ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2023.v.7.n.4.29749

UM ESTUDO SOBRE A FUNÇÃO DE EXPANSÃO DISCURSIVA E OPERAÇÕES QUE CARACTERIZAM O RACIOCÍNIO SEGUNDO RAYMOND DUVAL

A STUDY ON THE FUNCTION OF DISCURSIVE EXPANSION AND OPERATIONS THAT CHARACTERISE REASONING ACCORDING TO RAYMOND DUVAL

Méricles Thadeu Moretti[1]

Resumo: A noção de função de expansão discursiva da língua permite que se analise a produção discente em resposta à diversas atividades de ensino propostas. Por meio dessa função se pode perceber o que o aluno de fato está "pensando" quando é provocado para produzir respostas. Tais respostas estimuladas por questões do tipo "justifique a resposta" podem constituir formas de raciocínio segundo a perspectiva de Raymond Duval. Tendo em vista uma ausência muito sentida de demonstrações no ensino e nos livros didáticos de matemática no nível básico, o desenvolvimento do raciocínio fica muito por conta de atividades que possam estimular o seu desenvolvimento. Que tipos de atividades são essas? Para responder a essa questão, principalmente, tomou-se por base os trabalhos de Raymond Duval sobre a função de expansão discursiva relacionada ao raciocínio, para poder caracterizar discursos discentes em atividades matemáticas que possam ser considerados raciocínio e com isso contribuir para a sua prática.

Palavras-chave: expansão discursiva; raciocínio; argumentação.

Abstract: The notion of function of discursive expansion of the language allows the analysis of the student's production in response to the various teaching activities proposed. Through this function it is possible to perceive what the student is "thinking" when provoked to produce answers. Such answers stimulated by questions like "justify your answer" may constitute forms of reasoning according to Raymond Duval's perspective. Given a much-felt absence of demonstrations in basic level mathematics teaching and textbooks, the development of reasoning is very much left to activities that can stimulate its development. What kinds of activities are these? To answer this question, mainly, it was taken as a basis the work of Raymond Duval on the function of discourse expansion related to reasoning, to be able to characterize discourses in mathematical activities that can be considered reasoning and thus contribute to its practice.

Keywords: discursive expansion; reasoning; argumentation.

Introdução

Nos níveis de ensino médio e fundamental praticamente desapareceram as demonstrações em matemática. Em seu lugar, algumas questões solicitam justificativas ou explicações que exigem um certo mecanismo de elaboração que podem estar baseadas no raciocínio e que tomam por base o registro discursivo. Para Duval (1995) todo sistema de representação semiótica possui três funções metadiscursivas: a comunicação, o tratamento e a

[1] Doutor em Didática da Matemática pela Universidade de Estrasburgo. Professor titular e permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. E-mail: mthmoretti@gmail.com.

objetivação. E para constituir-se como língua, ele deve, em geral, cumprir ainda as quatro funções discursivas: (1) função referencial para designar objetos; (2) função apofântica para expressar enunciados completos; (3) função de reflexividade para marcar o valor, modo ou estatuto para uma expressão por aquele que anuncia e; (4) função de expansão discursiva que religa enunciados entre si formando um todo coerente.

Todas essas funções discursivas e meta discursivas são ligadas entre si, mas nesse trabalho vamos enfatizar a função de expansão discursiva, uma vez que estamos interessados no raciocínio que participa de vários modos da função de expansão discursiva e que possui ligações com o raciocínio na perspectiva de Duval (1992, 1995, 2004).

1 A função de expansão discursiva e o raciocínio

Em uma língua não basta nomear os objetos, ela precisa cumprir a função apofântica, ou seja, dizer alguma coisa de forma completa a partir desses objetos designados: “Um ato de expressão é um **ato completo do discurso** quando a expressão produzida toma um valor determinado no universo cognitivo, representacional ou relacional dos interlocutores” (Duval, 1995, p. 111-112).

O valor expresso nessa citação é um dos componentes do sentido de uma proposição enunciada conforme se pode observar na Figura 1 a seguir.

Figura 1: os três mais importantes componentes do sentido de uma proposição enunciada.
Fonte: Duval (2004, p. 103).

Esses valores estarão presentes nas produções discentes em respostas a alguma provocação em exercícios propostos ou no diálogo entre alunos. Situemos alguns exemplos de valor em alguma proposição enunciada:

- unicamente um valor social, "Está difícil resolver isso aqui!";
- um valor epistêmico e um valor social, por exemplo, quando uma promessa é feita e cuja realização parece ser pouco verossímel ou absurda;
- um valor epistêmico e um valor lógico se o ato do discurso se situa em um contexto teórico, "A soma dos ângulos de um triângulo é maior do que 180º" (Duval, 1995, p. 112).

Apesar de que muitos elementos constantes no esquema da Figura 1 sejam autoexplicativos, vários deles serão retomados ao longo do texto que segue.

2 O raciocínio e a expanção discursiva

A Figura 2, a seguir, apresenta as formas de expanção discursivas e a sua ligação com o raciocínio.

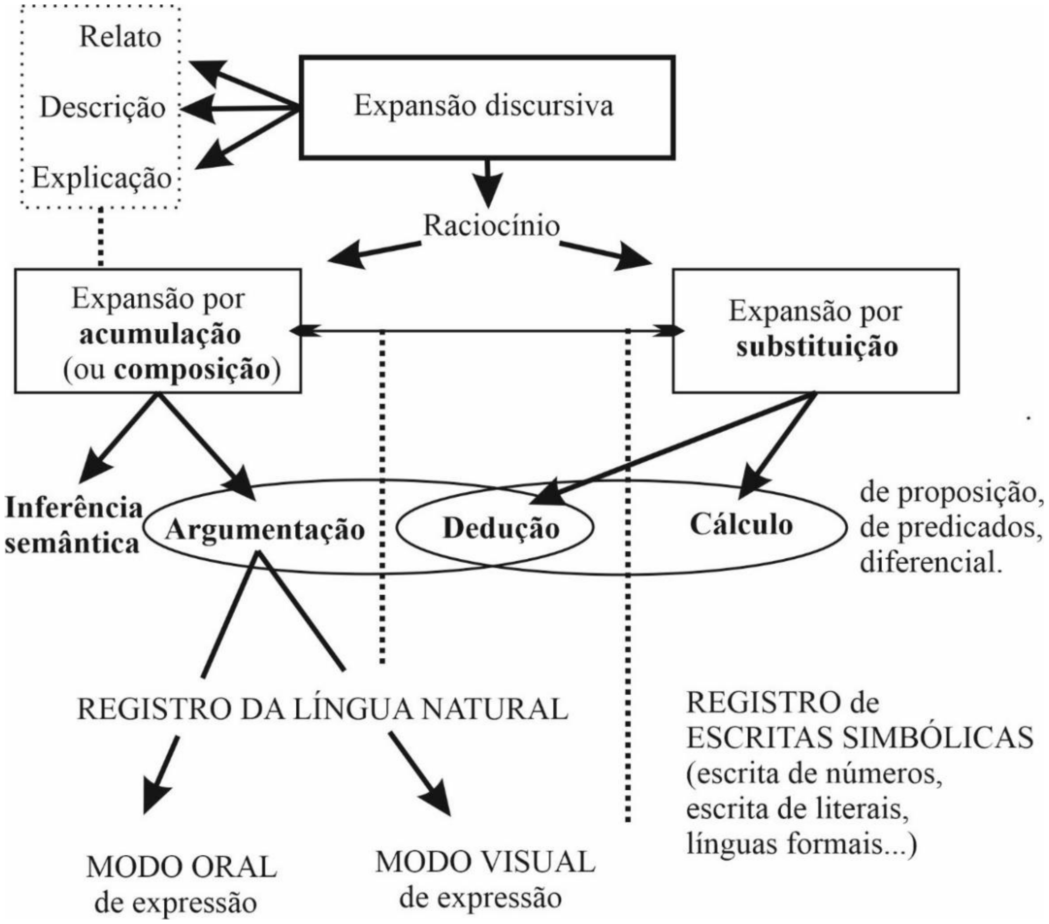


Figura 2: diferenciações de condutas do raciocínio em função da expanção discursiva.
Fonte: Duval (2004, p. 106).

Antes de comentar o esquema da Figura 2, discutiremos o que Duval chama de raciocínio, termo empregado no ensino com compreensões muito distintas, tais como raciocínio espacial, raciocínio algébrico, raciocínio geométrico etc. Mas o que significam? Para Duval (1995) o raciocínio se caracteriza de dois modos: (1) diz respeito ao caminho que, a partir de uma ou mais proposições, chega a uma outra proposição como conclusão. Neste caso fortemente a língua é utilizada como meio semiótico. As demonstrações em matemática são exemplos dessa situação; (2) "procede-se por anticipação selecionando-se aquelas que são confirmadas." (p. 209). Essa última situação não está ligada à utilização da linguagem, mas à manipulação de instrumentos ou objetos.

Uma questão que surge diante dessas duas situações relacionadas ao raciocínio é se elas são reveladoras do mesmo processo cognitivo. Para Duval (1995), a ideia de que há uma "equivalência funcional" entre essas duas formas de raciocínio não permite analisar o funcionamento nem mesmo evidenciar as condições de aprendizagem do raciocínio ligado à utilização da linguagem. Se considerarmos o jogo de xadrez como um tipo de raciocínio combinatório, o seu desenvolvimento não implica necessariamente no desenvolvimeto da demonstração em matemática, em que a linguagem natural faz parte de forma muito forte: o sentido inverso também é verdade, ou seja, desenvolver a demonstração em matemática não implica necessariamente no desenvolvimento do raciocínio no jogo do xadrez (Duval, 2022). Em suma, jogar xadrez desenvolve um tipo de raciocínio que não é o mesmo da demonstração em matemática e vice-versa.

Outra situação que se pode observar sobre a inferência semântica é na compreensão de definições e teoremas. Tomemos, por exemplo, as definições equivalentes de função injetora a seguir: sejam x_1 e x_2 elementos quaisquer do domínio de uma função real f. A função f é injetora no caso em que:

(a) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $(p \Rightarrow q)$.

Usando a inferência semântica, a função f é injetora também no caso em que:

(b) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ $(\sim q \Rightarrow \sim p)$.

Aqui a inferência semântica tomou por base a equivalência lógica das proposições direta (a) e da sua contrapositiva (b) ($p \Rightarrow q$ é equivalente $a \sim q \Rightarrow \sim p$).

Consideremos o exemplo da função $f(x) = x^2$ para o caso em que $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$.
- para a definição (a) e com esses valores de x_1 e x_2 em que $x_1 \neq x_2$ aconteceu que a conclusão não é verdadeira, uma vez que, $f(x_1) = f(x_2)$. Aqui quando se argumenta que *f* não é injetora, está sendo usada também a inferência discursiva por conta da não validade da conclusão;
- para o caso da definição (b) e com os valores de $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$, tem-se que $f(x_1) = f(x_2)$. Aqui também foi usada uma inferência semântica como em um contraexemplo em que a hipótese é verdadeira e a conclusão falsa. Por esta razão é que basta apresentar o gráfico cartesiano para afirmar que a função $f(x) = x^2$ não é injetora, como se pode ver na Figura 3 a seguir. O registro auxiliar cartesiano da função *f(x)* = x^2, que contém os pontos $(-2, 4)$ e $(2, 4)$, também permite concluir que a função real f não é injetora, pois $f(-2) = f(2) = 4$.

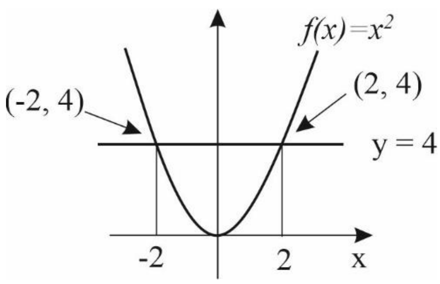


Figura 3: gráfico da função *f(x)* = x^2 e $y = 4$ com destaque para os pontos $(2, 4)$ e $(-2, 4)$.
Fonte: O autor.

No enquadramento pontilhado da Figura 2, há outras formas de expansão discursiva: relato, descrição e explicação, que Duval (1995) considera que não sejam raciocínios, uma vez que para esse autor o raciocínio, sob o ponto de vista estrutural, é uma forma de expansão discursiva que se volta para um enunciado alvo com o objetivo:

> - de modificar o valor epistêmico, semântico ou teórico que este enunciado alvo tem em um dado estado de conhecimento ou em um meio social dado;
> - e, por via de consequência, modificar o valor de verdade quando certas condições particulares de organização discursiva são preenchidas (Duval, 1995, p. 233).

Esses valores a que Duval se refere nessa citação estão assinalados na Figura 1 como componentes do sentido de um enunciado completo: um teorema em matemática tem todas essas caraterísticas, enunciado alvo e valor a ser confirmado em um dado meio de contexto global de referência.

Conforme se pode ver na Figura 2, a expansão por acumulação (ou composição) dá origem a inferência semântica e a argumentação que se utilizam da linguagem natural ou formal. A inferência semântica é algo bastante presente na produção discente, incluindo frases soltas isoladas, mas que juntadas podem resultar um enunciado completo: esta completude é uma característica importante que uma linguagem deve permitir, segundo Duval (1995).

Considerando o esquema da Figura 2, em seu lado direito, há outra forma de expansão discursiva que é a expansão por substituição, que tem os modos de cálculo e de dedução. O cálculo funciona por substituições sucessivas como, por exemplo, na resolução de equação. Já a dedução é parte da argumentação e é própria da demonstração em matemática. Demonstrar uma afirmação, um teorema, ou demonstrar ou refutar uma conjectura é parte essencial do desenvolvimento da matemática.

3 A Argumentação e a expansão discursiva

No âmbito escolar é bastante comum usar os termos “justifique a tua resposta” ou simplesmente “justifique” em questões propostas aos alunos, mas que possuem o mesmo significado de “explique a tua resposta”. O que se pode perceber é que explicar ou justificar tem o mesmo sentido quando colocados em questões propostas aos alunos. No entanto, o termo “explicação” para Duval (1995) tem um sentido bem específico, pois pode apresentar as mesmas marcas discursivas de uma argumentação, mas é diferente do raciocínio sob dois pontos:

> O primeiro é que a explicação não tem por objetivo modificar o valor epistêmico do enunciado alvo, mas de trazer novos elementos de informação sobre o fenômeno a explicar que está mencionado no enunciado alvo.
> O segundo é que os valores epistêmicos das proposições não possuem papel algum na expansão discursiva.
> [...] uma explicação descreve relações de causalidade entre os fenômenos, um raciocínio desenvolve relações de dependência entre as proposições.
> É somente nos raciocínios, e não nas descrições, explicações ou recitos que o valor epistêmico das proposições, e *a fortiori* suas transformações, é um fator essencial de expansão discursiva (Duval, 1995, p. 233 - 234).

Pela citação tem-se claramente o entendimento de Duval de que a explicação não é considerada um raciocínio. Mas em exercícios no Brasil, os termos justificar e explicar podem dar origem a raciocínios, como no problema da Figura 4, que discutiremos a seguir. Por esse motivo, utilizaremos o termo "justificar" para significar também "explicar" com o sentido que usamos aqui nas escolas no Brasil. Reservaremos o termo explicar apenas para ser usado no sentido dado por Duval (1995).

O problema, como se pode ver na Figura 4, solicitava ao aluno justificar a resposta, ou seja, nos dois modos de cobrança dos pintores, qual dos dois cobra mais barato pelo serviço de pintura?

Uma empresa possui um salão composto por um retângulo e uma metade de círculo, conforme a figura a seguir. Considerando as medidas indicadas, calcule:

a) Qual a área deste salão? (utilize o valor aproximado de $\pi = 3{,}14$)
b) Digamos que a empresa irá pintar o piso deste salão e possui duas opções: o **pintor A** cobra 15 reais por metro quadrado e mais uma taxa fixa de descolamento até o local de 400 reais. Já **pintor B** cobra 17 reais o metro quadrado e não cobrará nenhuma taxa de deslocamento. Qual pintor sairá mais barato? Justifique.

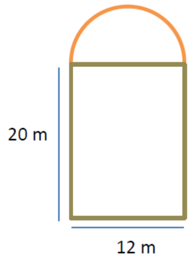


Figura 4: problema que solicita justificativa.
Fonte: Sabel (2021, p. 41).

Um dos estudantes efetuou a seguinte resposta ao item b da questão:

Pintor A

Área: 296,52
R$: 15 reais
Taxa: 400 reais
↓
296,52.15 = 4447
4447 + 400 = 4847 reais

Pintor B

Área: 296,52
R$: 17 reais
↓
296,52.17 = 5040 reais

Figura 5: resposta de um aluno à questão proposta.
Fonte: adaptado de Sabel (2021, p. 61).

Inicialmente, o aluno calcula a área de forma correta com os dados fornecidos e $\pi = 3{,}14$ para em seguida utilizá-la nas duas situações de cobrança dos pintores. O cálculo da área e do valor que cada pintor da obra cobra, caracteriza um raciocínio (ver Figura 2) com uma expansão discursiva por substituição. Observamos que a área foi calculada com dois decimais após a vírgula, mas os centavos (4447,80 e 5040,84) foram deixados de lado. De qualquer forma esse lapso, nesse caso, não poderia modificar a decisão por conta da diferença dos valores inteiros dos preços cobrados pelos pintores.

O enunciado alvo é "Qual pintor sairá mais barato?" e para chegar à conclusão, ou seja, definir o valor epistêmico e lógico, será necessário comparar os valores finais obtidos (4847 reais e 5040 reais) e concluir que "o pintor A é o mais barato, cobrará R$ 4847 pelo trabalho" segundo o aluno. O que houve foi uma expansão discursiva por composição ou acumulação (ver lado esquerdo da Figura 2) mesmo que isso estivesse de forma implícita, pois no discurso do aluno, ele não faz referência direta a uma comparação dos valores calculados, a subentende ao mencionar apenas o valor mais barato.

Para que um discurso possa ser considerado um raciocínio, será preciso que tenha uma proposição a ser justificada e estar centrado no valor lógico ou epistêmico (ver valores na Figura 1). O fato de haver uma indagação a ser respondida no problema proposto (Qual pintor sairá mais barato?) não invalida o caso, porque poderia ser muito bem uma frase apofântica do tipo "É o pintor B que cobra mais barato" a ser analisada, e as condições de resolução do problema não mudariam.

Em resumo, houve raciocínio:

- de expansão discursiva por substituição, quando o aluno efetuou os cálculos e chegou aos valores de cobrança para cada pintor;
- de expansão por acumulação ou composição, quando um valor foi calculado e comparado, mesmo que de forma subentendida ao outro valor calculado do preço cobrado pelo pintor para a tomada de decisão.

São diversas as formas de expansão discursivas que podem ocorrer em um discurso, uma delas é a expansão natural, em que apenas o conhecimento da língua é suficiente. As frases: "Choveu hoje." e "Vários carros derraparam na pista." criam uma ligação de causa e efeito, mesmo que tal ligação não esteja explicitamente escrita. Na resposta do aluno ao problema da Figura 4, há essa forma de expansão por inferência discursiva (ver lado esquerdo da Figura 1), quando o aluno deixa implícita a comparação que faz dos preços praticados pelos pintores em sua conclusão de que "o pintor A é o mais barato, cobrará R$ 4847 pelo trabalho". É o leitor (professor) que precisa constatar o preço calculado do pintor B para concluir que a resposta está correta.

Além da expansão discursiva natural, há diversas outras formas que estão apresentadas no Quadro 1, que podem ocorrer de forma isolada ou combinada.

Há uma diferença muito grande entre os tipos de raciocínio seguintes: a **argumentação retórica** que objetiva convencer um interlocutor de alguma coisa e a **argumentação heurística** usada em matemática que visa demonstrar; enquanto o primeiro tipo procura o convencimento de alguém ou de si mesmo, o outro, a verdade de uma implicação (Duval, 1992).

Na aprendizagem matemática, estamos interessados mais apropriadamente na argumentação heurística que pode ocorrer, por exemplo, em exercícios que demandam uma justificação. No entanto, no debate em sala de aula, e mesmo na escrita individual, pode acontecer uma mistura de argumentação teórica e retórica, mas o objetivo mantém-se o mesmo, a busca do valor epistêmico, semântico ou teórico do enunciado alvo (ver Figura 1).

No caso da resposta do aluno ao problema dos pintores em um tipo de argumentação heurística, há (ver Quadro 1):

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

- expansão natural, quando o aluno deixa implícita a comparação dos valores dos preços dos pintores em sua resposta;
- expansão formal, no caso do cálculo da área e do preço praticado pelos pintores;
- expansão cognitiva, quando a conclusão é tomada a partir dos valores calculados dos preços cobrados pelos pintores, mesmo que um desses valores esteja implícito.

Esses dois últimos modos de expansão caracterizam o que Duval (1995, p. 128) denomina de expansão por similitude externa, pois as passagens do cálculo da área para os valores cobrados pelos pintores ocorrem tendo por base o enunciado terceiro "Qual pintor sairá mais barato?".

Mecanismos de expansão	**Similaridade interna** (continuidade sem um terceiro enunciado)	**Similaridade externa** (continuidade com um terceiro enunciado)
Similaridade semiótica (são recuperados alguns significantes)	EXPANSÃO **LEXICAL** (recuperação do sentido de uma mesma unidade do vocabulário sob um modo fonético-auditivo ou gráfico-visual) ***Associações verbais, palavras do espírito*** **"linguagem do inconsciente"**	EXPANSÃO **FORMAL** (recurso exclusivo aos símbolos: notações, escrita algébrica, ...) ***Raciocínio dedutivo*** (Proposição de estrutura funcional) ***Cálculo proposicional, cálculo de predicados, ...***
Similaridade semântica Lei de FREGE: Significantes diferentes e mesmo objeto. (Invariância referencial estrita ou global)	EXPANSÃO **NATURAL** (É suficiente com os conhecimentos da língua corrente) ***Descrição, Narração*** ***Argumentação retórica*** ***Silogismo aristotélico*** (Proposição de estrutura remática predicativa) ***Raciocínio por absurdo***	EXPANSÃO **COGNITIVA** (Exige o conhecimento de definições, regras e leis para um domínio de objetos) ***Explicação*** ***Raciocínio dedutivo*** (Proposição de estrutura remática condicional) ***Raciocínio por absurdo***

Quadro 1: as quatro formas de expansão discursiva de uma expressão.
Fonte: Duval (1995, p. 129).

No caso da similitude interna de expansão, basta conhecer o léxico de base da língua para reconhecer a similitude semiótica ou a similitude semântica (DUVAL, 1995): é o que aconteceu no primeiro modo de expansão discursiva, a expansão discursiva natural, em que os dois preços são associados para se chegar à conclusão do menor preço do pintor A.

4 Argumentação, explicação, demonstração e expansão discursiva

Pretendemos nessa seção discutir as diferenças entre o que é um argumento e o que não é, conforme mostrado no Quadro 2.

	Demonstração	Argumentação	Explicação
I. Focalização do discurso	Um enunciado alvo sempre explicitamente formulado	Um enunciado alvo que pode estar implícito	Um fato, objeto de uma questão "por que..." ou "como..."
II. Resultado visado na produção de um discurso	Modificação do valor epistêmico do enunciado alvo (no sentido de sua necessidade) e estabelecimento de sua verdade	Modificação do valor epistêmico do enunciado alvo por si mesmo ou por um interlocutor	Relacionamento de um fato a outros em um sistema de funcionamento mecânico, teleológico etc.
III. Aspectos das proposições levadas em conta no discurso	Estatuto operatório determinado a partir do estatuto teórico preliminarmente fixado	Os termos intencionais e extencionais constituem o conteúdo	O conteúdo conceitual determinado pelas proposições
IV. Tomada em conta da oposição intencionais ou extencionais entre as proposições	Limitado à contradição no raciocínio por absurdo (produção e rejeito de uma contra tese)	Recurso a uma rede de oposições que é parcialmente explicitada por uma relação de razões prós e contra	
V. Marcas das relações entre as proposições	Livre, as relações sendo determinados pelo estatuto respectivos das proposições. Três possibilidades: nada; construções com conectores completivos; conectores organizacionais	Por conectores argumentativos	Pelos conectores organizacionais
VI. Continuidade do discurso	Assegurado localmente por reciclagem das conclusões intermediárias	Assegurado globalmente pela manutenção da referência a certos objetos em proposições sucessivas	Assegurado extrinsecamente pela coerência cognitiva da descrição do sistema.

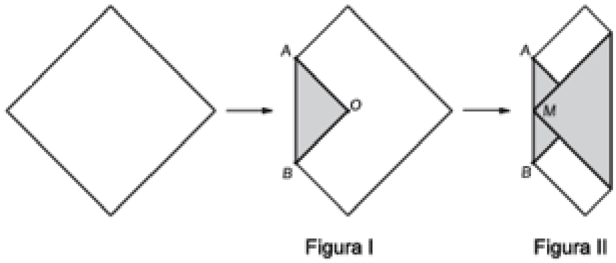
Quadro 2: comparação das características de expansão discursiva de uma demonstração, argumentação e explicação.
Fonte: Duval (1992, p. 58).

Como se pode perceber, a explicação usada no sentido que Duval toma não é argumentativa, se bem que o uso de conectores organizacionais pode criar essa ideia.

Consideremos o problema a seguir, conforme Quadro 3.

ReBECEM | Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

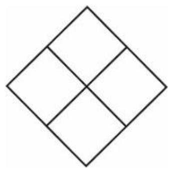
Uma folha de papel quadrada de área 16 cm^2, branca de um lado e cinza de outro, foi dobrada como indicado ao lado. O ponto O é o centro do quadrado (ponto de encontro das diagonais) e M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.



a) Qual é a área da região branca na figura I?
b) Qual é a área da região branca na figura II?

Quadro 3: problema de geometria.
Fonte: Campos e Moretti (2022, p. 43).

A resposta ao item a) de um dos alunos foi a seguinte:

Dividimos a folha em quatro quadrados iguais como na figura. Então percebemos que a área da região branca na Figura I corresponde a $\frac{3}{4}$ da área do quadrado original, ou seja, 16 x $\frac{3}{4}$ = 12 cm^2.	

Quadro 4: Problema de geometria.
Fonte: Campos e Moretti (2022, p. 44).

A resolução que o aluno apresenta, faz uso de uma operação semiótica e cognitiva chamada reconfiguração intermediária para chegar à resolução do item a) do problema (Campos; Moretti, 2022).

O que se pode perceber nesse tipo de procedimento apresentado por esse aluno, que é uma solução por explicação no sentido que Duval concebe (ver Tabela 2): ele descreve como chegou ao resultado apresentando a sequência de cálculo (expansão por substituição), aliada a observação muito pertinente de que a área procurada vale ¾ da área total da folha.

É importante ressaltar que o tipo de problema proposto leva a essa característica de expansão discursiva por substituição, não há um enunciado alvo para levantar o valor epistêmico ou teórico, mesmo que estivesse implícito: o problema pede para que uma área seja calculada, não há alguma pergunta para que fosse necessário verificar a sua verdade, algum enunciado alvo do tipo "A área branca da Figura II vale o dobro da área cinza da Figura I." que levaria a comparar resultados e que poderia dar uma expansão por acumulação ou composição, caracterizando um tipo de argumentação heurística.

Na resolução de Item b), o aluno segue um outro tipo de procedimento correto, mas bem diferente do que fez em a): parece não ter percebido que a área das regiões brancas da Figura II corresponde a 2/8 da área total da folha, o que daria 4 cm^2, valor esse que encontrou por um outro caminho bem mais trabalhoso (Campos; Moretti, 2022).

No diálogo a seguir, que ocorre em sala de aula, mostra-se um exemplo bastante claro do que pode acontecer em um conjunto de discursos argumentativos.

Descrição: cada equipe dispõe de um frasco de água com vários girinos. Trecho dos diálogos ocorridos entre quatro alunos de uma equipe:
Marc: onde foi que você viu uma ventosa? Jacques: olha lá! Olhem a sua barriga, a ventosa está lá, dá para ver melhor! (Jacques mostra aos alunos do seu grupo um girino que acabou de grudar na parede de vidro do frasco); Sabine: é, dá para ver bem quando ele gruda no frasco. Olhem! Jacques: sim, além disso é a ventosa que faz ele grudar no vidro do frasco; Marc: além disso, se ele não tivesse ventosa ele não ia ficar, ele escorregava. Eu vou também escrever isso na minha ficha; David: mas eu digo que isso não é uma ventosa; Marc: você diz isso porque não viu primeiro; David: não, é porque quando ele não está mais grudado no vidro do frasco a gente não vê mais ela; (David mostra os outros girinos que nadam no centro do frasco e não estão grudados na parede do frasco); Jacques: é normal, porque ele não precisa mais prender para não escorregar no vidro, então ele não tem mais necessidade dela e a recolhe; Marc: é isso, é só pra não escorregar no vidro do frasco; Sabine: mas olhe! lá você vê bem, se não é uma ventosa, o que é então? David: é a mesma coisa quando a gente gruda a boca em um vidro para fazer uma careta! não é por isso que é uma ventosa; (David sai do lugar e vai grudar o rosto no vidro da porta de fora da sala de aula, seu rosto é deformado pela careta: gargalhada geral na aula. David volta para junto do seu grupo sob o olhar reprovador do professor e dos alunos da sua equipe); Marc: por sua causa nós vamos perder pontos, você sempre faz papel de bobo; Jacques: eu digo que é uma boa observação, todos devem anotar que há uma pequena ventosa em sua barriga.

Quadro 5: diálogo registrado com um grupo de quatro alunos em uma atividade de biologia.
Fonte: texto adaptado de Jonnaert e Borght (2002, p. 62-63).

Esse diálogo foi apresentado com o objetivo de mostrar a diferença entre as visões de um pedagogo e de um didata em que, segundo esses autores do livro, o pedagogo se preocupa mais com a dinâmica de interação em sala de aula, do papel que David, um aluno rebelde, o que ele representa nessa equipe, enquanto o didata tenta, antes de tudo, procurar compreender como os conhecimentos são veiculados (Jonnaert; Borght, 2002).

O diálogo apresentado nesse Quadro 5 caracteriza fortemente um tipo de argumentação retórica que, conforme análise do Quadro 2, podemos ressaltar as seguintes características:

- não há um enunciado alvo proposto no início da atividade, mas ele aparece quando da fala de Marc na indagação “onde foi que você viu uma ventosa?”;
- Sabine, Jacques e Marc argumentam em favor da ventosa no girino, mas David estabelece uma rede de oposições a essa afirmação;

- observam-se conectores argumentativos nos discursos dos alunos;
- a continuidade do discurso se estabelece a partir da tomada de posição de cada fala dos alunos em relação ao fato de que o girino se gruda na parede do frasco como argumento principal em favor da afirmação dele ter ventosa;
- David quer convencer os colegas da veracidade de sua afirmação de que não há ventosa no girino e, para isso, faz aquele gesto, reprovado pelo professor e pela equipe, ao grudar a boca na porta de vidro da sala de aula.

É importante ressaltar que para Duval (1995, p. 276) "É possível assegurar a pertinência de uma argumentação, mas não a sua validade.". Esse é o caso, por exemplo, dos alunos Sabine e Jacques quando argumentam em favor de que o girino possui ventosa: "é, dá para ver bem quando ele gruda no frasco. Olhem!"; "sim, além disso é a ventosa que faz ele grudar no vidro do frasco". E, de forma contrária a essa argumentação, David, ele mesmo, "gruda" a boca no vidro da porta da sala para se contrapor aos argumentos parecidos de Sabine e Jacques: essas posições dos alunos favoráveis à ventosa no girino, são pertinentes, pois uma ventosa tem essa característica de poder "grudar" em uma parede, mas não é só isso. Para Marc, Jacques e Sabine, o fato de o girino "grudar" na parede do frasco, confere o valor epistêmico "evidente", por essa razão todo empenho para convencer David.

A partir de Breton (2003) podemos classificar, ao considerar que os alunos podem aceitar o fato de que o girino, ao grudar a boca na parede, caracteriza uma ventosa, como um "argumento de definição, que é uma construção do real usada para argumentar." (p. 96-97).

5 Formas de demonstração em matemática

A demonstração é o raciocínio por excelência em matemática, e são dois os modos mais usuais. Dados dois argumentos P e Q, na demonstração ou em uma prova matemática, temos duas formas importantes:

- 1ª forma: $P \rightarrow Q, P \therefore Q$.

Chamada *modus ponens* é a regra de eliminação do condicional, forma válida mais comum encontrada na matemática.

Duval representa essa regra da seguinte maneira para o teorema seguinte: "Se dois segmentos são paralelos e de mesmo comprimento, então suas extremidades são os vértices de um paralelogramo."

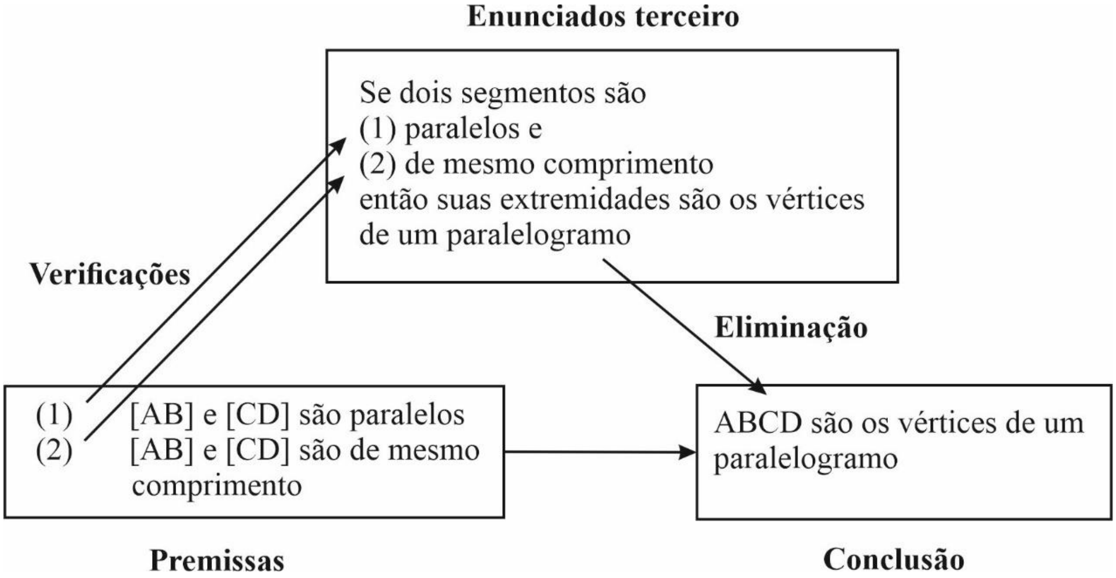


Figura 5: esquema de organização ternária de um passo de dedução.
Fonte: Duval (1992, p. 44).

Este esquema, aparentemente trivial, mostra a forma como utilizamos as definições, teoremas etc. em um raciocínio matemático. Duval comenta ainda que:

> Um passo de dedução se organiza em função do **estatuto operatório** das proposições que comporta necessariamente premissas e enunciado terceiros. Esse estatuto não depende do conteúdo das proposições, do que elas enunciam e significam, mas do **estatuto teórico** que lhes é preliminarmente atachado: hipóteses, teoremas, definição etc (Duval, 1992, p. 44).

Já em um argumento, o **valor epistêmico** funda-se na compreensão do conteúdo e, por isso, é algo que pode ser revisitado e mudado. No caso da dedução, “o valor epistêmico liga-se ao estatuto teórico de cada proposição” (Duval, 1992, p. 44). Diferentemente, por exemplo, do caso do grupo de alunos sobre a experiência com girinos em um frasco: Marc, Jacques e Sabine sustentam que o girino possui ventosa, e o valor epistêmico para esses alunos fundamentou-se em evidências visuais “girinos aparentemente grudados com a boca na parede do frasco” e “se ele não está grudado, está no meio do frasco é porque ele não precisa mais e a recolhe”, afirmações estas que David duvida se tratar de ventosa, pois ele mesmo vai “grudar a boca na parede da porta da sala de aula” para convencer os seus colegas de equipe. A argumentação opera com o valor de conteúdo epistêmico das afirmações usadas (evidente, absurdo, verossímil etc.), diferente do caso da dedução, que opera sob o ângulo do valor do seu estatuto teórico: hipótese, tese, definição etc.

Citemos um exemplo histórico de teorema completo com demonstração da forma *Modus Ponens*, o Teorema de Hankel[2], que acabou como uma controvérsia que durava vários séculos sobre a regra dos sinais, principalmemte o fato que estabelecia que "$-1 \times -1 = +1$":

> *Teorema*: A única multiplicação sobre $\mathbb{R}$, que prolonga a multiplicação usual sobre $\mathbb{R}+$, *respeitando as distribuições* (à esquerda e à direita), é conforme a regra de sinais.
> No momento em que a questão é formulada, a demonstração é trivial:
> $0 = a \times 0 = a \times (b + app\ b) = ab + a \times (opp\ b)$.
> $0 = 0 \times (opp\ b) = (opp\ a) \times (opp\ b) + a \times (opp\ b)$.
> De onde
> $$(opp\ a) \times (opp\ b)$$
> (GLAESER, 1981, p. 338).

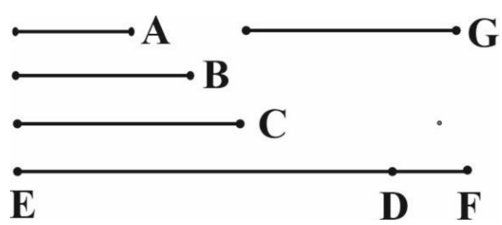
Nessa demonstração, os argumentos se sucedem até a eliminação do condicional para chegar à conclusão de que $(opp\ a) \times (opp\ b) = ab$, ou seja, $-a \times -b = ab$.

- 2ª forma: $P \rightarrow Q, \sim Q\ \therefore Q$.

Forma válida chamada regra *modus tollens* que é a demonstração por *reductio ad absurdum* ou também chamada de prova indireta.

Exemplo clássico desse tipo de uso em uma demonstração é a prova histórica e bastante peculiar de Euclides para a proposição: **Os números primos são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos**.

Demonstração de Euclides (2009, p. 342), Livro IX, Proposição 20:

> Sejam os números primos que tenham sido propostos *A, B, C*; digo que os números primos são mais numerosos do que os *A, B, C*.
>
> 
>
>
> Fique, pois, tomado o menor medido pelos *A, B, C* e seja o *DE*, e fique acrescida a unidade *DF* ao *DE*.
> Então, o *EF* ou é primo ou não. Primeiramente, seja primo; portanto, os números primos *A, B, C, EF* achados são mais numerosos do que os *A, B, C*.
>
> Mas, então, não seja primo o *EF*; portanto, é medido por algum número primo. Seja medido pelo primo *G*; digo que o *G* não é o mesmo que algum dos *A, B, C*. Pois, se possível, seja. Mas os *A, B, C* medem o *DE*; portanto, o *G* também medirá o *DE*. E também mede o *EF*; e o *G*, sendo um número, medirá a unidade *DF* restante; o que é absurdo. Portanto, o *G* não é o mesmo que algum dos *A, B, C*. E foi suposto primo. Portanto, os números primos achados, *A, B, C, G* são mais numerosos do que a quantidade que tenha sido proposta dos *A, B, C*; o que era preciso provar.

---

[2] HANKEL, H. Théorie des complexen Zahlsysteme. Leipzig: Leopold Voss, 1867.

A contra tese surge quando Euclides supõe que *EF* não é primo e entra em uma situação de contradição (absurdo) que é o que caracteriza esse tipo de raciocínio.

Existem, hoje, outras versões para essa demonstração engenhosa, que usam notações modernas com conjuntos, divisores etc., notações que Euclides não dispunha na época. Já na demonstração de Hankel, não há a aparição de uma contra tese, de um argumento que contraria a tese, mas uma sequência de argumentos para chegar à conclusão: é a demonstração típica *modus ponens*.

Uma forma não válida pode dar origem a uma demonstração por contraexemplo, como por exemplo, na afirmação seguinte: “todo número primo é ímpar”, em que basta exibir o número 2, que é primo e é par, para refutar essa afirmação, mesmo que valha para os números inteiros primos acima de 2. Duval (1995) não considera a demonstração por exibição de um contraexemplo (ele mesmo menciona “um elemento rebelde” (p. 298), um raciocínio, contrariamente ao que alguns matemáticos pensam e cita, como exemplo, Glaeser[3]. Considera, ainda que “a produção de um contraexemplo depende menos de uma atividade de raciocínio do que de um “estoque” de representações cognitivas ou conhecimentos que um indivíduo pode dispor.” (Duval, 1995, p. 297).

Há ainda uma **3ª forma** de demonstração, nada comum no ensino básico de matemática, o silogismo aristotélico (lógica dos enunciados categóricos), que funciona sem enunciado terceiro, mas possui o *status* operatório (premissas e conclusão) como se pode constatar no exemplo seguinte:

Todos os **mamíferos** são animais.
Todos os macacos são **mamíferos**.
∴ Todos os macacos são animais.

É exemplo de silogismo do primeiro tipo, o termo “mamíferos” ocupa o lugar de sujeito e predicado, respectivamente, na primeira e segunda premissas que faz a ligação para à conclusão de que “Todos os macacos são mamíferos”.

6 Provas a partir de imagens

Para tratar de alguns exemplos de provas com o uso essencialmente de imagens, iremos discutir rapidamente os tipos de apreensão na aprendizagem da geometria que envolve figuras, segundo Duval (1995, 2021b). Nos trabalhos de Duval há o destaque de duas apreensões perceptivas, uma que é imediata e outra relacionada à apreensão discursiva:

[3] GLAESER, G. Mathémtiques pour l´élève professeur. Paris: Hermann, 1971.

ISSN 2594-9179

> Estas duas atitudes encontram-se geralmente em conflito porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado e que os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente. (Duval, 2012, p. 120-121).

O que é preciso ver em uma figura geométrica é o que está no enunciado do problema. A apreensão perceptiva tem a função extremamente importante de identificar elementos em uma figura e, com isso, deslanchar a apreensão operatória que permite fazer modificações na figura, como veremos no exemplo a seguir.

ABC é um triângulo retângulo em B.
AD = DF = FB = 1/3 AB
CE = EG = GB = 1/3 CB
Comparar as áreas DEB e ACED. Justificar a resposta.

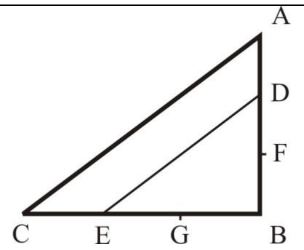
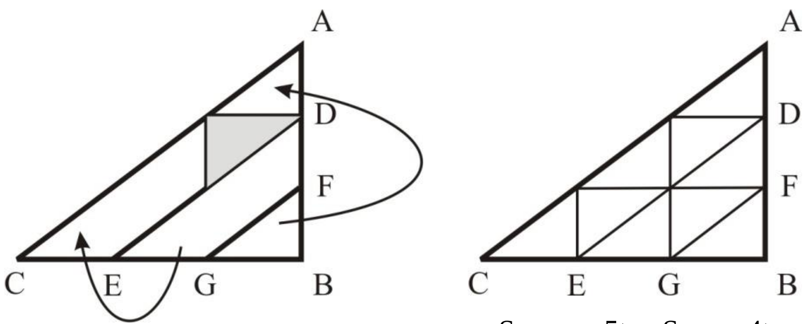


Figura 6: problema de comparação de áreas.
Fonte: adaptado de PADILLA e SANCHES (1992, p. 62).

Ao problema de comparação de áreas, na figura a seguir, três soluções são apresentadas por alunos na experiência tratada por Padilha e Sanches (1992). Tanto a solução 1 quanto a solução 2 podem ser apresentadas como provas (menos rigorosas) de que a área de ACED é maior do que a área de DEB: no caso da solução 1, as flechas esgotam a área do triângulo DEB e sobra, em ACDE, a área do triângulo (hachurado); no caso da solução 2, basta contar os pequenos triângulos de mesma área da malha triangular em ACED (tem 5) e DEB (tem 4) para nos convencermos da conclusão.

Solução 1 | **Solução 2** | **Solução 3**



$S_{ACDE} > S_{DEB}$

$S_{ACDE} = 5t$ e $S_{DEB} = 4t$

$S_{ACDE} > S_{DEB}$

Para:
AD = DF = FB = a
CE = EG = GB = b
$S_{DEB} = 2ab$
$S_{ACB} = 9ab/2$
$S_{ACDE} = 5ab/2$

$S_{ACDE} > S_{DEB}$

Figura 7: três soluções apresentadas ao problema de comparação de áreas.
Fonte: adaptado de Padilla e Sanches (1992, p. 66-67).

Essas duas primeiras soluções exibem um modo visual de expressão argumentativa (ver Figura 2), são "provas sem palavras" parafraseando, em português, o título do livro de Nelsen (1993). Elas se mantêm, de forma fundamental, no registro geométrico. Já no caso da Solução

3, o raciocínio acontece por expansão discursiva por substituição (ver Figura 2), há uma conversão de áreas das figuras em expressões algébricas para, só depois disso, se chegar à conclusão. As apreensões perceptiva e operatória, mencionadas anteriormente, e a operação semiocognitiva de conversão, foram as principais operações semiocognitivas levadas em conta nessas provas apresentadas pelos alunos.

Conclusões

O estudo sobre o raciocínio e a argumentação abrange diversas áreas do conhecimento científico. Em nossa discussão, escolhemos permanecer na linha semiocognitiva de aprendizagem matemática segundo Raymond Duval, para pensar em perspectivas que possam ser empregadas no ensino de matemática. Nessas discussões, constatamos que: (1) a expansão discursiva, no que se refere às condutas de raciocínio, abrange duas linhas, uma delas que concebe o raciocínio e outra que não o concebe, como é o caso das atividades de relato, descrição e explicação; (2) a expansão por raciocínio abrange dois outros grupos, um da expansão por acumulação ou composição e o outro da expansão por substituição, que é a principal característica do cálculo; (3) a dedução, como acontece em um teorema, pode originar-se tanto na expansão por acumulação (ou composição), quanto na expansão por substituição, ou ainda em ambos os tipos de expansão, possui *status* operatório e enunciado terceiro; (4) diferentemente da dedução, a inferência semântica, que também é uma forma de raciocínio, não possui *status* operatório e nem mesmo enunciado terceiro; (5) o raciocínio pode se dar por argumentação que engloba a dedução.

É por meio desse tipo de raciocínio, a argumentação, que as discussões podem ocorrer não só no meio escolar, mas no meio social também. Um exemplo de argumentação foi o que ocorreu com a equipe de alunos que trabalhava em uma aula de biologia com girinos, toda discussão argumentativa centrou-se no fato do girino possuir ou não possuir ventosa. Houve uma constatação que comandou toda a discussão, a ação do girino grudar-se na parede do frasco: o ambiente de argumentação entre os alunos pode originar um tipo de expansão semântica denominada inferência discursiva, que funciona sob a égide de uma afirmação, declaração ou de alguma norma social como enunciado terceiro, que no caso foi a observação de que o girino gruda a boca na parede do frasco.

A explicação, da forma que compreendemos no Brasil, pode conter raciocínio. Mas foi importante a maneira como Duval tratou do tema (Quadro 2), o sentido que ele atribui à explicação, pois com isso se pode caracterizar se um dado texto possui ou não raciocínio, independente do seu gênero literário.

Questões podem ser formuladas aos alunos de modo a estimular o raciocínio argumentativo: no caso do problema dos pintores, o item a) da questão promoveu um tipo de expansão discursiva no cálculo da área. Já no item b), a argumentação foi estimulada por haver uma decisão a ser tomada em relação à questão formulada que demandava o preço mais barato a ser cobrado por um dos dois pintores.

A formação de grupos em atividades em sala de aula é uma opção que fomenta discussões e o surgimento de argumentos que aparecem defendendo um ou outro ponto de vista. Os argumentos são reveladores de conhecimentos que podem ser ou não equivocados. Foi o que aconteceu, por exemplo, na discussão entre os alunos sobre o caso de o girino possuir ou não possuir ventosa que surgiu pelo fato de que o girino "grudava a boca" na parede do frasco, fato este que apareceu já no início da discussão por conta de uma observação da Sabine "é, dá para ver bem quando ele gruda no frasco. Olhem!".

Referências

BRETON, Ph. **A argumentação na comunicação**. 190p. Trad. Viviane Ribeiro. Bauru: Edusc, 2003.

CAMPOS, A. MORETTI, M. T. Operações semiocognitivas mobilizadas em tarefas de geometria: uma análise com alunos medalhistas do 8º ano. **EMR-RS**, v. 1, n. 23, p.32-48, 2022.

DUVAL, R. Argumennter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? **Petit x**, 31, p. 37 – 61, 1992.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. 395p. Suiça: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R**. Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las forma superiores en el desarrollo cognitivo**. 121p. Cali: Universidad del Valle, 2004.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. **REVEMAT**, v. 7.1, p.118-138, 2012.

DUVAL, R. Troca de correspondências entre o autor e Duval sobre o raciocínio e jogos, em particular, o caso do jogo de xadrez. 2022.

EUCLIDES. **Os elementos.**Trad. de Irineu Bicudo, 595p. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

GLAESER, G. Epistemologie des nombres relatifs. **RDM**, v. 2., n. 3, p. 303 -346, 1981.

JONNAERT, P ; BORGHT C. V. **Criar condições para aprender: o sócioconstrutivismo na formação do professor**. 386p. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002.

NELSEN, R. B. **Proofs without words**: exercises in visual thinking. 156p. USA: The Mathematical Association of America, 1993.

PADILLA SANCHES, V. **L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques**. Tese de doutorado em didática da matemática. Unistra, Estrasburgo, 1992.

SABEL, E. **O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas**. Dissertação de mestrado Educação Científica e Tecnológica, PPGECT, UFSC, Florianópolis, 2021.

Recebido em: 16 de agosto de 2022

Aceito em: 13 de junho de 2023