significantes simbólicas são os termos quadráticos, os termos lineares, os sinais dos coeficientes desses termos e o valor do termo independente (zero ou um) das equações das quádricas. Essas unidades figurais revelam os elementos que constituem o **conjunto das unidades simbólicas** da equação além de como é a **combinação** desses elementos na equação em questão. Em primeiro lugar, esse reconhecimento é fundamental para identificar as oposições qualitativas (semelhanças e diferenças) das diferentes equações das quádricas.

No que diz respeito ao Geogebra, este artefato teria contribuído de forma dinâmica e interativa para a identificação das variáveis visuais e das unidades significantes correspondentes e para a articulação/correlação entre os diferentes registros envolvidos nas diferentes situações.

Na análise dos achados, a partir essencialmente das Funções Discursivas da Linguagem, Silva (2018) assevera que, no decorrer do processo, as funções referencial e de expansão discursiva necessárias para o progresso do discurso, os tratamentos e as conversões de representações teriam sido mobilizados adequadamente pelos alunos. O

ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

autor destaca ainda que a evocação dos conteúdos presentes nas variáveis visuais, nos registros básicos simbólicos e suas unidades significantes simbólicas e nos registros básicos em língua natural levados em consideração nos processos da construção da tese, foram mobilizados de forma adequada pelos alunos, e que há indícios de que diante das sequências de ensino construídas e experimentadas, os processos cognitivos mobilizados pelos alunos invocaram adequadamente as variáveis cognitivas por ele escolhidas.

2.4 A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais (Barbara Cristina Pasa, 2017)

Diante das dificuldades que os estudantes apresentam na interpretação e no esboço de curvas e tendo como escopo a compreensãoa partir da interpretação global de uma curva, a proposta da autora é problematizar o ensino e a aprendizagem do esboço de curvas de funções polinomiais do segundo ($y = ax^2 + ax + c$) e terceiro ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$) graus, no ensino médio (EM).

Buscando possibilidades para o ensino dessas funções, Pasa (2017) construiu e apresentou um **caminho alternativo** (PASA, 2017) para o esboço de curvas de algumas funções do ensino médio. Este caminho perpassa a abordagem de interpretação global das propriedades figurais (DUVAL, 2011b) adotando como recurso de articulação entre unidades significativas as taxas de variação de uma função, compreendidas e calculadas por meio da noção de infinitésimos. Essas taxas são calculadas e compreendidas a partir da noção de infinitésimos[3], não no sentido de seu rigor e formalização, e sim no de possibilitar o entendimento de variação, fundamental no esboço de curvas e sem recorrer à formalização das noções de limite e derivada.

Contudo, diante da impossibilidade de realizar reflexões a partir da análise dos parâmetros do registro algébrico, principalmente da função polinomial do terceiro grau, ocasionada pela grande quantidade de parâmetros, o compromisso com a interpretação

[3] Os infinitésimos pertencem ao conjunto dos Números Hiper-Reais, que é uma extensão dos Reais que contém os infinitos e os infinitesimais. Este conjunto foi introduzido para dar rigor a uma abordagem intuitiva do Cálculo Infinitesimal. Por infinitésimos, consideraremos um número tão pequeno quanto se queira, porém, maior que zero.

ReBECEM | Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
global, ficou, nas discussões desta tese, por conta do cálculo e análise das taxas de variação das funções.

A autora assevera que, admitindo que as inconsistências matemáticas relacionadas à noção de infinitésimos foram superadas, o potencial didático dos infinitésimos se encontra na possibilidade de entendimento da variação de uma função, característica fundamental para o esboço de curvas e compreensão da conversão de representações de RRS em representações de outro registro de representação, oportunizando ao estudante a compreensão de variabilidade necessária para esboçar curvas e interpretar fenômenos e situações de diversas áreas do conhecimento. Deste modo, a obtenção da taxa de variação instantânea de primeira[4] ordem ($TVI_1(x)$) de uma função ocorre a partir da obtenção da taxa média de variação (TMV) desta função para um intervalo genérico $[x, x+\Delta x]$, $TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, no qual considera-se Δx um infinitésimo. O esboço da curva perpassa, desta forma, a variabilidade da função obtida por meio do estudo do sinal da taxa de variação instantânea de primeira ordem ou, quando se fizer necessário, de segunda ordem ($TVI_2(x)$).

Sendo assim, a autora assevera que as unidades básicas simbólicas identificadas são da expressão algébrica da taxa de variação de primeira ordem enquanto as unidades básicas gráficas identificadas são as relacionadas à análise da variação da curva como os intervalos de crescimento e de decrescimento e os pontos de máximo e mínimo. A taxa de variação de segunda ordem, quando necessária, possibilita concluir a respeito da concavidade e dos pontos de inflexão.

Considerando a função real polinomial de segundo grau, definida por $y = ax^2 + bx + c$, a taxa de variação instantânea de primeira ordem - $TVI_1(x)$, para um valor qualquer de x, na perspectiva do **caminho alternativo**, será: $TVI_1(x) = 2ax + b$. O mesmo processo é utilizado para obter $TVI_2(x) = 2a$, que no caso destas funções é desnecessária para o esboço. Em posse destas taxas de variação, são analisadas variáveis referentes à função e essenciais para a compreensão global relacionadas à variabilidade, como crescimento, decrescimento, valor máximo e mínimo e concavidade (Quadro 3).

[4] $TVI(x)$ ou $TVI_1(x)$ é a taxa de variação instantânea de primeira ordem de uma função. O índice "1" é necessário quando se acrescenta às análises a ideia de variação da taxa de variação instantânea, relacionada à concavidade de uma curva e representada por $TVI_2(x)$, ou, taxa de variação instantânea de segunda ordem da função.

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Unidades básicas simbólicas				Unidades básicas gráficas			
TVI_1	Valor de a	TVI_1	Valor de x	Reta Tangente	Concav. (TVI_2)	Ponto crítico	Esboço curva
$2ax+b$	$a>0$	<0	$x<-b/2a$	Decrescente	Para cima (positiva)	Mínimo absoluto em $x=-b/2a$	
		$=0$	$x=-b/2a$	Constante			
		>0	$x>-b/2a$	Crescente			
	$a<0$	<0	$x>-b/2a$	Crescente	Para baixo (negativa)	Máximo absoluto em $x=-b/2a$	
		$=0$	$x=-b/2a$	Constante			
		>0	$x<-b/2a$	Decrescente			

Quadro 3 - Unidades simbólicas e gráficas de uma função polinomial do segundo grau
Fonte: Pasa (2017, p. 146)

A identificação de unidades básicas simbólicas relativas à expressão algébrica da taxa de variação possibilita inferir sobre as unidades básicas gráficas que são as características da curva relativas à variabilidade, o que pode ser visualizado no quadro 3.

No esboço de funções reais polinomiais de terceiro grau, além da análise da $TVI_1(x)$, algumas funções requerem impreterivelmente a análise da $TVI_2(x)$, a qual é obtida através da expressão algébrica da $TVI_1(x)$, possibilitando concluir sobre a concavidade da curva. Deste modo, sendo $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, com $a\neq 0$, obtém-se $TVI_1(x)=3ax^2+2bx+c$ e $TVI_2(x)=6ax+2b$. Os quadros apresentados a seguir, apresentam o processo de esboço de curva pelo **caminho alternativo** para funções polinomiais de terceiro grau baseado na $TVI_1(x)$ (quadro 3) e na $TVI_2(x)$ (Quadro 4).

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Unidades básicas simbólicas					Unidades básicas gráficas		
TVI_1	Coef. a	NR*	TVI_1	Valores de x	RT**	Esboço curva	Pontos críticos
$3ax^2+2bx+c$	>0	2	<0	$\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}<x<\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Decres		Máx. e mín. relativos ($TVI_1(x)=0$). Ponto Inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			$=0$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Const		
			>0	$x<\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ e $x>\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Cresc		
		1	$=0$	$x=\frac{-b}{3a}$	Const		Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			>0	$x<\frac{-b}{3a}$ e $x>\frac{-b}{3a}$	Cresc		
		0	>0	$x\in R$ Esboço a partir da análise da $TVI_2(x)$ - tabela 3.	Cresc		Ponto inflexão ($\boldsymbol{TVI_2(x)=0}$)
	<0	2	<0	$x<\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ e $x>\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Decres		Máx. e mín. relativos ($TVI_1(x)=0$). Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			$=0$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Const		
			>0	$\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}<x<\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Cresc		
		1	$=0$	$x=\frac{-b}{3a}$	Const		Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			<0	$x<\frac{-b}{3a}$ e $x>\frac{-b}{3a}$	Decres		
		0	<0	$x\in R$ Esboço a partir da análise da $TVI_2(x)$ - tabela 3.	Decres		Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)

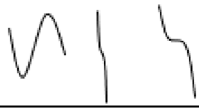
Quadro 4 - Esboço de curvas de funções reais polinomiais do terceiro grau a partir da análise da $\mathbf{TVI_1(x)}$
Fonte: Pasa (2017, p. 149).

*NR = Número de Raízes

**RT = Reta Tangente

No quadro 5, o estudo do sinal da $TVI_1(x)$ revela o comportamento da reta tangente à curva, permitindo concluir a respeito da variação da curva e dos pontos máximos e mínimos relativos. Para algumas funções de terceiro grau a $TVI_1(x)$ é inconclusiva, por isso, torna-se necessário conhecer e estudar a $TVI_2(x)$, inferindo sobre a concavidade, permitindo assim, inferir sobre a curva, apresentado no quadro 5.

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Unidades básicas simbólicas				Unidades básicas gráficas	
TVI_2	Coef. a	Sinal da TVI_2	Valor de x	Concavidade	Possíveis esboços da curva
$6ax + 2b$	$a > 0$	< 0	$x < -b/3a$	Negativa – para baixo	
		$= 0$	$x = -b/3a$	Local de Inflexão	
		> 0	$x > -b/3a$	Positiva – para cima	
	$a < 0$	> 0	$x < -b/3a$	Positiva – para cima	
		$= 0$	$x = -b/3a$	Local de Inflexão	
		< 0	$x > -b/3a$	Negativa – para baixo	

Quadro 5: Análise da concavidade de curvas de funções reais polinomiais do terceiro grau a partir da $\mathbf{TVI_2(x)}$.
Fonte: Pasa (2017, p. 150).

As funções trigonométricas $y = sen\ x$, $y = cos\ x$ e $y = tg\ x$ também podem ser problematizadas na perspectiva proposta, presumindo um custo cognitivo significativo devido às compreensões trigonométricas demandadas, mas ainda assim, permitindo inferências na direção do **caminho alternativo**. A função seno, definida como $y = sen\ x$, possui taxa média de variação (TMV) para o intervalo $[x, x + \Delta x]$ definida como

$$TMV = \frac{sen\ (x + \ \Delta x) - sen\ x}{\Delta x}.$$

Assim, utilizando o seno da adição de dois arcos ($sen\ (x + \Delta x) = sen\ x. \cos \Delta x + sen\ \Delta x. \cos x$) e os valores de $sen\ \Delta x$ e $cos\ \Delta x$, encontrados por meio do ciclo trigonométrico da figura 2, como Δx e 1, respectivamente, chega-se a seguinte expressão para a taxa de variação instantânea de primeira ordem:

$$TVI_1(x) = \frac{sen\ x. 1 + \Delta x. \cos x - sen\ x}{\Delta x}$$

$$TVI_1(x) = \frac{\Delta x. \cos x}{\Delta x} \rightarrow TVI_1(x) = \cos x.$$

O estudo do sinal da $TVI_1(x) = \cos x$, possibilita inferir sobre o comportamento (crescimento e decrescimento) da curva da função $y = sen\ x$ ao longo de seu domínio, apresentado no quadro 4, e assim, concluir sobre o esboço da sua curva.

ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

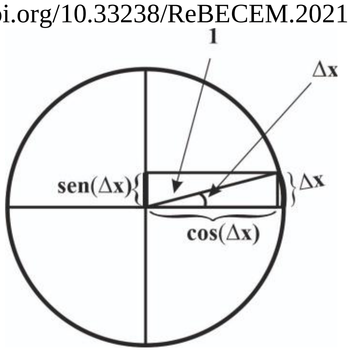
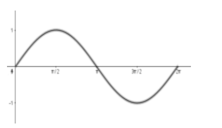


Figura 2 - Valores de sen Δx e de cos Δx a partir do ciclo trigonométrico sendo Δx infinitesimal (Pasa, 2017)
Fonte: Pasa, Binotto e Moretti (2020, p. 8).

Unidades básicas simbólicas		**Unidades básicas gráficas**		
$\boldsymbol{TVI_1(x)}$	**Valor de $\boldsymbol{x}$**	**Reta tangente**	**Ponto crítico**	**Esboço da curva**
> 0	$0 < x < \pi/2$ $3\pi/2 < x < 2\pi$	Crescente	Mínimo absoluto em $(3\pi/2, -1)$ Máximo absoluto em $(\pi/2{,}1)$	
$= 0$	$x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$	Constante		
< 0	$\pi/2 < x < 3\pi/2$	Decrescente		

Quadro 6 - Esboço das propriedades da função y=sen x no domínio de [0,2π].
Fonte: Pasa (2017. p. 152).

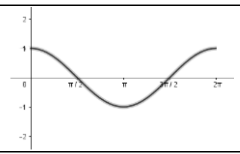
Para a função $y = \cos x$, o cálculo é análogo ao da função $y = sen\ x$: encontra-se a taxa média de variação para um intervalo $[x, x + \Delta x]$, aplica-se o cosseno da soma de dois arcos, considera-se Δx um infinitésimo e, com base na Figura 1, obtém-se:

$$TMV = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$TMV = \frac{\cos x . \cos \Delta x - sen\ x . sen\ \Delta x - \cos x}{\Delta x}$$

$$TVI_1(x) = -sen\ x.$$

A análise do sinal da $TVI_1(x)$ e a coordenação entre registro algébrico desta e seu gráfico estão apresentados no Quadro 6.

Unidades básicas simbólicas		**Unidades básicas gráficas**		
$\boldsymbol{TVI_1(x)}$	**Valor de $\boldsymbol{x}$**	**Reta tangente**	**Ponto crítico**	**Esboço da curva**
> 0	$\pi < x < 2\pi$	Crescente	Mínimo absoluto em $(\pi, -1)$ Máximo absoluto em $(0{,}1)$ e $(2\pi, 1)$	
$= 0$	$x = 0$ e $x = \pi$	Constante		
< 0	$0 < x < \pi$	Decrescente		

Quadro 7 - Esboço das propriedades da função y=cos x no domínio de [0,2π].
Fonte: Pasa (2017, p. 152).

Por fim, a análise da função $y = tg\ x$ perpassa analogamente o cálculo da taxa média de variação para um intervalo $[x, x + \Delta x]$, a aplicação do seno e do cosseno da soma de dois arcos, a consideração de Δx como um infinitésimo e a figura 1, bem como ajustes algébricos e substituições possíveis. Assim,

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

$$TMV = \frac{tg\,(x + \Delta x) - tg\,x}{\Delta x}$$

$$TMV = \frac{\frac{sen\,(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{sen\,x}{\cos x}}{\Delta x}$$

$$TMV = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{sen\,x.\cos\,\Delta x + sen\,\Delta x.\cos x}{\cos x.\cos\,\Delta x - sen\,x.sen\,\Delta x} - \frac{sen\,x}{\cos x}\right)$$

$$TMV = \frac{1}{cos^2 x + \Delta x\,sen\,x.\cos x}$$

$$TVI_1(x) = \frac{1}{cos^2\,x} = sec^2 x$$

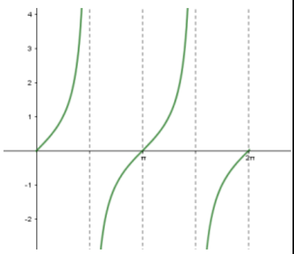
Como a função $TVI_1(x) = \frac{1}{cos^2\,x} = sec^2 x$ nunca será zero, para $x \epsilon [0{,}2\pi]$, o domínio da taxa de variação instantânea será todos os reais exceto $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$. Assim, o esboço da curva será ascendente e não terá pontos máximos ou mínimos. Uma visão mais detalhada do esboço da curva pode ser obtida a partir da $TVI_2(x)$, a qual informa a respeito da concavidade:

$$TMV_{da\,TVI_1} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{cos^2(x + \Delta x)} - \frac{1}{cos^2 x}\right).$$

A qual resulta na taxa de variação instantânea de segunda ordem,

$$TMV_2(x) = \frac{2\,sen\,x}{cos^3 x}.$$

No quadro 8, a autora apresenta as possibilidades de inferências sobre o esboço da curva da função tangente (Figura 8).

Unidades básicas simbólicas			**Unidade básica gráfica**	
$TVI_1(x)$	$TVI_2(x)$	**Valor de x**	**Concavidade**	**Esboço do gráfico**
> 0	> 0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	Positiva – para cima	
	$= 0$	$= 0$	Mudança de concavidade – ponto de inflexão	
	< 0	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	Negativa – para baixo	

Quadro 8 - Esboço das propriedades da função y=tg x no domínio de [0,2π].
Fonte: Pasa, Binotto e Moretti (2020, p. 15).

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

A abordagem de esboçar curvas "ponto a ponto", costumeiramente utilizada no ensino, pode tornar-se um processo mecânico que não possibilita compreender as correspondências semióticas entre os registros algébrico e gráfico, deste modo, desencadeando dificuldades de compreensão e interpretação do objeto matemático. Esboçar curvas na perspectiva do **caminho alternativo** é desafiador, uma vez que perpassa uma mudança de concepção no ensino de Matemática como um todo e pode exigir uma "bagagem" de conceitos por parte dos alunos, especialmente para as funções trigonométricas, para que o processo de aprendizagem ocorra de forma mais eficiente. Por outro lado, e sobretudo, a compreensão e o esboço de uma curva a partir da sua variabilidade e mediada pela utilização da noção de infinitésimos no âmbito do ensino médio possibilita que propriedades pertinentes das curvas fiquem explícitas e sejam compreendidas, como os pontos críticos, as raízes e os pontos máximos e mínimos, sejam eles absolutos ou relativos. Desta forma, ampliando e aprofundando a compreensão do conceito de função relacionada ao dinamismo, transformação e movimento inerentes a este objeto matemático, o que torna esta abordagem necessária em sala de aula do ensino médio.

As reflexões suscitadas permitiram a Pasa (2017) concluir que o trabalho nesta perspectiva possibilita o reconhecimento de unidades básicas simbólicas, relativas à variabilidadee de unidades básicas gráficas e, mais do que isso, as conversões entre elas, sem a necessidade de obtenção da expressão algébrica da função. Assevera que, a partir da aplicação da sequência didática e da análise dos diálogos e resoluções dos estudantes quanto às funções do discurso mobilizadas, o processo de apropriação do conhecimento pelos estudantes e os gestos intelectuais mobilizados no caminho alternativo possibilitaram a compreensão ampla do conceito de funções no que se refere à sua variabilidade. Em relação ao ensino, evidenciou as limitações provenientes de um ensino de esboço de curvas unicamente permeado de uma abordagem ponto a ponto, a qual restringe o olhar do estudante quanto ao movimento, à transformação e ao dinamismo presentes no conceito de funções, não proporcionando a tomada de consciência das conversões entre registros de representação semióticas necessárias, tampouco dos tratamentos. Sinaliza a necessidade de promover, no contexto do ensino médio, um ensino de funções e esboço de curvas em sintonia com as possibilidades de aprendizagem dos estudantes, permitindo olhares diferenciados a uma curva e ao que ela representa e, mais do que isso, um ensino que estimule a comunicação escrita e oral das conclusões na resolução de problemas matemáticos.

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

2.5 Os números inteiros relativos em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais (Selma Felisbino Hillesheim, 2013)

A principal questão de pesquisa é: De que forma o "princípio de extensão" pode contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem da multiplicação de números negativos? E por objetivo geral, analisar uma sequência de ensino em que as operações de adição, multiplicação e subtração com números inteiros relativos, serão abordados por meio do "princípio de extensão", e verificar as suas possíveis contribuições nos processos de ensino e de aprendizagem. Para operacionalizar esse objetivo central, Hillesheim (2013) teve como micrometas analisar, do ponto de visto histórico as dificuldades encontradas no passado com relação ao surgimento e a consolidação do número negativo e da regra de sinais. Estudou as abordagens que os Parametros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997, 1998), NCTM (2008) e os livros didáticos de matemática do 7º ano, apontados pelo PNLD (2011), trazem sobre os números inteiros relativos. Um dos aspectos discutidos são as possibilidades que o "princípio de extensão" e a congruência semântica trouxeram para o ensino das operações de adição, multiplicação e subtração de números inteiros relativos. Enfim, uma das metas é organizar e aplicar uma sequência de ensino pautado no "princípio de extensão" e avaliar as possibilidades de ensino dos números inteiros relativos, conduzido por meio desse princípio.

Para alcançar esses objetivos, a autora buscou na história da matemática, como aconteceu o processo de consolidação do número negativo.

A autora assevera que a hesitação em aceitar os números negativos foi uma característica marcante no seu processo de consolidação. A regra de sinais para a multiplicação é apresentada por Diofanto de Alexandria (2007) ainda no 3º século d. C. No entanto, somente em 1867 que Hankel consegue demonstrá-la e, assim, resolve o problema do ponto de vista matemático. Mas, do ponto de vista didático/pedagógico, o problema persiste ainda hoje. Glaeser e Coquin-Viennot apud Hillesheim (2013) enfatizam que o modelo comercial, utilizado para o ensino das propriedades aditivas, contribui para a formação de obstáculos no ensino das propriedades multiplicativas dos números inteiros relativos. O modelo comercial, que é o mais encontrado e que busca uma explicação para essas regras com exemplos práticos, encontra na noção de congruência semântica (DUVAL, 1995) uma forte oposição por conta de uma associação

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
codificada entre verbos e operação, por exemplo: perder/escorregar associados à operação de subtração, enquanto ganhar/subir são associados à adição.

Apoiando-se em Caraça, a respeito do princípio de extensão, Hillesheim (2013) fez a hipótese de que o ensino das operações com números inteiros relativos deve seguir esse mesmo princípio. A ideia trazida por Caraça é de que há, em matemática, uma propensão para a generalização de resultados, ampliando as propriedades para universos cada vez mais amplos. Assim, por esse princípio, prevaleceu a regra usual dos sinais por ser essa a regra que conserva as propriedades de distributividades à direita e à esquerda observada com os números positivos.

Nesse contexto, a autora indaga-se de que forma o “princípio de extensão” pode contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem da multiplicação de números inteiros negativos? Destaca que, para que haja alguns resultados em termos de aprendizagem, o ensino das operações dos números inteiros relativos deve ser apreendido sob a perspectiva da congruência e da não congruência semântica (DUVAL, 2012a). Nesta perspectiva, as situações de ensino e aprendizagem desses objetos devem “[...] atender as condições de correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, manter a ordem de apreensão possível destas unidades nas duas representações e converter a unidade significativa na representação de chegada”. Hillesheim, 2013, p. 26)

Na sua análise de livros didáticos, Hillesheim (2013) mostra que dentro das diversas abordagens apresentadas nos livros didáticos para a multiplicação de números inteiros negativos, duas vertentes para o modelo aritmético se destacam. Uma utiliza como justificativa para a multiplicação de números de sinais diferentes a soma de parcelas iguais e para a multiplicação de dois números negativos utiliza o recurso da multiplicação do primeiro pelo simétrico do segundo, ou vice-versa.

A outra apresenta a multiplicação de números inteiros negativos, observando os produtos obtidos numa sequência numérica. Assim, a regra de sinais emerge em meio a generalizações. Ainda observa ser de fundamental importância diferenciar esses dois modos de apresentação aritmética da multiplicação de números inteiros relativos.

A autora ainda mostra que maioria dos livros analisados utiliza o modelo aritmético para abordar a adição de números inteiros relativos. Os autores desses livros se baseiam em situações-problema que relacionam o número positivo a ideia de ganho/ lucro/ crédito e a ideia de número negativo atrelada a perda/débito/prejuízo. A operação de adição foi apresentada geometricamente em torno de 40% dos livros analisados,

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

por meio de situações em que realizaram os deslocamentos sobre a reta numérica, onde os números positivos representavam movimentações para a direitae o número negativo para a esquerda. Em nenhum dos livros analisados, a operação de adição foi apresentada utilizando o modelo algébrico.

A autora complementa que, embora a operação da adição tenha sido apresentada em 60% dos casos pelo modelo aritmético, a operação de subtração não seguiu esse padrão, 40% dos livros utilizaram esse modelo para introduzir a operação de subtração. Os demais apresentaram a operação de subtração, utilizando a ideia da soma do primeiro pelo oposto do segundo, para então poder realizar os deslocamentos sobre a reta numérica, caracterizando-se como modelo geométrico. O modelo algébrico para a apresentação da subtração não foi encontrado nos livros analisados.

Com relação à apresentação da operação de multiplicação, a autora não identificou nos livros didáticos, os modelos geométrico e algébrico. Todos os livros analisados utilizaram o modelo aritmético para justificar a multiplicação de números inteiros.

No que diz respeito à análise dos documentos PCN (BRASIL, 1997, 1998) e NCTM (2008), a autora observa que há diversas sugestões de ensino para a compreensão do campo aditivo dos números inteiros relativos. O ensino da multiplicação de números negativos, em ambos os documentos, é sugerido por meio de sequência numérica em que um padrão precisa ser preservado, ou seja, a compreensão de que o resultado da multiplicação de dois números negativos precisa ser positivo, deve acontecer pela via formal, fugindo de exemplos do cotidiano.

Pela revisão e o estudo realizados, Hillesheim (2013) observou que o ensino dos números inteiros relativos encontra dificuldades, principalmente, no que se refere à multiplicação desses objetos e suas regras de sinais. O fato de a adição de números inteiros relativos ser conduzida por meio do modelo aritmético, utilizando-se de situações-problema contábeis, pode trazer prejuízos ao ensino das propriedades multiplicativas desses números.

A autora ainda assevera que, estudar a operação de adição, utilizando-se do modelo aritmético não é suficiente para explicar a multiplicação entre dois números negativos. Para minimizar este problema, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem que o ensino dos números inteiros relativos não deve ser conduzido exclusivamente por exemplos práticos, e que os alunos devem ser levados a fazer generalizações e possam compreender que a regra de sinais para a multiplicação de números inteiros atende as regras da consistência interna da própria matemática.

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

2.5.1 Fundamentos teóricos

A autora apoiou-se na TRRS (DUVAL, 1995), mais especificamente na congruência semântica e nos níveis de compreensão dos números relativos construídos por Coquin-Viennot (1985).

A autora afirma que na atividade matemática, o ato de substituir uma fórmula ou um cálculo por uma outra expressão referencialmente equivalente é essencial. Neste sentido, a substitutividade de expressões é uma propriedade que está ligada à estrutura de todo registro semiótico, ela é uma conduta muito importante e frequente nos procedimentos matemáticos. Ela é uma característica fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento matemático e, é relativamente a esta substitutividade que os fenômenos de congruência e não-congruência semântica são importantes (DUVAL, 2012).

Hillesheim (2013) defende que, ao apresentar a operação da subtração como a operação inversa, estaríamos conduzindo os alunos a efetuarem "manobras meio fantasiosas" para a realização dessa operação, levando-o, muitas vezes, ao questionamento da razão de ser dessa estratégia.

No caso da multiplicação de números inteiros relativos, a dificuldade relacionada com seu ensino, de acordo com a autora, encontra-se na ideia de que a multiplicação, nos naturais, é concebida como uma soma de parcelas iguais. Nos inteiros, a multiplicação de um número positivo por outro positivo, já dominada nos naturais, e a multiplicação de um número positivo por um número negativo pode ser perfeitamente entendida como uma repetição de parcelas. Por exemplo, $(+3) \times (-5)$ pode ser concebido como três deslocamentos de (-5) que resulta em -15. Da mesma forma a multiplicação de dois números positivos, por exemplo, $(+4) \times (+2)$ pode ser entendido como quatro deslocamentos de $(+2)$ que resulta em $+8$.

A autora afirma que esses exemplos se deparam com um obstáculo de natureza epistemológico quando se tenta explicar a multiplicação de dois números negativos. Nesse sentido, Moretti (2012), de acordo com a autora, apresenta o ensino da regra de sinais para o campo multiplicativo, obedecendo ao Teorema de Hankel atendendo a ideia do "princípio de extensão" proposto por Caraça. De acordo com esse princípio, devemos estender a propriedade distributiva dos positivos para o caso dos negativos.

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

A congruência semântica pode ser percebida na multiplicação de números inteiros relativos principalmente quando estes números estão associados ao modelo comercial. De acordo com Duval (1995 apud HILLESHEIM, 2013), o fenômeno da congruência semântica exerce um papel importante no interior de um mesmo registro, mais particularmente, no discurso natural. Nesta perspectiva, o autor afirma que se a formulação de uma questão é congruente às informações dadas no enunciado do problema e se a formulação desses dados é também congruente a uma formulação possível da resposta, esta resposta será mais rápida do que no caso da não congruência (DUVAL, 2012). O autor ainda assevera que a não-congruência semântica se constitui como uma fonte de dificuldades, para os alunos, independentemente do conteúdo matemático.

Hillesheim (2013) apoiou-se também nos níveis de compreensão dos números inteiros relativos, construídos por Coquin-Viennot (1985), a partir dos resultados de 14 questões aplicadas a um grupo de 366 alunos entre 11 a 15 anos (equivalente às quatro últimas séries do ensino fundamental no Brasil). Este autor estabelece uma hierarquia nas concepções que os alunos apresentam a propósito de números inteiros relativos.

Com base nos resultados apresentados, Coquin-Viennot (1985, p. 175-179) identificou quatro (4) níveis de concepções dos alunos investigados.

Nível I – os números inteiros relativos são tratados como naturais, nesta perspectiva, o número é considerado nada mais que uma quantidade ou medida, podendo ser apenas positivo. Percebe-se que somente a relação de ordem começa a ser adquirida. Hillesheim (2013) enfatiza que neste nível, encontra-se como resposta a questão: “Classificar em ordem crescente (utilizando o sinal <): -7, 5, -2, 6” a seguinte ordem “2 < 5 < 6 < 7” utilizando, desse modo, a ordem dos naturais. Já na resposta “-2 < -7 < 5 < 6 pode ser percebido a classificação dos negativos antes dos positivos, embora ainda apareça -2 < -7.

Nível II – os alunos utilizam os naturais sempre que é possível e permitido para obter uma boa resposta. Os números positivos e negativos são utilizados separadamente, fazendo uma síntese em seguida, e os problemas multiplicativos são apenas delineados.

Nível III – os problemas aditivos são resolvidos nos números inteiros relativos e a relação de ordem é estabelecida. A reta numérica é unificada, no entanto, os problemas multiplicativos não são ainda corretamente resolvidos.

A autora observa que os problemas de ordenação numérica, são corretamente respondidos. Assim, como os de ordenação no campo aditivo requeridos pela questão: “x e y são dois números tais que x > y. Escrever a relação de ordem para x – 2 e y – 3”.

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Contudo, os problemas multiplicativos de ordenação ainda não foram alcançados como pode ser perceber nas respostas à questão: “x e y são dois números naturais tais que x > y. Escrever a relação de ordem para -3x e -3y”. Respostas: -3x > -3y; -3 > -3; -3 = -3 e também -3x < -3y. Os alunos se prendem ao fato de que como x > y consequentemente a relação de ordem mais provável deveser -3x > -3y, não levando em consideração que há uma multiplicação por um número negativo, o que acarreta numa inversão da relação.

Nível IV – A resolução de problemas aditivos é efetivamente realizada no conjunto dos números inteiros relativos, mesmo sendo problemas que possuem uma solução diferente de um número natural. Neste nível, os problemas multiplicativos são assimilados.

A autora assevera que na análise da passagem de um nível a outro, Coquin-Viennot (1985) aponta que o nível IV é atingido por poucos alunos do que o nível III, ou seja, embora esses alunos dominem muito bem os problemas aditivos, eles encontram dificuldades na resolução dos problemas multiplicativos. De acordo com Coquin-Viennot (1985, p. 1)., “[...] é justamente esse bom domínio aditivo, ou mais ainda seu fundamento sobre o modelo concreto “[...] que faz obstáculo à instalação do modelo multiplicativo”.

2.5.2 Aspectos metodológicos

Do ponto de vista **da metodologia**, a pesquisa foi qualificada de qualitativa pela autora, pois foi realizada em um ambiente natural como fonte direta de dados. Os dados coletados foram coletados a partir de uma sequência didática aplicada à uma turma de alunos de 7º ano, e envolve números inteiros relativos e a regra de sinais pelo princípio de extensão, em que a autora fez a descrição do processo de ensino, bem como dos resultados apresentados. Além disso, a atenção da pesquisadora esteve voltada especialmente para as reações apresentadas pelos alunos durante a sequência de ensino, com vistas a apontar perspectivas futuras de ensino para a regra de sinais, pautadas nas restrições e avanços apresentados durante o processo de ensino. As restrições apresentadas durante a sequência de ensino e sua repercussão na formação do conceito pelos alunos foram analisadas criteriosamente pela autora.

A fase experimental foi realizada em uma turma de 7º ano de uma escola pública municipal, que atende alunos de todas as séries do ensino fundamental no período matutino e vespertino dos bairros da periferia do município de São José no estado de

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Santa Catarina, que atendem também as séries finais do ensino fundamental e o ensino médio na modalidade de Educação de Jovens e Adultos (EJA).

A autora construiu uma sequência de ensino com intuito de introduzir os números inteiros relativos por meio de atividades que atendem ao "princípio de extensão" (CARAÇA, 1963). A operação de adição foi apresentada como deslocamentos na reta numérica; a multiplicação e a regra de sinais como a única que preserva a distributividade à esquerda e à direita; e, a subtração por meio da simplificação das expressões, utilizando a regra de sinais da multiplicação, tornando-a uma adição algébrica, podendo, desse modo, ser resolvida por deslocamentos na reta numérica.

A autora buscou introduzir os números negativos como uma ampliação dos naturais, opondo-se ao modelo comercial, no sentido de associar o número negativo a uma perda e o número positivo a um ganho.

2.5.3 Apontamentos sobre os resultados da pesquisa

A autora evidencia que o ensino da adição de números relativos, conduzido por meio de deslocamentos sobre a reta numérica, teria proporcionado aos alunos uma aprendizagem desprendida de regras pré-estabelecidas. Assim, os alunos por meio das movimentações, realizadas na reta numérica, foram capazes de sinalizar a formação de generalizações a respeito das regras de sinais para a adição de números inteiros.

A autora assevera que, como o ensino da adição foi conduzido, levando em consideração o "princípiode extensão", opondo-se ao modelo comercial, a maioria dos alunos não associou a ideia de ganho a um número positivo e a ideia de uma perda a um número negativo. Esse fato teria contribuído para que os alunos aceitassem que o produto de dois números negativos precisa ser positivo para atender as condições internas da própria matemática.

Mas, a autora aponta que, apesar de a sequência didática ter sido planejada para o aluno não associar o número positivo a um ganho e o número negativo a uma perda, essa concepção trazida de experiências anteriores não foi abalada. Nas justificativas apresentadas por alguns alunos, a autora percebeu que o modelo comercial que serviu para explicar as propriedades aditivas e até mesmo algumas propriedades multiplicativas, permaneceu um problema para explicar a multiplicação entre dois números negativos.

A análise realizada das respostas obtidas dos testes realizados, evidencia, de acordo com a autora, que as atividades que exigiam uma conversão de representações de

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

registros nem sempre foram resolvidos com sucesso, porque as situações de ensino, em que a congruência semântica se destacou da equivalência referencial (DUVAL, 2012), contribuíram para um menor número de acertos em relação aos casos em que a congruência semântica e a equivalência referencial conduziam aos mesmos resultados.

A autora chama atenção sobre a importância de o professor tenha um olhar atento sobre a formulação de questões, pois, propor diferentes formulações para um mesmo tipo de problema pode ser um caminho que ajude a diminuir as dificuldades encontradas pelos alunos, quando não há congruência semântica entre a situação e a expressão matemática correspondente. A utilização de vários registros de representação semiótica e a atividade de conversão, também, se mostram importantes neste processo, no sentido de conduzir o aluno à apropriação do objeto matemático em jogo.

Nessa direção, a variedade de registros utilizados para o ensino das operações de adição, subtração e multiplicação com números inteiros relativos, teria contribuído para que o aluno tenha uma ideia global a respeito do objeto matemático, permitindo, desse modo, que ele não confunda o objeto matemático com suas diferentes representações.

A sequência didática proposta por Hillesheim (2013) sobre a regra de sinais da multiplicação foiapresentada por meio de uma sequência de produtos, como a sugerida pelo Caderno 9 da Coleção NCTM e, de acordo com a demonstração sugerida por Moretti (2012), ambas utilizando argumentos aritméticos. A autora observou que, nas reações dos alunos, a justificativa apresentada pelo Caderno 9 obteve uma melhor receptividade, em razão de estar associada, de certo modo, ao fato de os conhecimentos a serem mobilizados estarem ao alcance da maior parte dos alunos. Essa mobilização aconteceu quando a autora apresentou, primeiramente, a multiplicação de dois números positivos e de um número positivo por um negativo por intermédio de deslocamentos sobre reta.

Para completar a sequência, a autora fez uma análise dos produtos que foram sugerindo e, nesse momento, os alunos perceberam que, para atender as regras inerentes à matemática, o - × - precisa ser +.

A autora afirma que as simulações de multiplicação, utilizando as regras - × + = - e - ×- = +, apresentadas por Moretti (2012), teriam reforçado a necessidade de que a única regra que atende as propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição é a regra usual. Apesar do seu caráter teórico estar à frente da capacidade de abstração dos alunos, culminando na sua baixa aceitação, os alunos também puderam constatar que a regra usual precisa ser mantida a fim de atender as regras específicas que fundamentam a matemática.

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Quanto à sequência de ensino da subtração, a autora percebeu que, apesar de os alunos já dominarem melhor as operações de adição e multiplicação, a subtração nos números inteiros relativos provocou dificuldades provavelmente relacionadas à ação de tirar utilizada no caso de números inteiros positivos.

Na análise dos testes, orientados pelas categorias de análise, ancoradas na hierarquia dos níveis estabelecidos por Coquin-Viennot (1985), a autora identificou os níveis de compreensão em que os alunos se encontravam no final da aplicação da sequência didática. A autora observa que o nível I teria sido ultrapassado pela maioria dos alunos, pois as respostas apresentadas nos testes, principalmente no teste da adição e algumas questões do teste da subtração, mostraram que os números inteiros relativos não são mais tratados como se fossem números inteiros positivos.

Afirma que a operação de adição sendo apresentada como deslocamentos sobre a reta numérica teria contribuído para que os alunos ultrapassassem o nível II. Assim, os números inteiros negativos não foram tratados separadamente dos positivos, os alunos teriam percebido que o conjunto dos números inteiros é uma união entre o zero, os positivos e os negativos.

De acordo com a autora, um número expressivo de alunos da turma, estaria, em termos de concepção dos números inteiros relativos, nos níveis III e IV, mas que alguns, ainda, estariam em processo de transição. Com relação ao nível III, a autora observa que a reta numérica foi unificada e os problemas aditivos são resolvidos no conjunto dos números inteiros. No entanto, os problemas que envolvem a subtração não foram alcançados pelos alunos, pois não conseguiram se libertar da concepção de subtração atrelada a ideia de tirar, concebida nos naturais, e teriam ampliado essa concepção no conjunto dos números inteiros relativos em que a subtração significa trabalhar com operadores negativos que operam transformação de posição.

A autora ainda assevera que o nível IV foi atingido por um pequeno grupo de alunos, provavelmente, devido ao fato deles assimilaram os problemas multiplicativos, dominando completamente as operações de adição, subtração e multiplicação no conjunto dos números inteiros relativos. Para a autora, esse resultado indicaria que os demais alunos ainda se encontrariam em processo de transição.

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

2.6. Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração (Célia Finck Brandt, 2005)

O estudo descreve momentos de investigação da compreensão do sistema de numeração decimal de origem indo-arábica (SND) por crianças de escolas estaduais dos estados do Paraná e Santa Catarina**.** O objetivo geral da pesquisa é estudar as formas de organizar e propor, no processo de ensino, situações que permitam aos alunos compreender o SND enquanto forma de comunicação e de registro da medida de um conjunto, expressa por um número, e atribuir sentido e significação aos registros de representação do número: escrita e numeral arábico que veiculam a estrutura do SND.

Para o enfrentamento da questão acima procurou-se atingir os seguintes objetivos **específicos**:

- Analisar os padrões de organização da palavra e do numeral arábico que constituem registros de representação do número;

- Investigar a evolução do sentido atribuído ao número e dos registros de representação do número, para analisar sua influência na aprendizagem no plano pedagógico;

- Investigar e propor situações de ensino que proporcionam aos alunos condições favoráveis para atribuir sentido e significação aos registros do número.

A autora destaca as especificidades de alguns sistemas de numeração, criados e inventados, para evidenciar como a estrutura específica de cada um se reflete na dificuldade ou facilidade de realizar operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) com utilização de algoritmos, ábacos, dedos, fichas etc. Essa estrutura permite evidenciar os aspectos linguísticos no emprego da numeração e a distinção léxico/sintaxe, a ser levada em consideração na análise das condutas numéricas por sujeitos sem problemas cerebrais, visto que esta modelização leva em conta tanto o processo como os aspectos linguísticos.

A autora ainda assevera que a importância da análise da aprendizagem da estrutura do SND para expressar a medida de um conjunto, seja da forma escrita, verbal ou com utilização de dígitos, deve-se ao fato de que uma aprendizagem decorada de uma corrente numérica verbal, além de exigir um demasiado esforço, seria limitada para a enumeração de uma coleção qualquer de cardinal desconhecido.

Apoiando-se em Fayol (1996), ela observa que muitos estudos e pesquisas foram desenvolvidos sobre a aprendizagem da cadeia numérica verbal, mostrando que existem

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
etapas pelas quais as crianças passam para ir da enumeração decorada para a associação dos números com a cardinalidade da coleção. Estes estudos mostram, também, que existem etapas pelas quais as crianças passam para fazer o registro da numerosidade das coleções.

Em relação à cadeia numérica verbal, a autora ainda observa que existe um primeiro momento de recitação de cor sem que os números possuam uma individualidade, encontrando-se inseridos na sequência. Depois, os termos numéricos passam a ser compreendidos com uma certa significação cardinal e ordinal, permitindo alguns procedimentos de adição (contar tudo e contar em sequência). Começa a se manifestar a capacidade de contar até n, passando para a capacidade de contar a partir de n. A cadeia terminal se completa quando os próprios números que a constituem, podem ser tratados como entidades distintas. Duas novas capacidades se manifestam: contar n a partir de x e contar de x a y.

No seu estudo, Brandt mostra que os aspectos supracitados dizem respeito à abordagem da cadeia numérica e ao uso que o sujeito passa a fazer dela, além de o sujeito passar por etapas para atribuir significação à organização e às regras de formação das expressões aritméticas verbais e escritas baseadas na estrutura do SND.

Com relação ao sentido cardinal das palavras-números, Fuson e Kwon (1991, apud BRANDT, 2005) apontam que em certos sistemas, esse sentido se impõe para certos números, pelo fato de alguns sistemas não oferecem uma ajuda para o sentido cardinal da quantidade representada. Este argumento foi fundamentado nos resultados de uma pesquisa conduzida pelos autores e que tinha por objetivo identificar de que forma o sentido cardinal é atribuído aos números expressos em palavras, apontando a forma por meio da qual as crianças fazem a conexão entre o sentido da contagem e o sentido cardinal das palavras que expressam os números. Apontam que a sequência numérica é repetida sem sentido cardinal, e depois da identificação desse sentido, as crianças são capazes de realizar adições ou subtrações com números de um algarismo.

A autora assevera que esses itinerários identificados são importantes no sentido de permitirem compreender as condutas adotadas pelas crianças para trabalhar com quantidades numéricas, a sua compreensão da estrutura do SND, e, a identificação dessa estrutura na palavra que designa o número e no número expresso por algarismos e a ligação entre as duas formas de expressar o número que representa a quantidade. São importantes, também, no sentido de que possibilitam identificar se os dígitos da

ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

representação são interpretados como unidades isoladas ou como agrupamentos, de acordo com a posição que ocupam na representação do número através de algarismos.

Brandt (2005) observa que a aprendizagem da estrutura do SND está profundamente relacionada com a compreensão do papel das convenções e das invenções na construção do conhecimento, pois a estrutura do SND é uma convenção, de natureza arbitrária, cuja aprendizagem exige tanto a transmissão de aspectos convencionais, que é antes de tudo social, como a construção pelo próprio sujeito das operações inerentes a esta estrutura.

2.6.1 Fundamentos teórico-metodológicos

As pesquisas que se voltaram para a organização das palavras que expressam os números e da escrita arábica subsidiarão a elaboração das tarefas da situação de ensino no intuito de enfrentar o fenômeno da congruência sobre a aprendizagem e as representações semióticas, principalmente a relação noeses/semioses. Brandt (2005) assevera que elas subsidiarão também o fenômeno da produção, conversão e do tratamento (DUVAL, 1995).

A autora buscou realizar um trabalho inovador para a proposta de uma situação de ensino composta por diversas tarefas voltadas para a aprendizagem do SND pelas crianças. Ainda afirma que a distinção entre um objeto matemático e a representação que se faz dele é essencial para a conceitualização. Para o estudo do SND, faz-se necessário distinguir o objeto a ser conceitualizado, isto é, a estrutura do sistema de numeração decimal, dos registros de representação semiótica utilizados para representar essa estrutura, isto é, as palavras e os numerais arábicos.

Em relação à conceitualização da estrutura do sistema de numeração, a autor observa que podemos comparar alguns sistemas inventados de modo a evidenciar os aspectos dessa estrutura, principalmente a base e valor posicional.

Brandt (2005, p.75) apresenta o exemplo do

> sistema de numeração inventado pelos egípcios que, ao apresentar um símbolo para cada grupo de 10, possui uma estrutura que envolve uma base, mas não o valor posicional. Esta estrutura abre possibilidades para mais de uma representação de um mesmo número num mesmo registro de representação.

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Para a autora, "propor atividades que envolvem esse sistema pode se revelar de extrema importância e significação enquanto conceitualização da estrutura do sistema de numeração decimal" (p. 75).

Ainda assevera que a utilização de um outro registro de representação exigirá a assimilação, pelo sujeito, de uma nova regra específica do novo sistema. No caso do sistema de numeração decimal posicional de origem indo-arábica, os mesmos agrupamentos serão exigidos e, no plano das representações escritas, deve-se levar em consideração as novas regras específicas desse sistema que envolve o conhecimento de que cada grupo de dez formado pode ser representado por um dos dez símbolos estabelecidos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, e a identificação do grupo de dez formado (dezenas, centenas, ...) será feita pela posição do símbolo na representação. Essas mesmas regras se aplicam quando a operação cognitiva de tratamento será realizada.

No que diz respeito às tarefas organizadas para comporem a situação de ensino, Brandt (2005) escolheu tarefas que privilegiam o tratamento ao mesmo tempo em que procuram explicitar a estrutura do SND num tipo de registro de representação e as que estão voltadas para privilegiar a conversão. Todas essas tarefas requisitam ações que visam a identificação do conteúdo da representação e a sua referência ao objeto matemático representado. Nas provas que compuseram o instrumento de coleta das informações qualitativas, a autora apresentou questões que envolvem os dois tipos de operações para identificar a compreensão da criança em relação ao conteúdo da representação e do objeto matemático.

A análise dos resultados encontrados e a elaboração e organização das tarefas da situação de ensino e das provas do instrumento de coletadas informações qualitativas, levaram em consideração, de acordo com Brandt (2005), a natureza dos registros de representação de quantidades: a língua natural com suas características próprias oriundas das regras de organização das palavras (prefixos e sufixos e as operações que os unem) de natureza plurifuncional e os algarismos arábicos, também com suas regras de formação dos numerais nos quais os dígitos, que de acordo com sua posição no numeral, expressam uma potência de dez, portanto uma operação de multiplicação e a operação de adição que os ligam entre si de acordo com o valor relativo, de natureza monofuniconais.

No instrumento de coleta das informações qualitativas, a autora procurou identificar de que forma a diferença entre os tipos de registros permitiria reconhecer se a criança tinha domínio do conteúdo do registrode representação e do objeto matemático em questão. Além disso, utilizou a conversão de representações de registros como

ReBECEM | Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
instrumento de análise apoiando-se nas variáveis cognitivas próprias de cada registro de representação (a palavra e a escrita arábica). Nesta perspectiva, a autor evidencia as unidades que são cognitivamente pertinentes nos dois registros de representação do número: a palavra. Trata-se do numeral arábico para que se possa, nas tarefas propostas na situação de ensino, propor variações cognitivas para provocar a compreensão do objeto matemático. As unidades cognitivamente pertinentes destes dois tipos de registro de representação devem ser estudadas de forma separada, pois as regras de formação da palavra e do numeral arábico que expressam o número são diferentes apesar de ambas compreenderem a estrutura do SND.

No que diz respeito à categorização dos dados e interpretação dos resultados, Brandt (2005) utilizou os seguintes critérios:

1. observação do sucesso dos alunos numa sequência de itens;
2. organização das tarefas das situações de ensino de modo a considerar osdois sentidos da conversão;
3. organização das tarefas das situações de ensino de modo a considerarcasos mais ou menos complexos de não congruência;
4. organização das tarefas das situações de ensino de modo a considerar tarefas de produção e de reconhecimento.

Para cada uma das provas do instrumento de coleta das informações qualitativas foram identificados os diferentes tipos de respostas dadas, argumentos ou justificativas apresentadas, estratégias utilizadas ou heurísticas das quais foram lançado mão. Foi possível, desta forma, a autora criar condições para verificar o sucesso do aluno ao resolver a questão proposta ou se ele se aproximou da compreensão do objeto, mostrando-se inconsistente do ponto de vista lógico. Após essa identificação foi possível interpretá-los segundo as seguintes categorias:

Em relação ao objeto: a estrutura do SND: identificou-se a estrutura do SND na palavra: sufixos, prefixos e caráteroperatório que os ligam; a estrutura do SND no numeral arábico: valor relativo doalgarismo no numeral; não identificação da estrutura do SND na palavra (lexicalização direta) e da estrutura do SND no numeral arábico numaatividade de reconhecimento.

Em relação ao conteúdo da representação: identificação do padrão de organização da escrita arábica $abc...x \square a \times 10^{n} + b \times 10^{n-1} + c \times 10^{n-2} + x \times 10^{0}$, e do padrão de organização da palavra (deformações das palavras criadas para os números de 1 a 9, presentes em sufixos eprefixos, deformações da palavra dez, presentes em sufixos

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
ou prefixos,e a composição dessas através de adições e multiplicações); não identificação de agrupamentos e agrupamentos de agrupamentosnos prefixos e sufixos das palavras, e do valor relativo das unidades na escrita arábica.

Em relação da operação de conversão: não reconhecimento das unidades cognitivamente pertinentes nas duas representações de acordo com o sentido da congruência (plano dos objetos → representação arábica, representação arábica → plano dos objetos, plano dos objetos → escrita, escrita → plano dos objetos, representação arábica → escrita, escrita → representação arábica).

Com base na interpretação dos resultados, Brandt (2005) organizou e elaborou as tarefas das situações de ensino relacionadas com casos mais ou menos complexos de não congruência, com os dois sentidos da conversão e tarefas de produção e reconhecimento.

2.5.2 Apontamentos sobre os resultados da pesquisa

Brandt (2005) afirma que o estudo foi desenvolvido a partir de uma abordagem voltada para o trânsito entre as duas formas de registros de representação do número, a escrita e o numeral arábico, visto que eles explicitam de modos diferenciados a estrutura do SND, levando em conta os resultados de pesquisas que indicam causas de dificuldades de compreensão dessa estrutura. As proposições de Duval (1995), relativas à relação semioses/noeses e seu papel na construção de conhecimentos, permitiram melhor adentrar na complexidade do processo de compreensão do SND. Na perspectiva adotada, a elaboração de tarefas para a situação de ensino implicou compreendervários instrumentos nocionais, relações e inferências pertinentes ao sistema conceitual.

A autora observa que as várias representações de natureza semiótica, tais como a língua natural para a descrição de um enunciado ou um texto, assim como figuras (imagens, esquemas, quadros, gráficos, fórmulas) são importantes pela diversidade que é inerente ao funcionamento do pensamento e ao desenvolvimento de conhecimentos. Esse desenvolvimento só se torna possível com a diferenciação progressiva de outros registros de representação diferentes da língua natural.

Um dos resultados é que as crianças utilizam os nomes de números e a escrita arábica para denominar objetos de uma coleção ou para se referir à medida de um conjunto (peso, volume, velocidade etc.), mas não reconhecem, nesses registros de

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
representação, a estrutura do SND, e isso significa uma denominação de objeto singulares idênticos.

Nesse sentido, a autora afirma que se perde a valiosa síntese inventada para um sistema de numeração, ao não reconhecer este objeto nos registros e configura-se um retrocesso em se tratando de representação de quantidades, já apontado pela história (e ainda hojeexistente em tribos primitivas), como por exemplo, a atribuição de partes do corpo da denominação dos números já percebidos em seu sentido cardinal e ordinal.

A autora salienta que as relações entre a representação e o objeto representado é compreendida emseu modo de produção, visto que as diferentes representações estão ligadas à sua utilização e desempenham papéis diferentes no desenvolvimento dos processos cognitivos. No caso do SND foi possível a utilização da língua materna e da escrita arábica e constituem sistemas que dão especificidades significantes representacionais diferentes, independente do objeto representado. É por esta razão que os alunos encontraram dificuldades em relação à aprendizagem do SND.

A autora esclarece que o estudo realizado traz derivações pedagógicas, como as seguintes: a análise funcional das atividades, das tarefas e das produções cognitivas nos registros derepresentação, aponta para o que deve ser levado em consideração pelo professor, a cada momento de compreensão do aprendiz e quais deverão e poderão ser, então, objeto de intervenção específica e como esta deve ser caracterizado.

Ainda apontou evidências de que as aprendizagens dos conteúdos escolares se fazem em uma intervenção do ensino apoiada em estruturações processuais cognitivas que lhe são subjacentes, decorrentes também do desenvolvimento cognitivo.

Parte II

2.7 O uso de vários registros na resolução de inequações: Uma abordagem funcional gráfica (Vera Helena Giusti de Souza, 2007)

O objetivo da pesquisa de Souza (2007) é estudar problemas ligados ao ensino e à aprendizagem de inequações com uma incógnita real. Focou-se em uma abordagem que não fosse estritamente algébrica para oferecer resultados significativos no ensino e na aprendizagem da resolução de inequações com uma incógnita, como por exemplo uma combinação envolvendo gráficos, expressões algébricas e a língua natural.

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Para efetivar a pesquisa proposta, sobre a resolução de inequações, a autora formulou três questões de pesquisa: Uma sequência didática envolvendo o tratamento e a conversão de representações de registros pode fornecer aos alunos condições de inter-relacionarem os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos envolvidos na resolução de inequações com uma incógnita real? O tratamento e a conversão de representações de registros (gráfico, algébrico e da língua natural) pode proporcionar aos alunos uma apreensão significativa de que é preciso trabalhar sempre com inequações equivalentes? A abordagem envolvendo o tratamento e a conversão de representações de registros, no caso da resolução de equações e/ou inequações com uma incógnita real, pode desencadear a discussão global sobre esta resolução?

Formulou também duas hipóteses baseadas nas leituras feitas, na experiência individual em sala de aula e na troca de informações com alguns professores de Matemática da rede pública estadual. Estas hipóteses também foram baseadas na experiência em sala de aula da autora, embora só no Ensino Superior, porém com alunos de primeiro ano, que podem ser considerados praticamente como da Educação Básica. Para a autora, a abordagem funcional gráfica genérica da resolução de inequações pode desencadear a discussão teórico-formal sobre o assunto, uma vez que a visualização rápida e variada fornecida pelos gráficos facilita a observação de aspectos que a resolução algébrica sozinha não faz. Por exemplo, para comparar frases algébricas equivalentes ou não, como ($\frac{5}{x} < \frac{5}{2}$ e 2<x) ou ($x^2 \leq 25 \; e \; x \leq 5$). A segunda hipótese é: a abordagem funcional gráfica genérica da resolução de inequações, junto com a algébrica, pode contribuir, a longo prazo, para o entendimento global da resolução de equações e inequações com uma incógnita real.

2.7.1 Referencial teórico e metodologia de pesquisa

A partir dessa abordagem "funcional gráfica genérica"[5], a autora construiu um ambiente teórico formado pela conjunção da TRRS (DUVAL, 1995, 2000), da

[5] Funcional porque interpreta uma inequação do tipo a<b, com incógnita x, como "tenho uma função f que satisfaz f(x)=y_1 =a e uma função g que satisfaz g(x)=y_2=b e quero achar os valores de x que satisfazem f(x)<g(x)" (isto quer dizer que temos aqui uma dicotomia, porque estamos falando da variável x das funções que nomeamos f e g e, ao mesmo tempo, da incógnita x da inequação). Gráfica porque envolve os gráficos de funções reais. Genérica porque abrange as funções contínuas, cujo domínio é uma reunião finita de intervalos abertos, sem ter que se restringir às funções afins e/ou quadráticas (Souza, 2007, p. 4).

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
visualização (DUVAL, 1999) e dos aspectos formais, algorítmicos e intuitivos que estão sempre presentes numa atividade matemática, conforme Fischbein (1993). A TRRS justifica a necessidade do trabalho, incentivado e promovido pelo professor, com pelo menos dois sistemas de representação diferentes. A visualização, como definida por Duval, vai ser imprescindível num trabalho com os gráficos e as inequações, numa abordagem funcional gráfica. Os aspectos propostos por Fischbein, que devem ser observados na atividade matemática de um sujeito, servem como parâmetro para avaliar se houve aprendizagem, pois, segundo este pesquisador, ela só ocorre se o sujeito é capaz de inter-relacionar e interagir os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos do assunto em estudo.

Fischbein (1993) apresenta três componentes básicas para analisar o comportamento matemático de um estudante frente a situações matemática: a formal, a algorítmica e a intuitiva.

A componente formal diz respeito a axiomas, definições, teoremas e provas; a algorítmica, às técnicas de resolução e estratégias do tipo padrão; a intuitiva, ao grau de subjetividade, de aceitação direta de uma noção, de um teorema ou de uma solução.

Segundo o autor, às vezes essas três componentes convergem, mas usualmente, no processo de aprendizagem ou no entendimento e resolução de um problema, interações conflitantes podem aparecer. O pesquisador afirma que as interações e os conflitos entre as componentes formais, algorítmicas e intuitivas de uma atividade matemática são muito complexos e usualmente não facilmente identificados e entendidos.

Souza (2007) assevera que análises teóricas, observações atentas e pesquisa experimental devem colaborar para revelar as múltiplas fontes de atitudes erradas numa atividade matemática e isto implica que a íntima colaboração entre experiências psicológicas e didáticas represente uma condição básica para o progresso da Educação Matemática.

A autora observa que Duval (2011b) dá alguns dos resultados pelos quais é possível detectar algumas dificuldades que os alunos da Escola Básica têm, quando lidam com os gráficos cartesianos de retas: a confusão entre a inclinação e a altura, os erros constantes ao relacionar a inclinação número algébrico com a direção da representação gráfica e, mais importante ainda, a incapacidade de fazer a passagem da representação de uma reta no registro gráfico para sua representação no registro algébrico. O autor mostra que esta dificuldade está no desconhecimento das regras de correspondência semiótica entre os dois registros, o gráfico e o algébrico, principalmente no caso da conversão de

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
uma representação gráfica para uma representação algébrica, pois esta não pode ser feita ponto a ponto. O autor ainda apresenta três tratamentos possíveis para as representações gráficas, com suas variáveis visuais e unidades simbólicas significativas. São eles: o tratamento pontual, o tratamento de extensão e o tratamento de interpretação.

O tratamento pontual, pelo qual as representações gráficas são usualmente introduzidas, serve para traçar o gráfico de uma função polinomial do primeiro ou do segundo graus, ou para ler as coordenadas de algum ponto interessante.

O tratamento de extensão do traçado efetuado, pelo qual é possível realizar interpolações e/ou extrapolações e que é usado para localizar pontos que não são evidenciados pelas escalas do papel utilizado. Da mesma forma que o tratamento pontual, o enfoque fica sobre valores particulares e não considera as variáveis visuais globais da representação, como por exemplo, crescimento/decrescimento da linha do gráfico, tendências nos extremos, imagem.

O tratamento de interpretação global das propriedades figurais, permite observar as modificações no traçado gráfico, quando fazemos alguma modificação na expressão algébrica. Por exemplo, de acordo com Souza (2007), a influência dos parâmetros "inclinação" e "intersecção com o eixo vertical" no traçado do gráfico de uma função do primeiro grau ou ainda dos três parâmetros presentes numa função do segundo grau. Para este tipo de tratamento, é necessária uma análise semiótica dos registros gráfico e algébrico, a fim de conseguir uma análise da congruência entre uma variável do registro gráfico e uma unidade significativa do registro algébrico, coisa que o tratamento pontual e o tratamento de extensão do traçado efetuado não fazem nem tornam possível.

A autora assevera que, para realizar uma análise de congruência, é preciso elencar as unidades significativas (de relação (>, <, = ...), de operação ou de signo (+, -, *, : ...), de variável (x, y ...), de expoente, de coeficiente e de constante) de cada registro de representação e ainda verificar quais as transformações requeridas para a conversão.

As variáveis visuais destacadas são classificadas em gerais e em particulares. As gerais são o tipo de gráfico (linha ou região) e a forma do gráfico (linha reta, linha curva, linha aberta, linha fechada). As variáveis particulares, no caso de uma reta, são o sentido da inclinação (sinal do coeficiente angular), o ângulo com o semi-eixo horizontal positivo (valor do coeficiente angular), a intersecção com o eixo vertical (o coeficiente linear). No caso da parábola na forma desenvolvida, as variáveis visuais particulares são a concavidade (sinal do coeficiente do termo de grau 2), as raízes (intersecções com o eixo horizontal), a intersecção com o eixo vertical (valor do coeficiente do termo de grau zero)

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

e a curvatura (valor do coeficiente do termo de grau 2). Para a parábola na forma canônica, as variáveis visuais particulares são a posição do vértice (coordenadas do vértice), a concavidade (sinal do coeficiente do termo de grau 2) e a curvatura (valor do coeficiente do termo de grau 2). As variáveis visuais tomam valores e a cada um destes corresponde uma unidade significativa no registro algébrico.

No caso das funções polinomiais de primeiro grau, analisando as variáveis, os valores destas e as unidades significativas, Duval (2011b apud SOUZA, 2007) observa que:

a) a conversão de representações do registro gráfico para as representações do registro algébrico não é congruente, pois a inclinação da reta recobre duas unidades significativas, o sinal do coeficiente e o valor comparado com o 1;

b) a conversão de representações do registro algébrico para as representações do gráfico pode ser feita pelo tratamento ponto a ponto, uma vez que só precisamos de dois pontos para traçar uma reta. A conversão contrária, de representações do registro gráfico para representações do registro algébrico, necessita uma visão global e abrangente, não mais centrada em alguns pontos particulares.

c) levando em conta as variáveis visuais, existem 18 representações gráficas visualmente diferentes de uma reta no plano cartesiano e pode-se relacionar a representação gráfica com a algébrica, bem como extrair propriedades geométricas, tais como retas paralelas ou perpendiculares.

Duval (2011b apud SOUZA, 2007) afirma ainda que a construção de gráficos ponto a ponto é tratada de forma intuitiva; a construção de retas a partir da expressão algébrica $y = ax + b$ não considera a articulação entre as variáveis visuais do gráfico e as unidades significativas do registro algébrico; e muitas vezes os dois registros são trabalhados separadamente.

O autor conclui que a leitura e a interpretação de gráficos cartesianos dependem do estudo destes por meio de uma abordagem de interpretação global e não ponto a ponto, porque só a interpretação global permite que seja percebida a articulação entre as variáveis visuais e as propriedades conceituais associadas a estas.

A partir das considerações de Duval (2011a), Souza (2007) adotou como pressuposto de sua pesquisa que são necessários, vários sistemas semióticos de representação, ligados à dualidade linguagem/imagem, para desenvolver o pensamento matemático e que esses sistemas semióticos precisam ser organizados e integrados à arquitetura cognitiva do sujeito, para que ele aprenda matemática.

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Outro constructo importante em que Souza se fundamentou é a visualização, que, do ponto de vista de Duval (1995 apud SOUZA, 2007), diz respeito à percepção visual, que se estende a um repertório de imagens. O indivíduo pode ter acesso direto a um objeto físico, como algo que já foi visto, ou pode ter uma apreensão global de um ou vários objetos simultaneamente. A visualização, para o autor, é completamente diferente, porque é "fabricada", com base num sistema de representação semiótica. A representação semiótica de um objeto mostra relações entre unidades representacionais deste objeto e não mais como ele é no mundo tridimensional ou numa projeção bidimensional. As unidades representacionais podem ser: formas uni ou bidimensionais (para compor uma figura geométrica: segmentos, figuras planas), coordenadas (para esboçar um gráfico cartesiano), palavras (para elaborar uma frase na língua natural).

No diz que respeito à metodologia, a autora optou por utilizar a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1995). A pesquisa foi delineada como uma metodologia de investigação, que não tem um fim em si mesma, ou seja, que não se restringe à elaboração de um relatório para divulgar os resultados observados, seja de forma quantitativa, seja de forma qualitativa.

Para avaliar a viabilidade dessa abordagem, a autora elaborou uma sequência didática que pudesse ser aplicada a uma população de futuros professores de Matemática (formação inicial) e a um grupo de professores atuantes na rede pública estadual (formação continuada), porque acredita que são eles que irão promover mudanças na sala de aula da Educação Básica. Os alunos do primeiro ano foram escolhidos porque estão saindo do Ensino Médio, têm grandes e importantes deficiências no assunto e trazem uma contribuição didática que a autora denominou de "ingênua", pois não estão contaminados pela prática em sala de aula e é um assunto em que estão diretamente interessados, por razões de aprendizagem imediata e individual. Os professores escolhidos, em número pequeno, são os que já participam de um grupo de pesquisa do qual a autora fazia parte e que, além disso, manifestaram interesse na discussão de uma nova abordagem para as inequações.

2.7.2 Apontamentos sobre os resultados e contribuição da Fundamentação Teórica

Apoiando-se em Fischbein (1993), Souza (2007), para promover a aprendizagem da resolução das inequações com uma incógnita real, optou pela utilização de três sistemas de representação, o algébrico, o gráfico e o da língua natural, com os respectivos tratamentos e conversões de representações. Pois, inferiu que, ao "ler" e "interpretar" uma frase algébrica, um sujeito seria capaz de "ler" e "interpretar" um gráfico, desde que soubesse a definição de gráfico (aspecto formal), associada à visualização global (aspectos formais, intuitivos e algorítmicos).

Como a discriminação e o uso de mais de um sistema de representação não era uma prática matemática usual desses sujeitos, em várias ocasiões, ao longo das atividades, a autora observou que eles confundiam o objeto representado com a representação, corroborando Duval (1995, 2000) de que é preciso aprender usando vários sistemas de representação.

Tanto os registros em língua natural, como os registros gráficos, trouxeram conhecimento novo e inesperado para a maioria deles.

A par disto, a autora confirmou também que os alunos não tinham inter-relacionado os aspectos intuitivos, formais e algorítmicos presentes na resolução algébrica de inequações com uma incógnita real. Por esta razão, pareciam sempre utilizar o que Linchevski e Sfard (1991) denominaram de concepções pseudo-estruturais (bastante resistente) e que corroboram a ideia de Duval (2000) de que muitos indivíduos confundem a representação com o objeto representado, se não aprenderem a utilizar pelo menos dois sistemas de representação diferentes, com seus tratamentos e conversões.

A autora assevera que estas dificuldades refletem duas principais características: a falta de hábito de todos estes sujeitos de trabalharem, em Matemática, com os aspectos formais em geral e com os aspectos formais lógicos em particular; e, ao mesmo tempo, o hábito estimulado de utilizarem só os aspectos intuitivos em geral e os aspectos intuitivos numéricos em particular.

Com relação aos aspectos algorítmicos, a autora afirma que os alunos estavam prejudicados, pela razão tão bem descrita por Fischbein (1993).

Estas são, sem dúvida, razões para trabalhar, de acordo com Souza (2007), na direção de mudar a abordagem estritamente algébrica, calcada principalmente nos aspectos algorítmicos e nos intuitivos numéricos, que vem sendo praticada na Educação Básica.

Em razão de todos os problemas levantados, sugere-se uma análise mais aprofundada dos seguintes aspectos: o assunto função, com a visualização dos gráficos incluída; a necessidade de aspectos formais em geral e lógicos em particular, em toda atividade matemática; a dose certa de aspectos intuitivos em geral e numéricos em particular, também em toda a aprendizagem da Matemática.

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Um dos resultados importantes do trabalho de Souza (2007) é a triangulação na concepção, realização e experimentação da sequência didática (produto da engenharia didática) dos achados oriundos da revisão da literatura, a TRRS (DUVAL, 1995, 2000) e os aspectos de Fischbein (1993) para promover a aprendizagem desse assunto. A escolha de uma abordagem funcional gráfica genérica, foi fundamental nos processos de ensino e aprendizagem do objeto matemático inequação.

Souza (2007) evidenciou que os sujeitos pesquisados não tinham o hábito de ler e interpretar frases matemáticas, inibidos que eram e estavam pelas cláusulas do contrato didático (BROUSSEAU, 1986) vigente. Assim, para que ocorra o entendimento estrutural, é preciso modificar esse contrato.

Com relação às contribuições da pesquisa de Souza (2007) para o ensino e a aprendizagem da resolução de inequações com uma incógnita real, constatou a falta de aspectos formais e algorítmicos em praticamente todos os sujeitos pesquisados. Isto parece refletir uma formação destituída desses aspectos e que, portanto, precisa ser modificada. A contribuição da pesquisa de Souza para modificar este quadro vem do fato de ter evidenciado, de várias formas, a importância do Contrato Didático (BROUSSEAU, 1986) vigente no relacionamento do "triângulo" professor, aluno, saber, na Educação Básica. A autora encontrou corroboração nas conclusões de Mariani (2006) sobre as generalizações abusivas dos estudantes pesquisados por ela (do primeiro ano do Ensino Superior), com relação ao conceito de função. Os alunos procuraram validações algébricas e numéricas para resultados obtidos graficamente justificadas por ela com base nas cláusulas do contrato didático pré-estabelecido na Educação Básica, e insistiram na localização de alguns pontos no gráfico, mesmo depois de terem feito interpretações globais (DUVAL, 1999). Como a aprendizagem de função e dos gráficos associados a condições imprescindíveis para o desenvolvimento de uma abordagem funcional gráfica para as inequações, os resultados obtidos por essa pesquisadora reforçam os de Souza (2007). A autora sugere que se estimule em sala de aula, a utilização de vários sistemas de representação, incluindo o gráfico e o da língua natural. E pesquisar possíveis mudanças nas cláusulas do contrato didático preestabelecido.

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

2.8 Os signos peirceanos e os registros de representação semiótica: qual semiótica para a matemática e seu ensino? (Cintia Rosa da Silva, 2013)

Esta pesquisa, de cunho teórico, tratou de uma reflexão sobre as aproximações das teorias de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval (1995) e da Semiótica de Charles Sanders Peirce.

Na tese de Silva (2013), visa-se analisar os signos peirceanos e os registros de representação e propõe um quadro semiótico para a matemática e seu ensino. De forma mais específica, a autora visou tecer reflexões sobre a possível relação entre a TRRS e a Semiótica Peirceana, tentou também identificar o que realmente Duval emprestou da Semiotica de Peirce para desenvolver a TRRS. A construção realizada tomou como fundamento matemático a Geometria Analítica no espaço, mais especificamente, plano, reta, vetor e ponto.

Para a autor,

> A semiótica de Peirce procura descrever e classificar todos os signos admissíveis e propõe analisar e descrever, fundamentalmente, a representação dos objetos, dos processos e dos fenômenos, por intermédio de classes organizadas e categorias. A teoria baseia-se na relação triádica do signo como um processo essencial do crescimento onipresente e dos processos dialéticos. (SILVA, 2013, p.14)

Peirce (2003, apud SILVA, 2013, p.14) argumenta que "um signo, ou representâmen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém". Além disso,

> O representâmen provoca na mente de alguém um segundo signo, mais desenvolvido, que é equivalente a si próprio, que é denominado de interpretante. Entretanto, ambos, representâmen e interpretante, provocam um terceiro elemento por igualdade de condições, intitulado de objeto, que consiste em uma relação triádica envolvendo signo, objeto e interpretante. O signo é sustentado por um representâmen que, por sua vez, pode funcionar como um signo, enviando algo a um interpretante. O signo, por meio do interpretante, remete-se por algum motivo a um objeto. (SILVA, 2013, p.14)

Peirce (apud SILVA, 2013) utilizou dez tricotomias e 66 classes de signos para apreensão e categorização dos tipos de signos. Ainda sustenta que

> A primeira tricotomia é referente ao modo de apreensão, apresentação e à própria natureza do signo. O autor classifica os signos, de acordo com suas características, o signo primeiro em si mesmo, isto é, do representâmen. Dentro dessa possibilidade de relação do signo com ele mesmo, Peirce apresenta uma classificação de três espécies de signos: qualissigno, sinsigno e legissigno. A segunda tricotomia que trata da relação do signo com seu objeto é triádica, seguindo os moldes da relação signo com signo, que se divide em três espécies:

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

> ícone, índice e símbolo. Entretanto, a terceira tricotomia ressalta que a relação entre signo e interpretante é uma relação que representa uma verdadeira terceiridade, estabelecendo também uma tricotomia: rema, dicente e argumento. (SILVA, 2013, p.15)

Para analizar a atividade matemática e os processos de aprendizagem, Duval (1995) caracterizou os signos e as representações semióticas, identificando três definições de signo, conforme três autores: Augustin, Peirce e Piaget; que ele julgou insuficientes, pois não diferenciam representante de representado, além de não tratarem das estruturas, mas caracterizam os signos somente pelas funções. O que importa, para o autor,

> são as transformações possíveis e não as relações fundamentais explicitadas nas distintas teorias semióticas; e afirma ainda que nenhuma teoria semiótica cobre a diversidade e a complexidade dos fenômenos semióticos, porque a função primordial dos signos e das representações em matemática não são comunicação nem tão pouco a evocação dos objetos ausentes, mas, sim, o tratamento da informação, as transformações de uma representação em outra, que produzem novos conhecimentos. (SILVA, 2013, p.16)

Para Silva (2013, p.16), o autor enfatiza que a semiótica, como ciência dos signos, sofre limitações no que diz respeito aos signos que “tratam da lógica e da interpretação adaptativa dos fenômenos observados por Peirce, da linguística por Saussure, e dos fenômenos de codificação e transmissão da informação por Jakobson, entre outros”.

Para alcançar seus objetivos, Silva (2013) realizou, por meio de uma pesquisa bibliográfica, uma análise das analogias entre as duas teorias.

2.8.1 Análise da teoria de registro de representação semiótica por meio da semiótica peirceana

Silva (2013) assevera que ambas as teorias tratam da cognição, a primeira, é responsável por explicar os processos de ensino e de aprendizagem em matemática, e a segunda, é responsável por explicar o método utilizado em toda e qualquer ciência.

Embora Duval (1995) mencione o termo objeto matemático em sua teoria, sua definição não parece ter sido dada de forma explicita. Tendo em vista esta observação, Silva (2013) sugere que os objetos matemáticos são os conceitos trabalhados em matemática, uma vez que o autor defende que a compreensão em matemática implica a capacidade de transitar entre registros de representação semiótica sem confundir um objeto e sua representação. A autora inferiu, portanto, que o “objeto descrito na TRRS é análogo ao objeto dinâmico descrito por Peirce na teoria semiótica” (p.102), já que “o objeto imediato (dentro do signo, no próprio signo) diz respeito ao modo como o objeto

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

dinâmico (aquilo que o signo substitui) está representado no signo”. (SANTAELLA, 2003, p. 59, apud SILVA, 2013, p. 102). Desse modo, observa-se que

> o objeto imediato, conceito encontrado na semiótica peirceana, também está presente na TRRS, pois está internamente nas representações semióticas, na formação de representação identificável, no tratamento e na conversão de representações, uma vez que o objeto dinâmico é semelhante ao objeto apresentado por Duval e as representações semióticas são semelhantes aos signos. Em Peirce, o objeto possui um dinamismo, ele não é fixo, por sua vez, na TRRS o objeto é somente o conceito matemático, ou seja, possui um único significado. (SILVA, 2013, p.102-103)

Ao tratar da distinção epistemológica fundamental e do primeiro esquema de análise do conhecimento presente em sua teoria, Duval (2011a, p. 16, apud SILVA, 2013) diz que “o primeiro esquema de análise do conhecimento se desenvolveu com base na oposição epistemológica entre a representação de um objeto e o objeto representado” (Figura 3). Diante desta afirmação, Silva (2013) sugere que os termos, representação de um objeto e objeto representado, são, respectivamente, objeto imediato e objeto dinâmico, visto que a essência da representação do objeto está presente no objeto representado. Sugere também que, a representação do objeto pode ser a representação semiótica e o objeto representado é o objeto matemático. Todavia, Peirce trata dos objetos do signo e, em contraste com ele, Duval trata das representações semióticas do objeto.

Silva (2013) inferiu, portanto, que as representações semióticas são signos, visto que para Duval (2011a, p. 23, apud SILVA, 2013, p.104), “os signos são as representações porque eles não devem jamais ser confundidos com os objetos aos quais eles se referem”. Entretanto, o autor declara que “os signos são radicalmente diferentes das representações em sua relação com os próprios objetos que não é uma relação de causalidade, mas, uma relação de referência” (DUVAL, 2011a, p. 23, apud SILVA, 2013, p.104).

Na TRRS, o autor afirma que

> os estudantes de matemática apreendem os objetos matemáticos somente por meio de RRS, contudo, na teoria semiótica, a autora observa que os indivíduos pensam apenas por meio de signos, resultando em outra semelhança entre as teorias. Entretanto, a autora destaca que, mesmo fazendo esta analogia, a teoria de Duval é limitada quando comparada com a semiótica de Peirce, porque o signo peirceano pode explicar todos os processos de apreensão em geral, ao passo que a teoria de Duval explica somente a apreensão dos objetos matemáticos. (SILVA, 2013, p.104)

Nesta perspectiva, Silva (2013, p.106) assevera que se “a tríade peirceana for objeto, signo/representámem e interpretante, logo, por conclusão própria, a “tríade” da

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
teoria de Duval seria objeto matemático, representação semiótica e indivíduo em processo de aprendizagem.”

Na TRRS, a **semioses** (apreensão ou produção de uma representação semiótica) é inseparável da **noeses** (apreensão conceitual de um objeto). No contexto da semiótica de Peirce, a semioses diz respeito às ligações entre os signos (o processo do pensamento). Sendo assim, Silva (2013) observa que há uma relação entre a semiose que se encontra na teoria de Duval com aquela da semiótica peirceana.

2.8.2 O Registro de Representação nos Termos de Peirce

Silva (2013) analisou a TRRS por meio da Semiótica de Peirce, especificamente, pelas três tricotomias de maior relevância (relação do signo consigo mesmo, relação do signo com o objeto e relação do signo com o interpretante) e das categorias universais (primeiridade, secundidade e terceiridade).

Primeira Tricotomia – signo em relação a si mesmo

Silva (2013) apresenta uma analogia dos elementos responsáveis pela ideia de RRS, a saber: a) formação de representação identificável; b) tratamento e c) conversão, com a primeira tricotomia peirceana, que possui a seguinte classificação de signo: qualissigno, sinsigno e legissigno.

A formação de representação identificável pode ser um qualissigno quando um indivíduo reconhece a qualidade de uma determinada representação. Ao tratar a formação de representação identificável como signo, a autora observa a relação da formação de representação identificável nela mesma: Qualissigno - o sentimento que brota num indivíduo, quando está diante de uma representação. O sinsigno pode ser a existência de uma representação e o legissigno, uma representação que tem o caráter de uma lei que administra acontecimentos particulares.

O tratamento do ponto de vista da primeira tricotomia peirceana pode ser um sinsigno, quando existe a transformação de uma representação nela mesma. Nesta perspectiva, o qualissigno pode ser uma simples qualidade de transformação de uma representação nela mesma, bem como o sentimento que envolve um indivíduo, quando está diante de uma transformação interna a uma representação.

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Quanto à conversão, ela pode ser considerada como um legissigno, quando se aplica a lei que governa a transformação de uma representação em outra. Assim, a autora inferiu que o qualissigno é a qualidade de transformar uma representação em outra. O sinsigno está presente, quando existe a possibilidade de transformar uma representação em outra, e, o legissigno seria a lei que governa os processos de ensino e de aprendizagem.

No que tange a segunda Tricotomia (signo em relação ao objeto), a autora observa que a formação de representação identificável pode ser um ícone quando faz referência ao objeto matemático, cujo significado é dado meramente em relação aos caracteres próprios que possui. Nesta perspectiva, considerando a formação de representação identificável como signo e o objeto matemático como objeto, a relação da formação de representação identificável com o objeto é: **Ícone**, quando apresenta as unidades e as regras de formação que são próprias aos registros semióticos em que a representação é produzida; **Índice**, quando apresenta as condições de identificação e reconhecimento da representação e a possibilidade de utilização pelos tratamentos; **Símbolo** quanto às regras de conformidade.

No que diz respeito ao tratamento em relação ao objeto, ele pode ser um índice, quando se refere a um objeto matemático em função de ser afetado por ele. A autora considera o tratamento, como signo e o objeto matemático, como objeto que é: **Ícone**, quando se refere a um objeto matemático, cujo significado é atribuído basicamente em função dos caracteres próprios que existem em cada transformação interna ao registro; **Índice**, quando se refere a um objeto matemático cuja transformação interna ao registro está em função de ser afetada por ele; **Símbolo**, quando se refere a um objeto matemático e a transformação interna ao registro é uma associação de ideias, é uma lei.

No que tange à conversão em relação ao objeto, ela pode ser um símbolo, quando faz referência a um objeto matemático, e as conversões de representações de um registro em ouras representações de outro registro, estão em função de uma associação de ideias gerais, de uma lei. Neste contexto, considerando a conversão como signo, e o objeto matemático como objeto, ela pode ser: **Ícone**, quando se refere a um objeto matemático, cujo significado é atribuído basicamente em função dos caracteres próprios que existem em cada transformação de um registro a outro; **Índice**, quando se refere a um objeto matemático, cuja passagem de um registro a outro está em função de ser afetada por ele; **Símbolo**, quando se refere a um objeto matemático e a passagem de um registro a outro é uma associação de ideias, é a fonte de conhecimento no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Ao apresentar a conceitualização, Duval (1993, p. 51) afirma que “a compreensão (integrativa) de um conteúdo conceitual apoia-se na coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão” [6]. Nesse sentido, Silva (2013) afirma que a sua conjectura se confirma nas palavras de Duval.

Silva (2013) observa que Duval (2011a) apresenta a distinção epistemológica de objeto e representação. Ao tratar dos modos cognitivos de acesso aos objetos, o autor faz as seguintes indagações: “temos acesso aos objetos independentemente das representações?”, “qual é a natureza da relação?”; e “quais são os sistemas de representação que permitem ter acesso ao objeto?”. Para Silva (2013), estes questionamentos estão de acordo com a semiótica peirceana, especificamente com a tríade, signo, objeto e interpretante, uma vez que o objeto do que trata o autor, é o objeto dinâmico de Peirce e a representação é semelhante ao signo. Por sua vez, os interpretantes são os modos cognitivos de acesso aos objetos, pois é o professor quem decidirá os modos cognitivos de acesso aos objetos. Entretanto, a autora afirma que, a semiótica de Peirce está implícita no primeiro esquema (Figura 3) de análise do conhecimento desenvolvida por Duval (2011a).

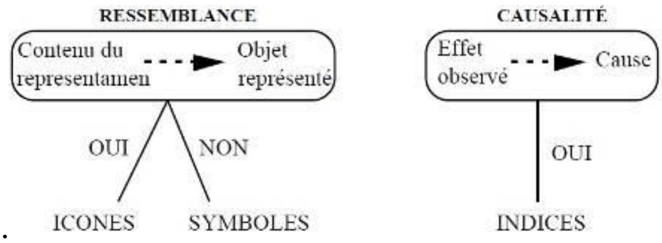


Figura 3 - Partição Tricotômica dos signos conforme Peirce.
Fonte: Duval (2011a, p. 26).

Além deste esquema, Duval (2011a) apresenta o novo esquema de análise do conhecimento, conforme Figura 4:

[6] A compreensão (integrativa) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta para a rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão (Tradução nossa).

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

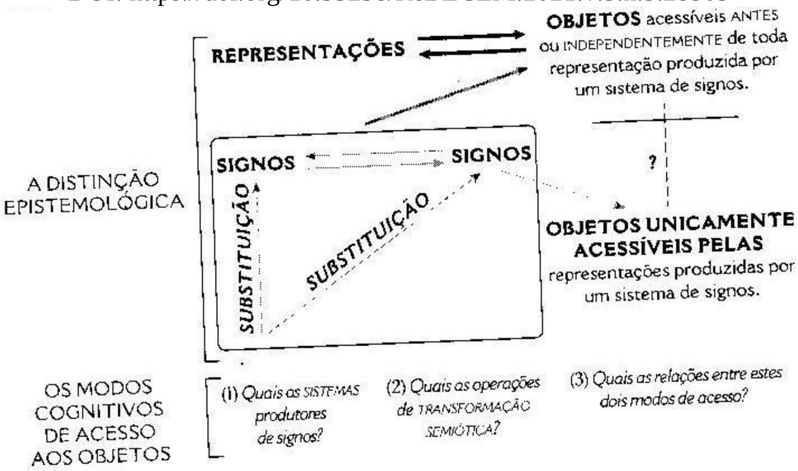


Figura 4 - O novo esquema de análise do conhecimento.
Fonte: Duval (2011a, p. 26).

A autora observa que neste esquema de análise do conhecimento (Figura 4), na distinção epistemológica, representação e objeto, Duval (2011a) apresenta uma dualidade de signos ao dizer que os objetos são “acessíveis antes ou independentemente de toda representação produzida por um sistema de signos”. Além disso, o autor acrescenta que, a dualidade de signos resulta nos “objetos unicamente acessíveis pelas representações produzidas por um sistema de signos”.

Na Figura 4, ao tratar dos modos cognitivos de acesso aos objetos, Duval apresenta três questões: “quais são os sistemas produtores de signos?”, “quais as operações de transformação semiótica?”, e “quais as relações entre estes dois modos de acesso?”. Nesse sentido, Silva (2013) salienta que as questões apresentadas no primeiro esquema (Figura 3) de análise do conhecimento, “temos acesso aos objetos independentemente das representações?”, “qual é a natureza da relação?”; e “quais são os sistemas de representação que permitem ter acesso ao objeto?”, são análogas às questões do novo esquema (Figura 4) de análise do conhecimento. Isso porque, o termo “sistemas produtores” é semelhante a acesso aos objetos, signo é análogo à representação, a natureza da relação é semelhante às operações de transformação semiótica e as relações entre estes dois modos de acesso é análoga aos sistemas de representação que permitem acesso ao objeto.

Diante destas observações, a autora deduz que o novo esquema (Figura 4) de análise do conhecimento desenvolvido por Duval apresenta os termos semióticos, signo e objeto, de forma explícita, porém o constructo interpretante continua implícito, e que a dualidade de signos diz respeito às semioses de Charles Sanders Peirce.

ReBECEM
Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Registro de Representação Semiótica		**Semiótica**			**Modelo Signico em Peice**	**Classes do modelo signico**	**Categoria da Experiência de Peirce**	**Divisão das relações triádicas**	
Semiose	Noése	Signo-signo	Signo-objeto	Signo-interpretante	objeto, representação e aluno				
Formação de representação identificável	Economia de tratamento	Qualisisgno	Ícone	Rema	Qualissigno icônico remático	Primeira: Quali-signo	Primeiridade	Relação triádica de comparação	Possibilidade
Tratamento	Complementaridade de registro	Sinsigno	Índice	Discente	Sinsigno indicial discente	Quarta: sin-signo Discente	Secundidade	Relação triádica de desempenho	Existente
Conversão	Conceitualização	Legissigno	Símbolo	Argumento	Legissigno simbólico argumento	Décima: Argumento	Terceiridade	Relação triádica de pensamento	Lei

Quadro 9 – Resumo da análise da TRRS versus Semiótica de Peirce.
Fonte: Silva (2013, p. 130).

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

A autora assevera que o signo está presente em todos os conceitos apresentados por Duval. Entretanto, o signo peirceano possui um dinamismo, ele muda de posição e de significado de acordo com o contexto.

Nesse contexto, ao analisar a TRRS de Duval por meio da Semiótica de Charles Sanders Peirce, a autora vê a possibilidade de desenvolver um modelo signico que explique os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Para facilitar o desenvolvimento do modelo signico, Silva (2013) apresenta um quadro comparativo (Quadro 9) de alguns constructos das duas teorias resumimos a análise da teoria de Duval por meio da semiótica de Peirce.

No Quadro 9, a autora relacionou as teorias de RRS com a Semiótica Peirceana, mostrando a correspondência de conceitos que há entre elas, especificamente nas cinco primeiras colunas da esquerda para a direita. Isto com base na análise Semiótica que foi apresentada ao longo desta parte deste artigo.

A partir das reflexões tecidas, Silva (2013) observa que a teoria de Duval se apropria de três classes da teoria semiótica de Peirce, primeira, quarta e décima, que resultam da combinação das tricotomias, signo em relação ao signo, signo em relação ao objeto e signo em relação ao interpretante. Assim, com base nessas considerações, a autora apresenta o seguinte modelo de análise semiótica peirceana para os processos de ensino e aprendizagem da matemática (Quadro 10):

Classes	Termos semióticos envolvidos	Modelo semiótico para o ensino e a aprendizagem da matemática
Primeira	Qualissigno icônico remático	Em Peirce: qualidade, similaridade e possibilidade. No ensino e na aprendizagem da matemática: reconhecimento das características do objeto matemático por meio da intuição.
Quarta	Sinsigno indicial dicente	Em Peirce: particularidade, causalidade, certeza. No ensino e na aprendizagem da matemática: realização de mudanças nas representações do objeto matemático por meio da identificação.
Décima	Legissigno simbólico argumento	Em Peirce: lei, arbitrariedade e certeza absoluta. No ensino e na aprendizagem da matemática: resultado das mudanças realizadas nas representações do objeto matemático por meio do raciocínio dedutivo.

Quadro 10: As classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática.
Fonte: Silva (2013, p.132-133).

A autora destaca que a primeira coluna (Quadro 10) corresponde às classes peirceanas, primeira, quarta e décima. A segunda coluna corresponde aos termos semióticos apresentados na primeira, quarta e décima classe. A terceira coluna

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

corresponde ao modelo semiótico para o ensino e aprendizagem da matemática desenvolvido pela pesquisadora.

Este modelo foi desenvolvido com base nas teorias RRS de Duval e Semiótica de Charles Sanders Peirce. A elaboração do conceito para o ensino e para aprendizagem da matemática, que está na primeira linha e terceira coluna do Quadro 10, foi fundamentada nos conceitos de formação de representação identificável e na primeira classe de signo peirceano. Por sua vez, a elaboração do conceito apresentado na segunda linha e terceira coluna do Quadro 10 foi baseada no tratamento (DUVAL, 1995) e na quarta classe peirceana. Por fim, a elaboração do conceito apresentado na terceira linha e terceira coluna do Quadro 10 foi fundamentada nos conceitos de conversão e décima classe peirceana.

2.8.3 Apontamentos de alguns resultados

Silva (2013, p.17) aponta as principais analogias, que nortearam o estudo, são elas:

> a) a formação de representação semiótica pode ser um qualissigno, ícone ou rema; b) o tratamento pode ser um sinsigno, índice ou dicente; e c) a conversão pode ser um legissigno, símbolo ou argumento. Para estas analogias foram formulados alguns conceitos, resultantes da articulação dos conceitos apresentados em cada teoria.

A autora aplicou os conceitos resultantes das analogias e de seu modelo semiótico no estudo dos objetos matemáticos, plano, reta, vetor e pontos da geometria analítica espacial, e constatou que a "semiótica peirceana pode auxiliar na identificação de possíveis problemas e soluções que podem ser encontrados nos processos de ensino e de aprendizagem da geometria analítica". (SILVA, 2013, p.113) A autora salienta que "os signos peirceanos que permitem essa identificação e solução são o legissigno e o símbolo" (p. 17). Além disso, "o argumento pode ser o signo que impulsiona os indivíduos a tomarem a decisão de resolver os problemas e realizar as tarefas" (p. 17). Além do mais, deduz que "a décima classe peirceana, legissigno simbólico argumento, pode ser a responsável pelo sucesso nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática" (p. 17), e que "o modelo das classes peirceanas para o ensino e a aprendizagem da matemática pode auxiliar na busca pelas inferências das ações realizadas nesses processos" (p. 17). Por analogia, a autora admite que

> a conversão é a atividade de grande importância nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática e que as teorias de Duval e Peirce são válidas

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

> para explicar a matemática e seu ensino, ainda que a teoria de Registro de Representação Semiótica trate dos objetos matemáticos e sua representação como um todo, e a teoria de Peirce considera suas partes, como um signo diferente. (SILVA, 2017, p.17)

Assim, do ponto de vista didático, a análise realizada por Silva (2013) foi importante no estudo dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, mais especificamente, no que diz respeito à geometria analítica, permitiu identificar os signos dessa área que podem ser origem de dificuldades par quem se defrontar o ensino e/ou aprendizagem dos conceitos dessa área de conhecimentos.

3. Apontamentos finais e contribuição das pesquisas

O presente texto tem por objetivo fazer uma metassíntese de sete teses e uma dissertação desenvolvidas na Universidade Federal de Santa Catarina (cinco teses e uma dissertaçao) e na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (duas teses), e tecer reflexões acerca da importância da TRRS e outros constructos teóricos desenvolvidos na área de Educação Matemática ou Educação. O mapa que realizamos não abrande todas as pesquisas que se utilizaram de algumas da TRRS, mas nossa pretensão evidenciar como os constructos desta teoria foram fundamentais nos processos de construção das obras escolhida e como permitam explicar a natureza de fenômenos relacionados com o ensino e aprendizagem de alguns objetos matemática.

Apesar de não exaustivo, os apontamentos realizados a partir das oito obras mostram como foram feitas as articulações entre os diferentes constructos da TRRS, apontando sua diversidade (Figura 5) e especificidade e suas funções na análise dos achados. Os autores das pesquisas aqui mapeadas procuraram conhecer muito bem as ideias principais da TRRS e identificar quais delas poderiam ser utilizadas para referenciar teoricamente suas pesquisas.

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

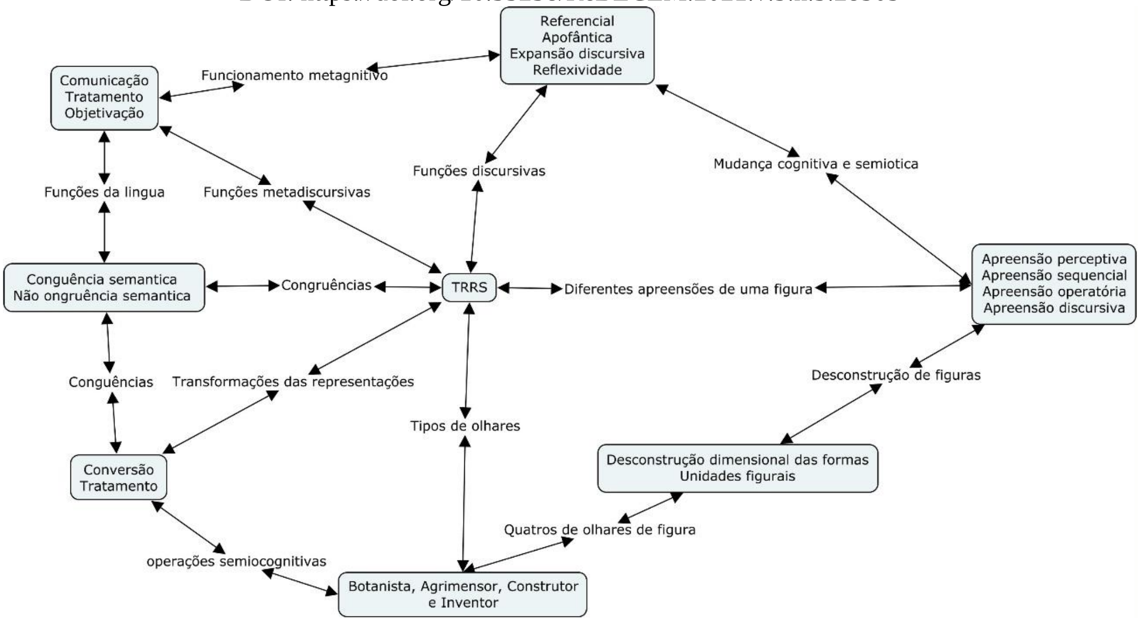


Figura 5: Mapas dos constructos da TRRS.
Fonte: Autores (com apoio do software CmapTools), (2020).

Os resultados oriundos das pesquisas revisitadas revelam os desafios relacionados com a escolha de situações que fossem pertinentes à formação dos sujeitos das pesquisas e ao ensino/aprendizagem dos objetos matemáticos escolhidos. Os constructos teóricos escolhidos permitiram aos autores escolher os elementos necessários para modelar os conteúdos matemáticos em jogo nas diferentes pesquisas.

Por exemplo, Anjos (2019), a partir do fenômeno de não congruência, afirma que no caso da estudante cega, esse fenômeno aconteceu, quando se analisa a situação do aumento do número de caracteres e confrontá-lo com o fato do tempo de leitura desta estudante que, tanto é mais lento quanto mais cansativo do que a leitura em tinta. Identificou este aspecto na escrita de expressões fracionárias, principalmente, nas expressões fracionárias em tinta que são escritas bidimensionalmente, permitem a visualização imediata dos numeradores e denominadores da expressão, para as pessoas que enxergam, o que não acontece na escrita de expressões fracionárias em Braille.

O fato de os símbolos em Braille não sejam identificáveis, função referencial da língua de acordo com Duval (2004b), tem por consequência levar, por exemplo, a estudante a não compreender a definição de Equação Polinomial, uma vez que diversos símbolos que ela não conhecia apareciam nas questões.

Anjos (2019) observa que as **diferenças semiocognitivas** observadas no Livro Didático em Braille levam a uma questão fundamental que diz respeito ao acesso aos objetos de saber em matemática pela estudante cega.

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Souza (2018) enfatiza a relevância da desconstrução dimensional de formas como um gesto intelectual intrínseco à aprendizagem da geometria que leva ao desenvolvimento do olhar não icônico em diferentes tipos de atividades. O caráter transitório de figuras geométricas em problemas viabiliza, segundo a autora, a desconstrução dimensional, que pode ocorrer por atividades que provoquem modificações mereológicas, cálculos em que se tenha a necessidade de identificar e designar elementos em dimensões diferentes das que foram dadas, construções de figuras, geometria dinâmica, acréscimo de elementos às figuras dadas, com um olhar de inventor, como o prolongamento de lados ou arestas.

A partir de sua análise apoiando-se na identificação das variáveis cognitivas da TRRS e o estudo sobre o ensino e a aprendizagem das quádricas, Silva (2018) identificou que essas superfícies têm várias variáveis visuais que, por sua vez, possuem unidades significantes simbólicas e linguísticas correspondentes. A articulação entre essas unidades permitiu ao autor identificar várias unidades significativas para diferentes tipos de quádricas que revelam a complexidade das quádricas no que tange as dimensões epistemológica e cognitiva. Conscientes dessas dificuldades, para estar em *sintonia* com a TRRS, no que diz respeito à abordagem de interpretação global de propriedades figurais, as funções discursivas da linguagem e as operações cognitivas de conversão e tratamento, o autor enfatiza a importância das variáveis visuais que permitem identificar/analisar as diferenças e semelhanças tanto entre os vários casos de quádricas quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes no sistema cartesiano. Na análise dos achados, a partir essencialmente das Funções Discursivas da Linguagem, Silva (2018) assevera que, no decorrer do processo, as funções referencial e de expansão discursiva necessárias para o progresso do discurso, os tratamentos e as conversões de representações teriam sido mobilizados adequadamente pelos alunos.

As reflexões tecidas por Pasa (2017) lhe permitiram concluir que o trabalho nesta perspectiva possibilita o reconhecimento de unidades básicas simbólicas, relativas à variabilidadee de unidades básicas gráficas e, mais do que isso, as conversões entre elas, sem a necessidade de obtenção da expressão algébrica da função. Assevera que, a partir da aplicação da sequência didática e da análise dos diálogos e resoluções dos estudantes quanto às funções do discurso mobilizadas, o processo de apropriação do conhecimento pelos estudantes e os gestos intelectuais mobilizados no caminho alternativo possibilitaram a compreensão ampla do conceito de funções no que se refere à sua variabilidade.

Brandt (2005) destaca que as várias representações de natureza semiótica, tais como a língua natural para a descrição de um enunciado ou um texto, assim como figuras (imagens, esquemas, quadros, gráficos, fórmulas) são importantes pela diversidade que é inerente ao funcionamento do pensamento e ao desenvolvimento de conhecimentos. Esse desenvolvimento só se torna possível com a diferenciação progressiva de outros registros de representação diferentes da língua natural. Nesse sentido, a autora afirma que se perde a valiosa síntese inventada para um sistema de numeração, ao não reconhecer este objeto nos registros e configura-se um retrocesso em se tratando de representação de quantidades, já apontado pela história, como por exemplo, a atribuição de partes do corpo da denominação dos números já percebidos em seu sentido cardinal e ordinal. Destaca que as relações entre a representação e o objeto representado é compreendida em seu modo de produção, visto que as diferentes representações estão ligadas à sua utilização e desempenham papéis diferentes no desenvolvimento dos processos cognitivos. No caso do SND foi possível a utilização da língua materna e da escrita arábica e constituem sistemas que dão especificidades significantes representacionais diferentes, independente do objeto representado. É por esta razão que os alunos encontraram dificuldades em relação à aprendizagem do SND.

Apoiando-se em Fischbein (1993), Souza (2007), para promover a aprendizagem da resolução das inequações com uma incógnita real, optou pela utilização de três sistemas de representação, o algébrico, o gráfico e o da língua natural, com os respectivos tratamentos e conversões de representações. Pois, inferiu que, ao "ler" e "interpretar" uma frase algébrica, um sujeito seria capaz de "ler" e "interpretar" um gráfico, desde que soubesse a definição de gráfico (aspecto formal), associada à visualização global (aspectos formais, intuitivos e algorítmicos). Tanto os registros em língua natural, como os registros gráficos, trouxeram conhecimento novo e inesperado para a maioria dos sujeitos da pesquisa. Um dos resultados importantes do trabalho de Souza (2007) é a triangulação na concepção, realização e experimentação da sequência didática (produto da engenharia didática) dos achados oriundos da revisão da literatura, a TRRS (DUVAL, 1995, 2000) e os aspectos de Fischbein (1993) para promover a aprendizagem desse assunto. A escolha de uma abordagem funcional gráfica genérica, foi fundamental nos processos de ensino e aprendizagem do objeto matemático inequação.

Na tese de Silva (2013), visa-se analisar os signos peirceanos e os registros de representação e propõe um quadro semiótico para a matemática e seu ensino, resultando de uma metarrepresentação, ou melhor, da aplicação da terceiridade em algum grau. A semiótica contribuiu para a TRRS, ao passo que a primeira está contida em todos os fenômenos matemáticos, bem como no ensino e na aprendizagem dessa disciplina. Para autora, ela contribuiu, em suas potencialidades, para perceber que há vestígios na TRRS. O estudo evidenciou que a TRRS, de acordo com a autora, não esclarece todos os detalhes presentes nos objetos matemáticos e em suas representações, nem explica todas as minucias envolvidas nos processos de ensino e de aprendizagem. Constatou por analogia, que as categorias peirceanas de maior relevância (signo em relação ao signo, signo em relação ao objeto, e signo em relação ao interpretante) são válidas para analisar a TRRS. Essa validação justifica-se pelo fato de a autora ter evidenciado algumas repostas para o ensino e a aprendizagem de matemática que não encontrou na TRRS. Por meio da análise dos objetos matemáticos, plano, vetor, e ponto no espaço, bem como da comparação entre as duas teorias, a autora observa que a semiótica peirceana pode apontar os possíveis problemas e soluções que podemos encarar nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática, ao tratar de determinados objetos.

Em nosso ponto de vista, os resultados das pesquisas analisadas, constituem-se em aportes importantes no que diz respeito ao processo de formação dos sujeitos envolvidos nessas pesquisas, tanto em relação a conteúdos matemáticos escolhidos como ao ensino desses conteúdos. Os trabalhos desenvolvidos deram ênfase a três aspectos: conteúdo, no que diz respeito aos temas da pesquisa, formação didática dos pesquisadores e uma análise crítica dos modelos epistemológicos vigente nas diferentes instituições. Do ponto de vista didático, observamos que as diferentes pesquisas envolveram tipos de formação para um olhar epistemológico e crítico do ensino dos objetos matemáticos estudados nas diferentes obras. Os conhecimentos matemáticos referem-se aos conhecimentos que os sujeitos das pesquisas deveriam possuir sobre os conceitos e procedimentos matemáticos, estratégias de resolução de problemas, bem como as relações que existem, por um lado, entre estes diferentes componentes e, por outro lado, entre uma noção matemática e outra.

O procedimento metodológico empreendidos no desenvolvimento das pesquisas e as triangulações realizadas entre os constructos da TRRS, entre esta e outras referenciais teóricos, nos parecem ser contribuições importantes para a área, pois permitiram propor métodos de formação e análises dos achados que levaram a produzir novos conhecimentos para a área.

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

Referências

ALENCAR, E. S; ALMOULOUD, S. A. A metodologia de pesquisa: metassíntese qualitativa. **Revista Reflexão e Ação**, Santa Cruz do Sul, v. 25, n. 3, p. 204-220, Set./Dez. 2017

ANJOS, D. Z. **O que se revela quando o olhar não alcança?** Em busca do acesso semiocognitiva aos objetos do saber matemático por uma estudante cega. 2019. 390f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2019.

ARTIGUE, M. Ingénieria didática. In: ARTIGUE, M. et al. (ed.). **Ingenieria didática em educación matemática**. Um esquema para la investigación em la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Colombia: Universidad de los Andes, 1995, p. 33-59.

ARTIGUE, M.. Ingèniere didactique. **Recherches en Didactique des Mathématique**, Grenoble, v.9, n.3, p. 231-308, 1998.

BRANDT, C. F. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração**. 2005. 246f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Guia de Livros Didáticos: PNLD 2011: Matemática. Brasília: MEC, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1ª a 4ª séries). Brasília: MEC/CEF, 1997.

Brasil. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/CEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématique**, Grenoble, v.7, n.2, p.33-115, 1986.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1963.

CHARLOT, B. **Da relação com o saber**: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

COQUIN-VIENNOT, D. Complexité mathématique et ordre d‟aquisition: une hierarchie de conceptions à propos des relatifs. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 6, n. 2.3, p. 133-192, 1985.

CORRÊA, M. O. S.; MORETTI, M. T. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Orgs). **As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a prendizagem na Educação Matemática**. Ijuí: Unijuí, 2014.

DIOFANTO, A. **La aritmética y el libro sobre los números poligonales**. Tres Canto: Nivola Libros Ediciones, 2007.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revemat**, Santa Catarina, v. 7, n. 1, p.97-117, 2012b.

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505

DUVAL, R. Basic issues for research in Mathematics Education. **Proceedings of the 24th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Hiroshima, v. 1, p. 55-69, 2000.

DUVAL, R. Como analisar a questão crucial da compreensão em matemática. **Revemat**, Florianópolis, v. 13, n. 2, p.1-27, 2018. Disponivel em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2018v13n2p1/38031. Acesso em 05 de abril de 2021.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Trad. de M. T. Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012a. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat >. Acessado em: 10/05/2021.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revemat**, Florianopolis, v.6, n.2, p.96-112, 2011b. Disponivel em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96/21794. Acessado em 15/05/2021

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 10, p. 5-53, 2005. Disponivel em: https://doczz.fr/doc/886315/les-conditions-cognitives-de-l-apprentissage-de-la-g%C3%A9om%C3%A9trie . Acessado em 10/03/2021

DUVAL, R. **Les problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Cali: Universidade del Valle, 2004a. Tradução de Restrepo, M. V.

DUVAL, R. Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 5, p.37- 64, 1993.

DUVAL, R. Representation, vision and visualisation functions in mathematical thinking. In: PME-NA, 21, 1999, Cuemavaca. Proceding of the 21st Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cuemavaca: PME-NA, 1999, p. 3-26.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Répères**. Pont-à-Mousson, n.17, p.121-138, 1994.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009. (Fascículo I).

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine** : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Bern: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Universidad del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía, 2004b. Tradução de Myriam Vega Restrepo.

DUVAL, R. **Ver e Ensinar Matemática de outra Forma.** Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. São Paulo: PROEM, 2011a.

DUVAL, R.; MORETTI, Méricles T. Temas do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica:

DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
significado do que é "fazer Matemática". In: Custódio, José F.; Costa, David A.; Flores, Cláudia R.; Grando, Regina Célia (Orgs.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): contribuições para pesquisa e ensino.** São Paulo: Editora Livraria de Física, 2018.

FAYOL, M. **A criança e o número:** da contagem à resolução de **problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algirithmic and the intuive componentes in a mathematical activity. In: BIEHLER, R. et al. (Otg.). **Didactics of mathematics as a scientific discipline**. Dordrecht: Kluer, 1993, p. 231-240.

HILLESHEIM, S. F. **Os números inteiros relativos em sala de aula**: perspectivas de ensino para a regra de sinais.2013. 216f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, p.216, 2013.

LINCHEVSKI, L.; SFARD, A. Rules without reason as processes without object – The case of equation and inequations, 1991, Assisi. In: FURINGHETTI, F (Ed.). **Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education**, v. 2. Assisi: PME, p. 317-324, 1991

MARIANI, R.C. P. **Transição da Educação Básica para o Ensino Superior**: a coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de Cálculo. 2006. 220 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

MORETTI, M. T. A regra dos sinais para a multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 691- 714, abr. 2012. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/CC36384011468.pdf. Acesso em: 02 de fevereiro de 2021.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise Semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 17, n.3, p. 597-616, 2015. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25673/pdf. Acesso em 02 de fevereiro de 2021.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: Associação Portuguesa de Matemática, 2008.

PASA, B.C. **A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais**. 2017. 311 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

PASA, B.C; BINOTTO; MORETTI, M. T. M. Esboçando curvas de funções trigonométricas a partir da noção de infinitésimo. In: Jornada Nacional de Educação Matemática e Jornada Regional de Educação Matemática, 8, 2020, Passo Fundo. **Anais do VIII Jornada Nacional de Educação Matemática – JEM,** Passo Fundo: EDIUPF, 2020, p.1-15.

SANTAELLA, F. J. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2003.

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2021.v.5.n.3.28505
SILVA, C. R. **Os signos peirceanos e os registros de representação semiótica**: qual semiótica para a matemática e seu ensino? 2013, 191f. Tese (Ddoutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

SILVA, S. F. **Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas no ensino superior:** uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do Geogebra. 2018, 557f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

SOUZA, R. N. S.; MORETTI, M. T.; ALMOULOUD, S. A. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 21, n.1, p. 322-346, 2019.

SOUZA, R. N. S. **Desconstrução dimensional das formas:** gesto intelectual necessário à aprendizagem de geometria. 2018. 239f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

SOUZA, V. H. G. **O uso de vários registros na resolução de inequações**: Uma abordagem funcional gráfica. 2007. 307f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

Recebido em: 14 de setembro 2021

Aceito em: 24 de novembro de 2021