

A INTERAÇÃO DE ASPECTOS ALGORÍTMICOS, INTUITIVOS E FORMAIS NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES SOBRE ÁREAS E PERÍMETROS

THE INTERACTION OF ALGORITHM, INTUITIVE AND FORMAL ASPECTS IN THE SOLUTION OF QUESTIONS CONCERNING AREAS AND PERIMETERS

Leonardo Guarini Biscaino¹

William Vieira²

Roberto Seidi Imafuku³

Emanoel Fabiano Menezes Pereira⁴

Resumo: Neste artigo apresentamos uma análise de resoluções referente a duas questões sobre o cálculo de perímetro e de área, realizadas por estudantes do 1º ano do Ensino Médio. O objetivo foi identificar e analisar as dificuldades e defasagens que os participantes desta pesquisa apresentavam acerca dos conceitos e operações envolvendo área e perímetro. As duas questões foram aplicadas de forma remota, pela plataforma *Google Meet*, para 78 estudantes, no início do ano letivo de 2021, que as resolveram individualmente e sem consulta. Em seguida, realizamos uma análise de erros das resoluções desenvolvidas pelos participantes, à luz da interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos. De maneira geral, os resultados indicaram dificuldades conceituais e operatórias sobre área e perímetro para boa parte dos participantes, que não inter-relacionaram aspectos formais, algorítmicos e intuitivos em suas resoluções.

Palavras-chave: Ensino de Áreas e de Perímetros; Dificuldades sobre áreas e perímetros; Análise de Erros; Educação Matemática.

Abstract: In this paper we present an analysis of resolutions concerning two questions about the calculation of perimeter and area performed by students of the 1st year of High School. The objective was to identify and analyze the difficulties and gaps that participants have about the concepts and operations involving area and perimeter. The two questions were applied to 78 students using the online meeting platform (*Google Meet*) at the beginning of the school year in 2021, the students solved the questions individually and without consultation. Then, we performed an error analysis of the resolutions developed by the participants in the light of the interaction of formal, algorithmic and intuitive aspects. In general, the results indicated that a great part of the participants have difficulties when it comes to conceptualize and

¹ Licenciando em Matemática, bolsista de extensão e membro do CEPIN – Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos. E-mail: leoguarini.99@gmail.com.

² Doutor em Educação Matemática e membro do CEPIN – Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos. E-mail: wvieira@ifsp.edu.br.

³ Doutor em Educação Matemática e membro do CEPIN – Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos. E-mail: roberto.imafuku@ifsp.edu.br.

⁴ Doutorando em Matemática Aplicada e membro do CEPIN – Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos. E-mail: emanoel.pereira@ifsp.edu.br.

operate area and perimeter that not interrelate with formal, algorithmic and intuitive aspects in their resolutions.

Keywords: Teaching Areas and Perimeters; Difficulties about Areas and Perimeters; Error Analysis; Mathematics Education.

1 Introdução

Os conceitos de área e perímetro, assuntos de relevância destacada na Educação Básica, estão envolvidos em discussões sobre grandezas e medidas, constituem-se em exemplos de grandezas distintas – respectivamente, medida de superfície e medida de comprimento –, e podem/devem ser trabalhados sob as perspectivas geométrica e algébrica.

Os documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática no Brasil indicam que os estudantes tendem a confundir esses conceitos, levando a equívocos conceituais e procedimentais, conforme destacado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): “[...] é bastante frequente os alunos confundirem noções de área e perímetro ou estabelecerem relações não verdadeiras entre elas” (BRASIL, 1998, p.130).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca os conceitos geométricos de área e perímetro na temática de Grandezas e Medidas e indica que os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental devem compreender a área e o perímetro como grandezas associadas às figuras geométricas, resolvendo, com medidas convencionais, problemas que envolvem tais grandezas, assim como estabelecer relações entre elas (BRASIL, 2018).

A relevância desses conceitos no ensino de Matemática também pode ser observada nas diferentes pesquisas e estudos realizados por autores nacionais e internacionais, ao discutir os processos de ensino e de aprendizagem de áreas e perímetros, e as dificuldades enfrentadas por estudantes e professores nesse processo.

Guimarães *et al.* (2021), em estudo realizado no início de 2020, analisaram questões envolvendo os conceitos geométricos de área e perímetro, aplicadas a alunos ingressantes no Ensino Médio, obtendo resultados que evidenciam dificuldades relacionadas à compreensão desses conceitos. Conforme observado pelos autores, os participantes que erraram as questões de investigação apresentaram “[...] prevalência de abordagens que privilegiam os objetos do Mundo Operacional Simbólico e as dificuldades na utilização desses objetos” (GUIMARÃES, *et al.*, 2021, p. 23). Os autores

apontaram, ainda, que uma possível causa para as dificuldades encontradas pode ser fruto do ensino que favorece procedimentos em detrimento de conceitos.

Munhos e Klaus (2016), no estudo realizado com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental em um colégio estadual do Paraná, utilizaram a resolução de problemas como metodologia de ensino para o aprendizado dos conceitos de área e perímetro. Os resultados mostram dificuldades por parte dos estudantes na caracterização de figuras planas, como no reconhecimento de trapézios e paralelogramos, no uso de unidades de medida e no desenvolvimento de estratégias de resolução dos problemas propostos. Em consonância, Stefani e Proença (2018), também observaram dificuldades de estudantes do 7º ao 9º ano, no desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, atribuindo-as à falta de domínio sobre os conceitos de área e perímetro ou à confusão entre ambos. Tais posições foram baseadas na análise da resolução de problemas envolvendo áreas e perímetros, utilizando-se de um questionário acerca das impressões dos participantes sobre os conceitos de área e perímetro. Entende-se que a falta de domínio sobre esses conceitos se deve à ausência de discussões em sala de aula e de aplicações à resolução de problemas.

Santos (2014) analisou a resolução de duas perguntas relacionadas à área e ao perímetro, aplicadas a 85 estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, além de entrevistas com 13 estudantes e três professores de Matemática no Ensino Fundamental. Os resultados evidenciaram defasagens no processo de formação dos professores e no domínio sobre os conceitos geométricos, o que apresenta implicações no ensino dos temas aqui investigados. Em relação aos estudantes, os dados revelaram tendência a confundir os conceitos de área e perímetro e não compreendê-los como “[...] objetos geométricos distintos, tanto do ponto de vista topológico, onde área associa-se a superfície e perímetro ao contorno, quanto dimensional” (SANTOS, 2014, p. 229).

Silva (2009) apresentou resultados que corroboram o ensino deficitário de geometria na Educação Básica, ressaltando perspectivas que são, no ensino de Matemática, marcadas por tratamentos excessivamente algébricos e memorização de algoritmos. O autor analisou, com base na Epistemologia Genética e fazendo uso do Geoplano, as explicações de adolescentes e adultos egressos da escola básica, referentes aos problemas envolvendo o cálculo de área e de perímetro e as propriedades que exibem. Os resultados explicitaram que os sujeitos controlavam os algoritmos que envolviam os problemas propostos, sabendo aplicá-los para a obtenção dos resultados esperados, no

entanto, poucos dos participantes conseguiram elaborar explicações conceituais sobre área e perímetro, bem como sobre as propriedades observadas.

Em seu trabalho, Henriques e Silva (2014) discutiram e propuseram caminhos para o tratamento das dificuldades na aprendizagem de área e perímetro, tendo como base os resultados obtidos em estudos anteriores, realizados pelos próprios autores. Destacam que a principal dificuldade exibida pelos participantes é a confusão que estabelecem entre as grandezas. Notabilizam a necessidade de experiências e tarefas diversas, “[...] tarefas como essas podem tornar visíveis ao professor/pesquisador as dificuldades de aprendizagem de tal modo que, ao se tornarem objeto de atenção destes alunos, tais dificuldades possam ser superadas” (HENRIQUES; SILVA, 2014, p. 50).

As pesquisas aqui apresentadas estão centradas em perspectivas distintas e abordam diferentes dificuldades que são observadas nos processos de ensino e de aprendizagem de áreas e perímetros. No entanto, é possível identificar, como principal dificuldade, a confusão estabelecida por estudantes entre os conceitos de área e perímetro, entendendo que estas dificuldades decorrem da ausência, em sala de aula, de trabalhos e tratamentos significativos sobre esses conceitos geométricos.

Neste artigo, temos por objetivo identificar e analisar as dificuldades e defasagens que os participantes apresentavam acerca dos conceitos e operações envolvendo área e perímetro, partindo da análise das resoluções, à luz da interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais colocados por Fischbein (1994). Para isso, aplicamos um questionário diagnóstico para 78 alunos ingressantes do Ensino Médio de uma instituição pública de ensino da região metropolitana de São Paulo. O questionário foi construído com 12 perguntas baseadas em conteúdos abordados nos anos finais do Ensino Fundamental. O estudo das resoluções apresentadas pelos participantes baseia-se na análise de erros proposta por Cury (2007), método que visa à identificação e classificação das dificuldades e defasagens apresentadas pelos sujeitos na resolução de problemas de Matemática.

2 Fundamentação teórica

Baseamos este estudo nas ideias de Fischbein (1994), para analisar as estratégias de resolução de problemas pelos participantes. O autor defende que, na realização de uma tarefa matemática, um sujeito deve inter-relacionar aspectos formais, algorítmicos e intuitivos. A interação desses três aspectos é fundamental na concepção da Matemática como um processo de criação humana.

Os aspectos formais dizem respeito aos conhecimentos formalizados que caracterizam a Matemática como uma ciência formal, portanto, trata-se de definições, axiomas, teoremas e provas, que devem ser ensinados, apreendidos, organizados e aplicados pelos estudantes, nas resoluções de problemas. Fischbein (1994) explicitou que os aspectos formais devem participar do processo de criação dos estudantes e da rigorosidade do processo de criação, pois permitem aos sujeitos desenvolver a capacidade de elaborar resoluções coerentes e consistentes. Para tal, deve-se valorizar o acesso à aprendizagem das formalidades matemáticas, uma vez que é comum estudantes apresentarem dificuldades de aquisição de conhecimentos formais, sem a mediação adequada dos professores.

Nos estudos de áreas e perímetros, aspectos formais relacionados à definição desses conceitos constituem parte fundamental de seu desenvolvimento, uma vez que a falta de clareza sobre essas ideias pode levar a equívocos na resolução de problemas, durante o uso de algoritmos (aspectos algorítmicos). De fato, essa perspectiva, que será apresentada na sequência, foi observada nos participantes desta investigação. Outra perspectiva interessante de aspectos formais do estudo de áreas está relacionada à dedução de fórmulas para o cálculo de área de algumas figuras planas, como os triângulos e os paralelogramos, que podem ocorrer a partir do conhecimento das fórmulas do cálculo de área de retângulos.

Os aspectos algorítmicos caracterizam-se por métodos, técnicas e procedimentos padronizados na Matemática, utilizados para a resolução das diversas situações-problema. Como explicou Fischbein (1994), há uma falsa concepção de que somente entendendo os sistemas de conceitos e resultados formais pertencentes à Matemática, um sujeito consiga resolver problemas. O autor discorre que as capacidades matemáticas também são o desenvolvimento, armazenamento e aprendizado de métodos e técnicas de resolução, dotadas de justificativas teóricas, que devem ser efetivamente treinadas e desenvolvidas pelos estudantes. No entanto, alerta Fischbein, a Matemática não deve ser reduzida às técnicas e estratégias de resolução, uma vez que estas podem não ser úteis na resolução de situações e/ou problemas não padronizados. Ele reitera que: “[...] procedimentos de resolução que não carregam um suporte formal, com uma justificativa explícita, são esquecidos cedo ou tarde” (FISCHBEIN, 1994, p. 232).

Os algoritmos para o cálculo de áreas e perímetros constituem alguns dos aspectos algorítmicos envolvidos no estudo desses temas. Neste caso, é central que os aspectos algorítmicos estejam inter-relacionados aos aspectos formais das definições de área e

perímetro, posto que uma das dificuldades dos estudantes envolvidas nesses assuntos é o de confundir os conceitos e aplicar incorretamente alguns algoritmos.

Os aspectos intuitivos concernem à cognição intuitiva, entendimento intuitivo e resolução intuitiva, que dizem respeito à aceitação de um conhecimento, por parte de um sujeito, como sendo autoevidente, isto é, sem a necessidade de justificar ou formalizar prova. Fischbein (1994) preconizou os aspectos intuitivos agindo coercitivamente nas interpretações e estratégias de resolução, caracterizando-se muitas vezes como obstáculos epistemológicos, pois ainda que possam, em alguns casos, estar de acordo com verdades matemáticas, em outras situações podem gerar contradições e equívocos, o que dificulta os processos de aprendizagem.

Na aprendizagem de áreas e perímetros, um dos aspectos intuitivos, que pode levar a equívocos, diz respeito à confusão entre esses dois conceitos e, como consequência, a aplicação de algoritmos de maneira incorreta. Por exemplo, calcular o perímetro de um quadrado, quando é solicitada sua área, perspectiva que identificamos em nossa investigação. Essa situação reitera a importância da interação entre os aspectos para a construção do conhecimento sólido sobre os conceitos, ideias e procedimentos de cálculo. Outro aspecto intuitivo relacionado ao cálculo de perímetros, que pode ser um causador de dificuldades na aprendizagem desse conceito, é entendê-lo como a soma das medidas dos lados de uma figura. Embora essa ideia se adéque para o caso de polígonos, ela não se aplica ao buscar o perímetro de figuras com partes curvas, por exemplo.

Segundo Fischbein (1994), a elaboração das resoluções baseia-se nas interações desses três aspectos, no entanto, há predominância dos aspectos intuitivos sobre os demais, já que estes fundamentam-se em conhecimentos, experiências e perspectivas vivenciadas pelo indivíduo, que podem levar a erros e equívocos, ou a dificuldades em aprender e aplicar os conhecimentos matemáticos corretamente. Ele defende que as interações dos aspectos formal, algorítmico e intuitivo são complexas e difíceis de serem identificadas e compreendidas, havendo a necessidade de análises, observações e pesquisas experimentais que evidenciem as diferentes fontes de erros que podem estar presentes nas atividades matemáticas dos estudantes.

3 Procedimentos Metodológicos

Para a realização desta investigação, no início do ano letivo de 2021, elaboramos e aplicamos um questionário diagnóstico para 78 ingressantes no Ensino Médio técnico

de uma instituição federal de ensino, localizada na região metropolitana da cidade de São Paulo, visando identificar e analisar as dificuldades e defasagens dos estudantes em relação aos conteúdos estudados nos anos finais do Ensino Fundamental em Matemática. O questionário continha 12 questões relacionadas à leitura de tabelas e gráficos, teorema de Pitágoras, cálculo de proporções, semelhança de triângulos, funções, equações e sistema de equações, e duas questões envolvendo o cálculo de área e perímetro.

Devido o distanciamento social em resposta ao enfrentamento da pandemia da Covid-19, o questionário foi aplicado remotamente via *internet*, sendo respondido pelos estudantes em suas residências, e as resoluções foram escaneadas e enviadas para os pesquisadores. A atividade foi realizada no horário da aula de Matemática, com duração de 90 minutos. Foi comunicado o objetivo da pesquisa aos participantes, os quais foram orientados a resolverem os problemas individualmente e sem consulta. Os pesquisadores não forneceram nenhuma informação adicional às presentes no questionário. Os estudantes foram identificados por pseudônimos e todos assentiram em participar do estudo, mediante apresentação do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) fornecido por seus pais e/ou responsáveis.

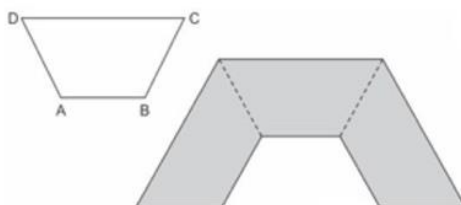
Neste artigo, analisamos as resoluções desenvolvidas pelos participantes para dois problemas envolvendo os conteúdos de áreas e perímetros (Questões 6 e 7). A escolha dessas duas questões decorreu ao número elevado de soluções incorretas identificadas nas respostas dos participantes e ao interesse dos pesquisadores em identificar e entender os principais erros e dificuldades manifestadas nas estratégias de resoluções apresentadas. Utilizamos o procedimento da Análise de Erros proposta por Cury (2007), procedimento metodológico baseado na análise de conteúdo, para identificar classes de erros recorrentes nas resoluções dos problemas propostos. Em seguida, foram elaborados quadros com as frequências relativas às categorias de erro. O objetivo dessa análise foi identificar as classes de erros que evidenciem as dificuldades nas resoluções dos participantes. Não se trata, assim, de uma classificação do tipo certo ou errado, mas de tentar entender procedimentos e ideias equivocadas e suas possíveis causas, à luz da interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais.

4 Resultados e Discussões

A seguir, apresentamos as duas questões aplicadas aos participantes, descrevemos seus objetivos e realizamos a análise das resoluções apresentadas.

A Questão 6 (Figura 1), se refere ao cálculo do perímetro de uma figura plana. Além de exigir do participante conhecimentos de aspectos algorítmico-intuitivos relacionados ao cálculo de perímetros e ao uso das informações relativas ao perímetro do trapézio dado, à soma dos lados da base e à ideia de congruência, o problema também exige a articulação de aspectos formais relacionados aos conceitos de perímetro, congruência, bases do trapézio e ao fato de este ser isósceles. O problema, desta forma, possibilita a articulação de diferentes conceitos e nos permite observar a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos descritos por Fischbein (1994), nas estratégias de resolução adotadas pelos estudantes.

6. A região sombreada da figura é formada pela junção de três trapézios congruentes ao trapézio isósceles ABCD.



Sendo o perímetro do trapézio ABCD igual a 30m e a soma das medidas das bases igual a 20m, determine, em metros, o perímetro da região sombreada.

Figura 1: Questão 6 do questionário diagnóstico
Fonte: Autores (2021).

A Figura 2 apresenta um exemplo de resolução da questão 6, considerada correta, realizada pela participante Marta.

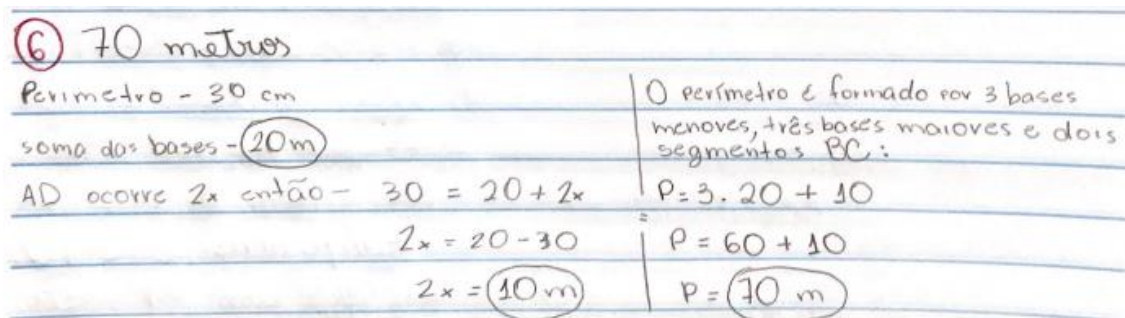


Figura 2: Resolução de Marta, para a Questão 6
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Em sua resolução, a estudante evidencia ter domínio sobre aspectos formais atrelados ao problema, pois indica entender que o perímetro da figura é relativo à medida de seu contorno, como escreve ao listar os segmentos que o compõem. Também indica compreender os conceitos de congruência e de trapézio isósceles, possivelmente havendo associação com aspectos intuitivos mobilizados pela visualização da ilustração que

acompanha a questão. Marta também indica compreender aspectos algorítmicos relacionados à estratégia de resolução adotada, contudo, comete um equívoco operacional, possivelmente devido à desatenção, que acabou por ser ignorado por parte da estudante durante o processo, ao subtrair 30 de 20 e obter 10 como resultado. Esse pequeno deslize, entretanto, não compromete a estratégia adotada e permitiu que a estudante resolvesse o problema corretamente.

A avaliação das respostas mostrou que 29% dos 78 participantes acertaram a Questão 6. Esse índice de acertos indica que muitos dos participantes tiveram dificuldades em compreender os conceitos envolvidos na resolução dessa questão. Isso também pôde ser observado a partir da análise dos erros realizada (Tabela 1), na qual podemos observar que 60% dos participantes deixaram a questão em branco ou sem resolução. Devemos destacar que as resoluções realizadas pelos participantes podem ser enquadradas em mais de uma classe de erro, logo, a soma dos percentuais pode superar 100%.

Tabela 1: Classes de erros da Questão 6

Descrição dos erros	%
A ₁ – Considerar a resposta como três vezes o perímetro do trapézio	16
B ₁ – Assumir valores arbitrários para as bases	15
C ₁ – Resolução sem sentido	15
D ₁ – Sem resolução/Em branco	60

Fonte: Autores (2021).

A classe de erro A₁, “considerar a resposta como três vezes o perímetro do trapézio”, foi identificada em 16% das resoluções erradas analisadas e é caracterizada pela multiplicação do perímetro do trapézio, 30 cm, por 3, uma vez que a figura é composta por 3 trapézios. A Figura 3, que exhibe a resolução de Paulo, é um exemplo desse tipo de erro.

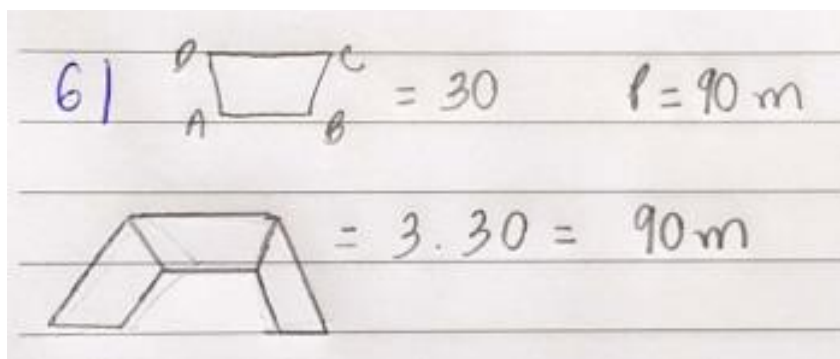


Figura 3: Resolução de Paulo para a Questão 6

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O participante adota em sua resolução uma relação de proporcionalidade entre os perímetros das figuras, considerando-os grandezas diretamente proporcionais, e valendo-se de aspectos algorítmicos e intuitivos (FISCHBEIN, 1994), ao não se inter-relacionarem com aspectos formais, levam-no a compreender que o perímetro da nova figura será o triplo do perímetro do trapézio dado. Os aspectos intuitivos influenciam a interpretação de Paulo em relação ao problema, em que assume como evidente que sendo a figura composta por três trapézios, então seu perímetro será a soma dos perímetros dos três trapézios, e esse raciocínio é traduzido pelos algoritmos utilizados por ele.

A não interação com os aspectos formais leva ao equívoco de interpretação realizado por Paulo, sendo esta situação possivelmente resultado, conforme Stefani e Proença (2018), causado por lacunas no ensino quanto a discussões conceituais sobre o perímetro e da carência de o relacionar à resolução de problemas, o que ocasiona um processo deficitário que pouco promove a interação dos três aspectos colocados por Fischbein (1994).

Presente em 15% das resoluções errôneas, a classe de erro B1, “Assumir valores arbitrários para as bases”, tem como característica a designação de valores arbitrários para as bases do trapézio, desde que esses valores respeitem o critério de a soma de ambas as bases resultar em 20 cm. Contudo, esses valores não são adequados aos aspectos construtivos de um trapézio isósceles com as medidas escolhidas. A resolução apresentada por Miriam, Figura 4, exemplifica a classe de erro B1.

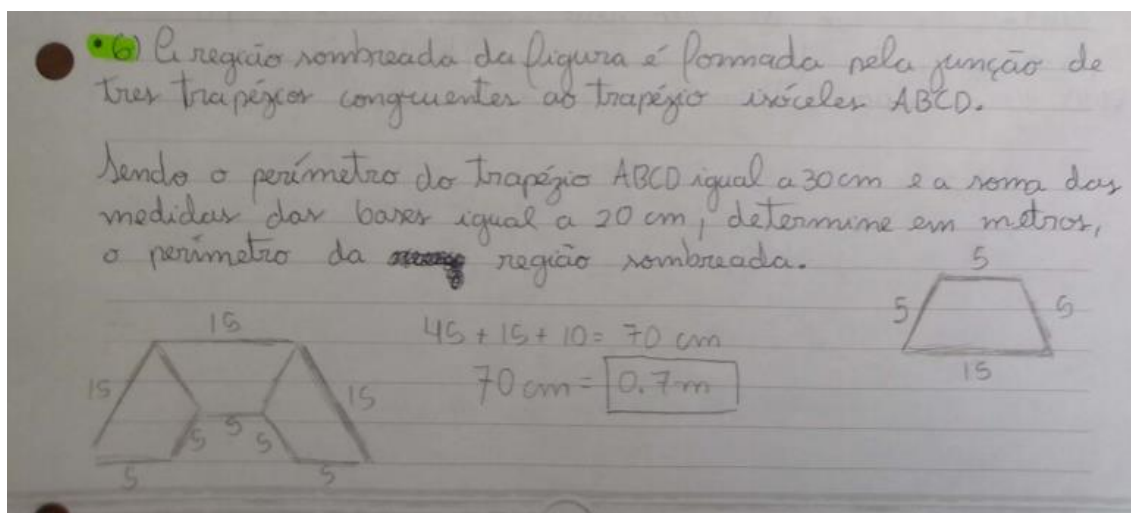


Figura 4: Resolução de Miriam, para a Questão 6
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

A resolução de Miriam, baseia-se em aspectos algorítmicos e intuitivos equivocados quanto à suposição de valores arbitrários para as bases, que cumprem

devidamente a condição de a soma das bases resultar em 20 cm. No entanto, falham conceitualmente, desrespeitando as características do trapézio isósceles, uma vez que não é possível construir um trapézio isósceles com tais medidas. Vemos que ela demonstra ter domínio sobre os aspectos algorítmicos envolvidos no cálculo do perímetro da figura, realizando os procedimentos de cálculo corretamente, assim como compreende o conceito de perímetro.

Conforme destacado por Fischbein (1994), os aspectos intuitivos condicionam as estratégias e interpretações utilizadas nas resoluções; no caso de Miriam, ao assumir esses valores para as bases, ela os valida a partir de aspectos algorítmicos, já que a soma de ambos respeita o critério imposto pelo enunciado. Observamos a não interação de aspectos formais com aspectos algorítmicos e intuitivos na estratégia tomada pela participante, pois o problema proposto não requisita que sejam determinadas as medidas dos lados para resolvê-lo. Contudo, é notável que a estudante entende certas características e informações fornecidas, como ao reconhecer os segmentos do trapézio que representam as bases e a propriedade de este ser isósceles, evidenciando bons conhecimentos sobre aspectos formais desses assuntos.

A adoção dessa estratégia pelos participantes também pode ser um indicativo de obstáculos atrelados à compreensão do significado da soma das bases e de como essa soma pode ser entendida no processo de resolução. Conforme destacado na resolução de Marta (Figura 2), em momento algum a participante procura definir valores para as bases, valendo-se apenas de aspectos formais e algorítmicos aos quais a informação do problema se refere. Dessa forma, há a ausência ou frágil interação de aspectos formais e aspectos algorítmicos relativos a essa informação, na qual podemos observar a prevalência de aspectos algorítmicos em detrimento dos formais, perspectiva que corrobora as conclusões destacadas por Guimarães *et al.* (2021).

A classe de erro C_1 , “resolução sem sentido”, pôde ser observada em 15% das resoluções consideradas erradas. Essa classe, diferente das demais, apresenta variações quanto aos erros identificados e às maneiras de resolução elaboradas e, devido a este fato, temos duas resoluções que a exemplificam: a Figura 5, que exhibe a resolução de Júlia, sucedida pela resolução de Cecília, na Figura 6.

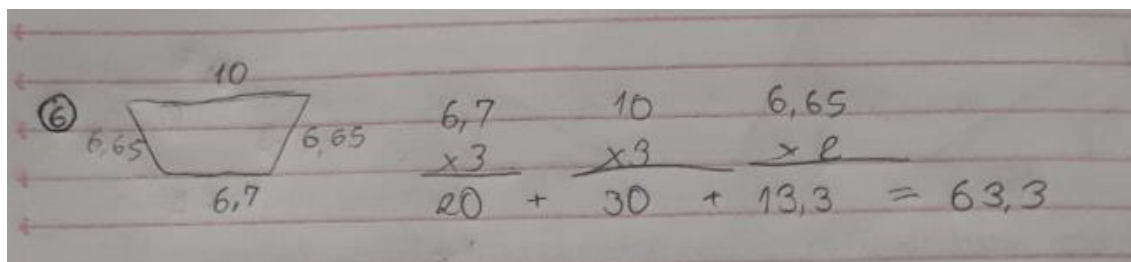


Figura 5: Resolução de Júlia, para a Questão 6
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

A resolução desenvolvida por Júlia, também foi classificada na classe de erro B₁, pois estima valores para os lados do trapézio; contudo, diferente do que foi observado anteriormente, a participante apenas considera o resultado do perímetro, não respeitando que a soma das bases seja igual a 20 cm, o que demonstra dificuldades relacionadas a aspectos formais atrelados às características da figura proposta na questão. A estratégia tomada para a determinação do perímetro da figura composta pelos três trapézios, que interage com aspectos intuitivos adequados ao problema, relaciona de forma correta os segmentos e suas medidas estimadas para as quantidades observadas na figura, no entanto, é observado que a estudante comete erro de cálculo em sua primeira conta de multiplicação e não o considera, expondo dificuldades relacionadas a aspectos algorítmicos.

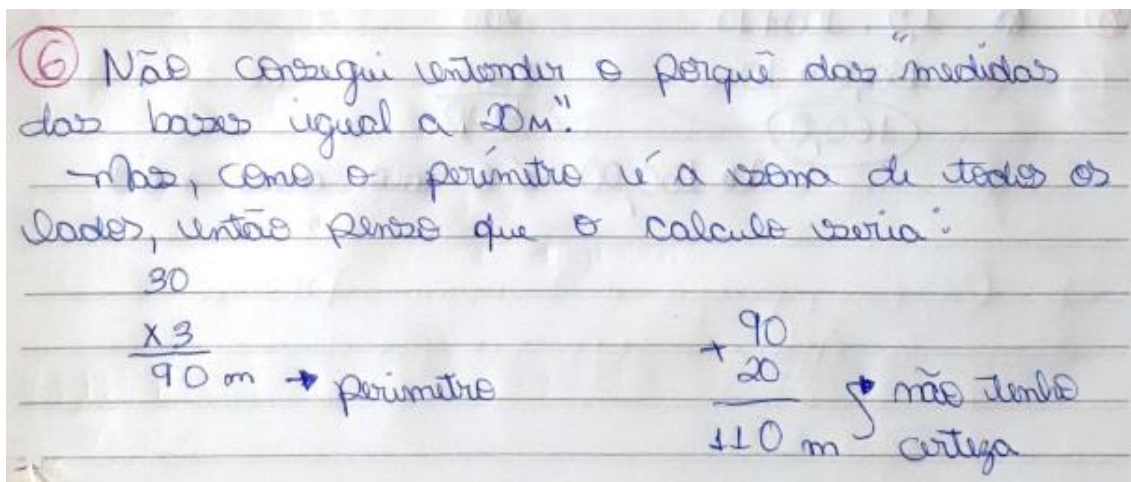


Figura 6: Resolução de Cecília, para a Questão 6
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

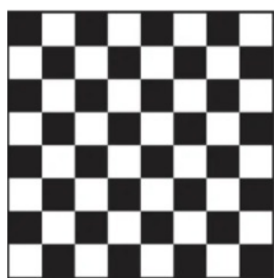
Cecília, por outro lado, apresenta características distintas em sua resolução em comparação ao caso de Júlia, ainda que ambas estejam identificadas na mesma classe de erros. Conforme destacado na Figura 6, a participante também comete o erro identificado

na classe A_1 (considerar a resposta como três vezes o perímetro do trapézio), ao multiplicar o perímetro do trapézio por três; entretanto, devido a aspectos intuitivos equivocados e dificuldades em aspectos formais, também soma ao perímetro calculado o resultado da soma das duas bases. Observamos, ainda, que a estudante não compreende a que se refere a informação fornecida pelo problema, situação descrita por ela na própria resolução. Entendemos que essas dificuldades podem ser causadas pela não interação de aspectos intuitivos e formais na interpretação do problema. Também é possível observar que a descrição que Cecília, dá ao perímetro está ligada diretamente a aspectos algorítmicos atrelados a este conceito, porém, a não interação destes com aspectos formais relacionados ao conceito de perímetro (medida do contorno de uma figura plana fechada) a impede de resolver corretamente o problema.

A classe de erro D_1 , “sem resolução/em branco”, é a classe de erro com maior percentual de frequência, 60%, com diferença considerável em comparação às demais classes identificadas. Esse percentual indica dificuldades e defasagens dos participantes em relação ao cálculo e conceito de perímetro, que podem estar atreladas a lacunas no ensino desses temas no Ensino Fundamental. Outra perspectiva que pode explicar esse tipo de situação pode ser a colocada por Henriques e Silva (2014), ao destacarem ser esses temas, muitas vezes, ensinados sem significado.

Seguimos com a análise da Questão 7.

7. O xadrez é considerado mundialmente um jogo de estratégias que utiliza um tabuleiro quadrangular, conforme ilustra a figura a seguir.



Considerando que todos os quadrados que compõem o tabuleiro, pretos e brancos, possuem 3 cm de lado, determine a área total dos quadrados pretos?

Figura 7: Questão 7 do questionário diagnóstico

Fonte: Autores (2021).

Para resolver essa questão é possível desenvolver diferentes estratégias, que podem estar atreladas à proficiência dos participantes com os conteúdos mobilizados na questão. A ideia de área e o seu cálculo são os principais temas a serem analisados, em

que buscamos compreender, a partir dos erros identificados, as dificuldades apresentadas pelos estudantes ao manifestarem conhecimentos referentes a este objeto matemático.

A resolução de Lúcio, destacada na Figura 8, é um exemplo de resolução correta.

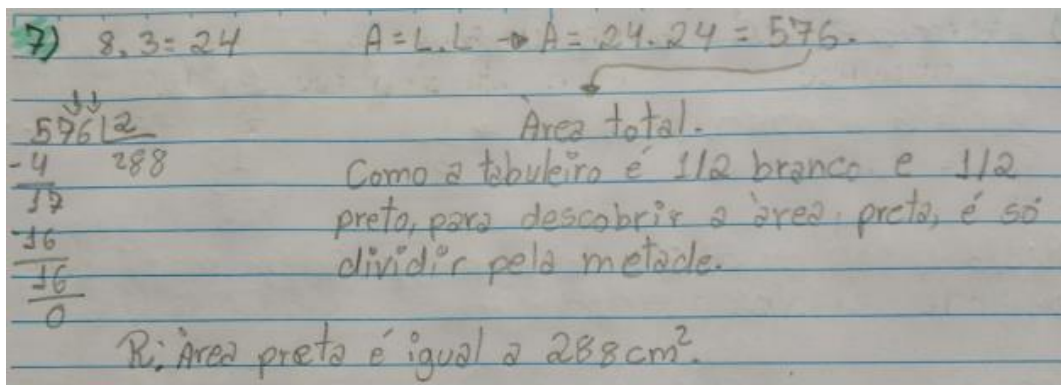


Figura 8: Resolução de Lúcio, para a Questão 7

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Lúcio, inter-relaciona em sua resolução aspectos algorítmicos, formais e intuitivos relacionados ao cálculo de área de maneira correta, o que lhe permite resolver o problema. Ao compreender que a área total dos quadrados pretos corresponde à metade da superfície do tabuleiro e ao escrever a fórmula da área do quadrado, mobiliza aspectos formais sobre o conceito de área; ao reconhecer um padrão no tabuleiro, mobiliza aspectos intuitivos que lhe permitem concluir que a quantidade total de quadrados pretos corresponde à metade dos quadrados totais. Por fim, mobiliza corretamente aspectos algorítmicos relacionados às multiplicações e divisões exigidas na estratégia adotada por ele, realizando os cálculos necessários para obtenção da resposta.

Nessa questão, 45% dos participantes obtiveram resultados corretos, percentual acima do observado na Questão 6. No entanto, entendemos que esse percentual é ainda abaixo do esperado, pois o problema proposto envolve o cálculo da área de quadrados, conteúdo abordado de maneira recorrente no Ensino Fundamental. Assim, pressupõe-se que tais conceitos e habilidades, como o reconhecimento da diferença entre perímetro e área, a decomposição de figuras planas e o relacionamento com a área, bem como os aspectos algorítmicos envolvidos, sejam do domínio de alunos ingressantes no Ensino Médio.

A partir da análise do conteúdo das resoluções dos participantes e baseando-se na Análise de Erros proposta por Cury (2007), elaboramos a Tabela 2, que exhibe as classes de erros identificadas nessa questão, com seus respectivos percentuais. Como as

resoluções podem apresentar mais de uma classe de erro, a soma dos percentuais pode superar 100%.

Tabela 2: Classes de erros questão 7

Descrição do erro	%
A ₂ – Calcular a área do tabuleiro	9
B ₂ – Calcular o perímetro do quadrado	19
C ₂ – Multiplicar o lado do quadrado pelo número de quadrados	16
D ₂ – Resolução sem sentido	40
E ₂ – Sem resolução/Em branco	23

Fonte: Autores (2021).

A classe de erro A₂, “calcular a área do tabuleiro”, esteve presente em 9% das resoluções consideradas erradas. Esse tipo de erro é caracterizado pelo cálculo da área do tabuleiro como resposta para o problema e é exemplificado pela resolução de Gustavo, destacada na Figura 9.

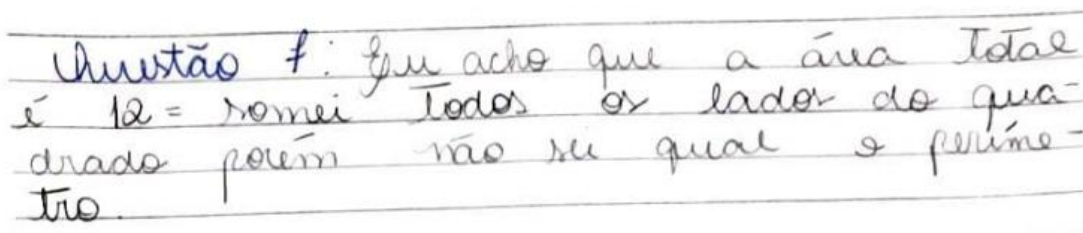


Figura 9: Resolução de Gustavo, para a Questão 7

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Observamos, na resolução de Gustavo, e em sua resposta final, que o estudante mobiliza aspectos intuitivos equivocados e comete um erro de interpretação do problema ao apresentar como resposta a medida da área total do tabuleiro. Ele mobiliza aspectos algorítmicos corretos resultantes do cálculo acertado da área do tabuleiro; contudo, ao não relacioná-los a aspectos intuitivos e formais sobre o cálculo de área proposto, é levado ao equívoco de desconsiderar a proporção de quadrados pretos em relação ao total de quadrados, levando-o a uma resolução incorreta.

Presente em 19% das resoluções consideradas erradas, a classe de erro B₂, “calcular o perímetro do quadrado”, é a terceira classe de erro com maior percentual observado e indica uma confusão dos participantes entre os conceitos de perímetro e área. Como exemplo temos a resolução de Larissa (Figura 10), que explicita o embaralhamento entre os dois objetos matemáticos.

Questão 7

Cada quadradinho 3 cm de lado

$$3 \cdot 8 = 24$$
$$24 \cdot 24 = 576 \text{ cm}^2$$

Figura 10: Resolução de Larissa para a Questão 7

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Observamos nessa resolução que a estudante, na tentativa de calcular a área do quadrado, declara que somou todos os lados e, de maneira equivocada, considera essa soma, que se trata na realidade do perímetro, como a área do quadrado, ainda salientando em sua notação que desconhece o perímetro do quadrado, o que revela sua confusão conceitual. Neste caso, entendemos que a não interação de aspectos algorítmico-intuitivos relacionados aos algoritmos dos cálculos de áreas e perímetros, com aspectos formais associados a esses conceitos, pode explicar as incompreensões manifestadas pela estudante. Conforme o destaque de Santos (2014), os estudantes confundem esses conceitos e muitas vezes não discernem as características dimensionais entre os dois objetos matemáticos, questão que também foi apontada e discutida por Henriques e Silva (2014).

A terceira classe de erro, identificada como C₂ (multiplica o lado do quadrado pelo número de quadrados), foi identificada em 16% das resoluções erradas. A Figura 11 traz a resolução de Júlia, exemplificando essa classe de erro.

7) A área total dos quadrados pretos é 96.

$$32 \times 3 = 96$$
$$64 \div 2 = 32 \quad 8 \times 8 = 64$$

Figura 11: Resolução de Júlia, para a Questão 7

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Em sua resolução, Júlia comete erros conceituais (aspectos formais) e revela aspectos intuitivos equivocados. Inicialmente, em sua estratégia, ela determina o número

total de quadrados pretos presentes no tabuleiro de maneira correta; entretanto, indica não ter domínio sobre o conceito e os algoritmos associados ao cálculo de área, especialmente de um quadrado, pois multiplica o número total de quadrados pretos pela medida do lado de cada quadrado. Nesse caso, a não interação de aspectos algorítmico-intuitivos manifestada na estratégia adotada, com aspectos formais associados a esse conceito, explica as dificuldades apresentadas pela estudante.

A classe de erro “resolução sem sentido”, D_2 , foi identificada em 40% das resoluções erradas e é a classe mais recorrente entre as respostas analisadas, indicando a existência de dificuldades por parte dos estudantes em estabelecer estratégias de resolução, assim como de interpretação do problema proposto, possivelmente também atrelada a defasagens conceituais (aspectos algorítmicos, intuitivos e formais). As resoluções desenvolvidas por Joana (Figura 12) e Guilherme (Figura 13), são dois exemplos desta classe.

7. $8 \times 4 = 32$ 32
 32×12 $\times 12$
 64
 32 +
 384

O lado total dos quadrados pretos é 384

Figura 12: Resolução de Joana, para a Questão 7
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

A resolução de Joana exibe uma confusão de interpretação do problema proposto, que pode ser observada em sua resposta final, na qual aparenta desconhecer o conceito de área, possivelmente confundindo-o com o conceito de perímetro, pois afirma ter calculado o lado total de quadrados. Observamos em seu processo de resolução que há a indicação de que ela calcula o produto entre o número de lados do quadrado e a medida desses lados ($4 \cdot 3$), isto é, o perímetro do quadrado, tendo como resultado 12 cm; em seguida, determina a quantidade total de quadrados pretos do tabuleiro, 32, e realiza o produto dessas duas grandezas, obtendo um resultado que corresponde à soma dos perímetros desses quadrados, ao qual se refere como “lado total” dos quadrados pretos. A participante aparenta ter domínio sobre os aspectos algorítmicos envolvidos em sua

estratégia, executando o algoritmo de multiplicação de maneira correta; contudo, suas dificuldades e defasagens encontram-se em aspectos formais, que não interagem com aspectos algorítmico-intuitivos, possivelmente levando-a a confundir os conceitos de área e perímetro. As dificuldades da estudante com relação a esses conceitos também se manifestam na resposta final que ela apresenta, pois descreve como “o lado total” dos quadrados pretos o resultado que obteve, e não como o perímetro.

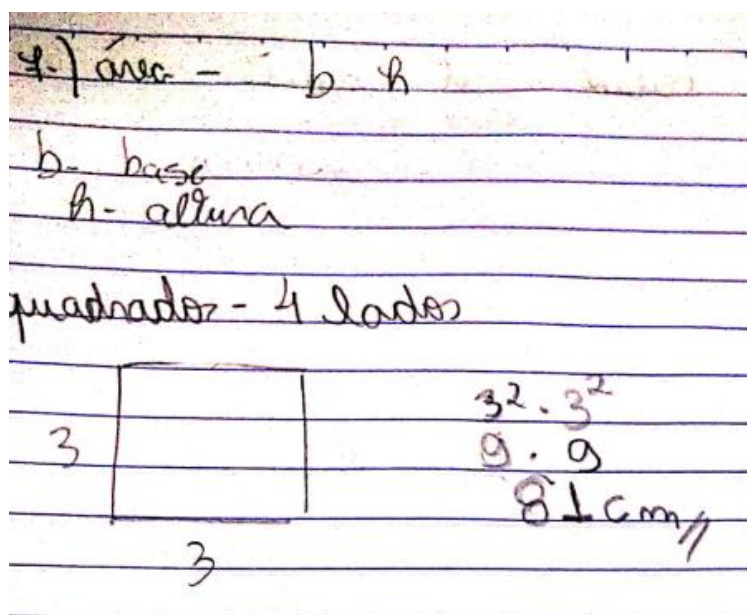


Figura 13: Resolução de Guilherme, para a Questão 7
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Em sua resposta, Guilherme (Figura 13), inicialmente demonstrou conhecer o algoritmo atrelado ao cálculo da área de retângulos e quadrados; no entanto, no processo de resolução evidenciam-se equívocos, possivelmente atrelados a aspectos intuitivos não inter-relacionados com aspectos algorítmicos e formais, sobre os quais o estudante aparenta ter domínio, já que os suscita nas etapas anteriores da resolução, quando eleva os lados ao quadrado e os multiplica em seguida. Conforme salientado por Fischbein (1994), os aspectos intuitivos exercem um papel, muitas vezes, coercitivo sobre a atividade matemática desenvolvida por um sujeito; tal característica possivelmente levou o estudante a considerar os quatro lados do quadrado para a realização do cálculo, não os relacionando aos aspectos algorítmicos em que foram denotados anteriormente, e aos aspectos formais envolvidos na fórmula indicada no início da resolução, possivelmente devido a dificuldades atreladas ao conceito de área.

Essa classe de erro também está associada a dificuldades no desenvolvimento de estratégias de resolução adequadas ao problema proposto. Isso,

possivelmente, é resultado de defasagens conceituais relacionadas à área e a problemas envolvendo esse tema.

Em 23% dos dados coletados, foram constatadas respostas em branco e sem resolução, classificadas na classe de erro E_2 , o que pode ser um indicativo das dificuldades dos estudantes com o cálculo de área.

5 Considerações finais

Neste estudo, tivemos o objetivo de identificar as dificuldades e defasagens que os estudantes ingressantes no Ensino Médio apresentam referentes ao cálculo de área e perímetro de figuras geométricas, buscando analisar as resoluções com base na interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos (FISCHBEIN, 1994).

A análise debruçou-se sobre duas questões aplicadas em um questionário aos participantes no começo do ano letivo de 2021; a primeira questão consistiu em um problema envolvendo o cálculo do perímetro de uma figura composta por três trapézios congruentes e a segunda em um problema relativo ao cálculo da área total de quadrados pretos de um tabuleiro de xadrez. Com os resultados, observamos um desempenho abaixo do esperado para estudantes ingressantes no Ensino Médio, uma vez que a primeira questão teve aproveitamento de apenas 29% e, a segunda, de 45%. Nesse sentido, cumpre destacar que os documentos oficiais brasileiros (BRASIL, 1998; 2018) sustentam que ao concluir os anos finais do Ensino Fundamental, os estudantes devem ter domínio sobre habilidades e conceitos envolvendo figuras geométricas, cálculo de área e perímetro, sabendo compreendê-los e diferenciá-los.

Observamos, nas respostas fornecidas, a prevalência de estratégias equivocadas por parte dos estudantes, representadas principalmente pelas classes de erro C_1 e D_2 (resoluções sem sentido) e o percentual de respostas sem resolução ou em branco, classes D_1 e E_2 , devendo ser destacado o caso da primeira questão, no qual 60% dos participantes a deixaram em branco. Esses resultados evidenciam dificuldades dos participantes na elaboração de estratégias de resolução para os problemas propostos e reiteram as posições apontadas por Munhos e Klaus (2016), que destacaram tais obstáculos capazes de resultar defasagens conceituais do ensino desses assuntos.

As resoluções analisadas indicam dificuldades e obstáculos relacionados a aspectos formais, envolvidos nos conceitos de área, perímetro e figuras geométricas, que observamos não estarem em interação com aspectos algorítmicos e intuitivos presentes

nas resoluções. Essa perspectiva se revela, principalmente, na ocorrência de equívocos e erros de interpretação do problema e das informações enunciadas, assim como na execução de algoritmos e procedimentos desconexos aos conceitos envolvidos nos problemas. Esse quadro de dificuldades reitera os apresentados por Stefani e Proença (2018), que observaram que os participantes de sua pesquisa demonstravam não ter domínio e conhecimentos referentes aos conceitos de área e perímetro.

Nas resoluções da segunda questão, também foi possível identificar a confusão conceitual de alguns participantes sobre as noções de área e perímetro. Esses resultados encontram-se em consonância com os que são colocados por Henriques e Silva (2014) e Santos (2014), que concluíram que os estudantes tendem a confundir os conceitos de área e perímetro, não levando em conta as diferenças dimensionais entre as duas grandezas.

Nossas análises indicaram a prevalência de aspectos intuitivos e algorítmicos nas resoluções apresentadas pelos participantes e, nesse sentido, corroboram os resultados de Guimarães *et al.* (2021), que também observaram a valorização que os participantes de sua pesquisa conferem aos procedimentos em detrimento dos conceitos, o que resulta em dificuldades quanto ao uso desses objetos, possivelmente causadas por um tipo de ensino focado no uso de algoritmos em detrimento da valorização de conceitos e ideias. Essa situação também é observada por Silva (2009), ao apontar a deficiência no ensino de Geometria e dificuldades de parte dos sujeitos de sua pesquisa em conceituar área e perímetro, que podem ser explicadas, segundo o autor, por um tratamento excessivamente algébrico dispensado a esses temas.

De maneira geral, entendemos que para o aprendizado de temas de Matemática é necessária a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, conforme sustentado por Fischbein (1994). Muitas das dificuldades apresentadas pelos participantes da pesquisa, entendemos, encontram explicação num tipo de ensino que não valoriza essa interação, conforme procuramos destacar ao longo da discussão.

Esperamos que os resultados obtidos possam colaborar com as reflexões e discussões quanto ao ensino de áreas e perímetros de figuras planas na Educação Básica, com base no desenvolvimento de estudos e pesquisas que possam aprofundar nossas compreensões sobre as dificuldades que permeiam o ensino e aprendizagem desses objetos matemáticos. Tendo isso em vista, estamos desenvolvendo um estudo sobre as concepções de estudantes do Ensino Médio quanto aos conceitos de área e perímetro, com base em atividades investigativas realizadas com o uso do Geoplano (físico e digital). O

propósito desta nova pesquisa é propor e avaliar as potencialidades envolvidas nessas atividades, de modo que possam auxiliar professores no ensino desses temas.

Agradecimentos

Agradecemos aos avaliadores pelas contribuições ao texto e ao Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos pela bolsa de extensão concedida.

Referências

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 3.ed. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: Ministério da Educação, 1998.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In: BIEHLER, R. *et al.* (Org.) **Didactics of mathematics as a scientific discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994. p.231-245.

GUIMARÃES, R. C. C. *et al.* Uma análise das dificuldades de ingressantes no ensino médio na resolução de questões sobre área e perímetro. **Revista de Educação, Ciência e Tecnologia**, Presidente Epitácio, v. 2, n. 1, p. 4-24, jan.-jul. 2021. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/recet/article/view/1721>. Acesso em: 27 set. 2021.

HENRIQUES, M. D.; SILVA, A. M. Dificuldades de aprendizagem de área e perímetro na perspectiva da produção de significados. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Jaén. v. 37, p. 31-55, mar. 2014. Disponível em: <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/741>. Acesso em: 10 set. 2021.

MUNHOS, R. A. F.; KLAUS, V. L. C. A. Investigando perímetro e área por meio da resolução de problemas: vivências com alunos de um 8º ano do ensino fundamental. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**, 2016. Curitiba: SEED/PR., v.1 (Cadernos PDE), 2018. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unioeste_reginaaparecidafreitas.pdf. Acesso em: 10 set. 2021.

SANTOS, J. A. S. Problemas de ensino e de aprendizagem em perímetro e área de figuras planas. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 9, n. 1, p. 224-238. 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2014v9n1p224>. Acesso em: 15 set. 2021.

SILVA, J. A. As relações entre área e perímetro na geometria plana: o papel dos observáveis e das regulações na construção da explicação. **Bolema**, Rio Claro, v. 22, n. 34, p. 81-104. 2009. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/3300>. Acesso em: 10 set. 2021.

DOI: <https://doi.org/10.48075/ReBECeM.2.v.6.n.3.29086>

STEFANI, A.; PROENÇA, M. C. Resolução de problemas de área e perímetro: análise dos conhecimentos e dificuldades de alunos dos anos finais do ensino fundamental. **Revista Valore**, Volta Redonda, v. 3, p. 353-363. 2018. Disponível em: <https://revistavalore.emnuvens.com.br/valore/article/view/177>. Acesso em: 10 set. 2021.

Recebido em: 29 de março de 2022

Aceito em: 07 de novembro de 2022