Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2023.v.7.n.3.31017

UMA PROPOSTA DE TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DO ENSINO EXPLORATÓRIO

A PROPOSAL OF HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY FOR TEACHING DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS FROM THE PERSPECTIVE OF EXPLORATORY TEACHING

Flavio Lima de Souza[1]

Pamela Emanueli Alves Ferreira [2]

Resumo: O artigo tem por objetivo apresentar uma proposta de Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva do Ensino Exploratório. A THA foi desenvolvida para estudantes de Engenharia que cursam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e visa introduzir o conceito de integral definida para calcular a área de uma região sob uma curva a partir da discussão coletiva de duas tarefas matemáticas. No artigo são apresentadas as duas tarefas que compõem a THA e as análises e discussões geradas a partir da experiência realizada de idealizar uma proposta de ensino na direção do Ensino Exploratório. Acreditamos que a elaboração e exploração dessa THA tem potencial para as aulas de Cálculo I e podem proporcionar um ensino de Matemática significativo para os estudantes de Engenharia.

Palavras-chave: Educação Matemática; Trajetória Hipotética de Aprendizagem; Ensino Exploratório; Tarefas significativas.

Abstract: The paper aims to present a proposal of Hypothetical Learning Trajectory (HLT) for teaching Differential and Integral Calculus from the perspective of Exploratory Teaching. The HLT was developed for Engineering students who take the Differential and Integral Calculus I course and aims to introduce the concept of definite integral to calculate the area of a region under a curve from the collective discussion of two mathematical tasks. The paper presents the two tasks that make up the HLT and the analyzes and discussions generated from the experience of devising a teaching proposal in the direction of Exploratory Teaching. We believe that the elaboration and exploration of this HLT has potential for Calculus I classes and may provide a meaningful teaching of Mathematics for Engineering students.

Keywords: Mathematics Education; Hypothetical Learning Trajectory; Exploratory Teaching; Meaningful tasks.

1 Introdução

[1] Doutorando em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina (UEL). Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: professorflaviolima@hotmail.com

[2] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina (UEL). Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: pam@uel.br

Este artigo tem por objetivo apresentar uma proposta de Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), elaborada como atividade da disciplina “Trajetórias de Ensino e de Aprendizagem em Matemática” do curso de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da Universidade Estadual de Londrina (UEL) no 1º semestre de 2022.

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem é um instrumento norteador do trabalho docente, auxiliando o professor no planejamento de ações a serem desenvolvidas em sala de aula. Para a elaboração de uma THA, a partir da proposta de Simon (1995), inicialmente o professor define os objetivos de aprendizagem para os estudantes e em seguida, cria um plano de atividades composto de tarefas significativas[3], apresentando suas hipóteses sobre um possível processo de aprendizagem.

Na THA proposta utilizou-se como perspectiva o Ensino Exploratório. Nessa perspectiva de ensino, a aprendizagem matemática ocorre a partir da realização de tarefas matemáticas significativas que propiciam o surgimento de ideias matemáticas a partir de uma discussão coletiva. No Ensino Exploratório, é papel do professor interpretar e compreender como os estudantes resolvem a tarefa, bem como explorar as suas resoluções de modo a articular os conceitos matemáticos com os objetivos de ensino.

A ideia da elaboração dessa THA para o Cálculo Diferencial e Integral I (Cálculo I), partiu da necessidade de refletir sobre a utilização de diferentes estratégias de ensino nas disciplinas básicas da área de Matemática dos cursos de Engenharia, pois em geral, a disciplina de Cálculo I apresenta altos índices de reprovação e evasão em diversas instituições de Ensino Superior do país e uma consequência direta disso é que quanto mais os estudantes reprovam nessa disciplina, mais eles ficam propensos a desistir do curso.

Segundo Carvalho, Porto e Belhot (2001, p. 82) “a formação do Engenheiro não pode ser feita somente de fórmulas e conceitos. Ele precisa estar preparado para tomar decisões, saber buscar informações e saber aplicá-las, possuir uma visão sistêmica para melhor analisar situações novas”. Assim, a utilização de tarefas significativas nas disciplinas básicas da área de Matemática dos cursos de Engenharia, em especial na

[3] Isto significa que os problemas devem ser convidativos, que valham a pena resolver, devem ser desafiadores, de modo que sua solução seja útil para o fornecimento de uma ou várias respostas (FERREIRA, 2013). Uma forma de avaliar se um problema é significativo reside nas respostas das perguntas: o estudante pode se sentir o “dono” do problema, aquele que domina a situação? Ele pode, a partir da situação, se colocar a pensar a respeito de questões próprias? (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

disciplina de Cálculo I, é importante para o ensino e a aprendizagem dos estudantes, pois estabelecem relações entre os conceitos estudados com a realidade, possibilitando aos estudantes reconhecer a utilidade da Matemática.

> Para promover a aprendizagem em sala de aula, as práticas docentes têm a função de guiar as ações dos estudantes, a interação no ensino e aprendizagem deve se dar em um ambiente de ir e vir, com situações que despertem significados para os alunos desenvolverem conhecimento de autoria própria, guiados pelo conhecimento historicamente produzido, com o auxílio do professor (FERREIRA; SILVA, 2019, p. 1235).

Nesse sentido, a THA foi desenvolvida para estudantes de Engenharia que cursam a disciplina de Cálculo I e visa introduzir o conceito de integral definida para calcular a área de uma região sob uma curva a partir da discussão coletiva de duas tarefas matemáticas. Os objetivos específicos deste artigo são os de apresentar as duas tarefas que compõem essa THA e as análises e discussões geradas a partir da experiência realizada de idealizar uma proposta de ensino na direção do Ensino Exploratório.

2 Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA)

Em 1995, o pesquisador americano Martin A. Simon apresentou a noção de Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o ensino de Matemática. “Para Simon, a Trajetória Hipotética de Aprendizagem dá ao professor a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado” (PIRES, 2009, p.157). De acordo com Simon, o uso da expressão Trajetória Hipotética de Aprendizagem é para se referir a previsão do professor como um trajeto por meio da qual a aprendizagem dos estudantes pode ocorrer. Essa trajetória é hipotética, pois a trajetória real de aprendizagem não pode ser prevista, ela apresenta suposições de como a aprendizagem pode acontecer.

Segundo Simon (1995, p. 136), a THA é composta de três componentes: (1) os objetivos do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus estudantes; (2) as atividades de ensino; e (3) o processamento hipotético de aprendizagem (uma previsão de como o pensamento e a compreensão dos estudantes evoluirão no contexto das atividades de ensino). Essas três componentes estão envolvidas no processo de aprendizagem dos estudantes e são elementos importantes na construção de uma THA, que por sua vez, é peça fundamental no modelo que ele desenvolveu denominado de Ciclo de Ensino de Matemática abreviado (Figura 1).

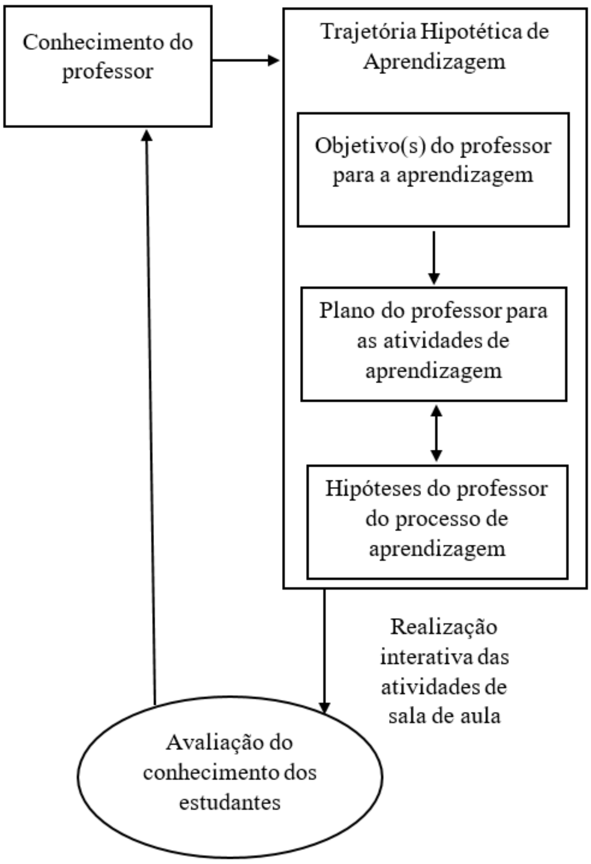


Figura 1: Ciclo de Ensino de Matemática (abreviado)
Fonte: SIMON (1995, p. 136, tradução nossa).

O Ciclo de Ensino de Matemática abreviado apresenta aspectos relacionados à sala de aula, tais como: o conhecimento do professor, o(s) objetivo(s) para a aprendizagem, o plano para as atividades de aprendizagem, as hipóteses do processo de aprendizagem e a avaliação do conhecimento dos estudantes.

> A noção da Trajetória Hipotética de Aprendizagem, para Simon, pressupõe a importância da relação entre a meta pretendida e o raciocínio sobre decisões de ensino e a hipótese sobre esse percurso. Para ele, o desenvolvimento de um processo hipotético de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades dessa aprendizagem têm uma relação simbólica. A geração de ideias para atividades de aprendizagem é subordinada à hipótese do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e aprendizagem de seus alunos (PIRES, 2009, p. 158).

É importante ressaltar que a palavra "trajetória" utilizada por Simon significa um caminho (trajeto) que pode ser modificado a qualquer momento, pois ao desenvolver o seu plano de atividades com os estudantes, o professor poderá se deparar com situações/dúvidas/resoluções diferentes das hipóteses que ele havia previsto, gerando novas hipóteses e novos objetivos. "O professor está constantemente comprometido em ajustar a trajetória de aprendizagem que ‘hipotetizou’, para melhor refletir seu aumento de conhecimento” (PIRES, 2009, p.160).

Diante do exposto, para elaborar uma THA a partir do modelo de Simon (1995), inicialmente o professor precisa estabelecer o(s) objetivo(s) de aprendizagem que pretende alcançar a partir de um tema ou conteúdo matemático que pretende abordar (1ª componente). Para atingir esse(s) objetivo(s), o professor cria um plano de atividades composto de tarefas significativas (2ª componente) e apresenta suas hipóteses de como será a aula que ele planejou, desde as dúvidas que podem surgir na interpretação do enunciado da tarefa, até as diferentes formas de resolução da mesma (3ª componente).

> A elaboração de uma THA considera a complexidade dos processos de ensino e aprendizagem e é potencial para desenvolver no professor a autonomia, segurança, o despertar para novas situações. Ao “levantar hipóteses” sobre os processos de ensino e de aprendizagem, o professor lança mão dos conhecimentos teóricos e práticos que possui, das estratégias metodológicas disponíveis para cumprimento de seus objetivos, das experiências vividas, dos conhecimentos que possui a respeito de seus alunos, constituindo uma rede de informações que lhe confere uma “antecipação” da aula que pretende propor (FERREIRA; SILVA, 2019, p. 1236).

Nesse contexto, a partir do modelo de Simon, elaboramos uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem na perspectiva do Ensino Exploratório.

3 Ensino Exploratório

O Ensino Exploratório é uma perspectiva de ensino que desafia os estudantes a pensarem como fazer matemática (ação de matematizar), pois procura promover a aprendizagem dos estudantes por meio da realização de tarefas matemáticas significativas. Segundo Cyrino (2016, p. 23), um dos pontos destacados do Ensino Exploratório é a escolha de tarefas que envolvam os estudantes em atividade matemática significativa. As tarefas matemáticas propostas assumem particular relevância, dado que é a partir delas que a atividade matemática dos estudantes se desenvolve.

> [...] as tarefas podem ser problemas, investigações ou explorações, mas apresentam diversos traços comuns: são desafiadoras e partem de uma situação concreta; permitem que os alunos se apoiem na sua experiência para realizá-las e, portanto, supõem o uso de estratégias variadas, com diferentes níveis de sofisticação matemática; estão ancoradas no currículo e visam à compreensão aprofundada de conceitos matemáticos que têm forte ligação com o conhecimento que os alunos vêm a construir nas aulas (CYRINO, 2016, p. 23-24).

De acordo com Canavarro, Oliveira e Menezes (2012), uma aula exploratória (ou conjunto de aulas) é geralmente estruturada em quatro fases: (1) Introdução da tarefa; (2) Desenvolvimento da tarefa; (3) Discussão da tarefa, e (4) Sistematização das aprendizagens matemáticas.

Na fase 1, o professor apresenta a tarefa matemática à turma, neste momento, ele precisa assegurar que todos os estudantes entendam o enunciado da mesma e que se sintam desafiados a trabalhar na tarefa. Já na fase 2, os estudantes individualmente ou divididos em grupo iniciam a resolução da tarefa. Nesta fase, o professor precisa garantir que todos os estudantes resolvam a tarefa, se preparem para apresentar a sua resolução para toda a turma e que produzem os materiais adequados em tempo útil para a fase de discussão.

Na fase 3, inicia-se a discussão coletiva das resoluções dos estudantes. Nesta fase o professor tem um papel muito importante, o de orquestrar essa discussão, não apenas gerenciando as intervenções, questionamentos e interações dos estudantes, mas também promovendo a qualidade matemática das explicações e argumentações. É importante ressaltar que, a fase de discussão não tem como objetivo somente a comparação e o confronto das resoluções apresentadas, mas que a discussão contribua para a realização de novas aprendizagens matemáticas importantes. Ao final da fase de discussão, inicia-se a fase 4, onde o professor introduzirá, a partir das discussões e resoluções apresentadas, os novos conceitos matemáticos ou revisará os conceitos já conhecidos e aplicados.

Com o objetivo de viabilizar a preparação do professor para a fase 3 (discussão da tarefa), Canavarro (2011) destaca cinco ações (práticas) que visam manter/promover as discussões produtivas em sala de aula: (1) antecipar; (2) monitorar; (3) selecionar; (4) sequenciar, e (5) estabelecer conexões entre as respostas dos estudantes.

A ação antecipar ocorre antes da aula, quando o professor seleciona ou elabora as tarefas para serem aplicadas, considerando os objetivos de ensino. Segundo Canavarro (2011, p. 13), ao antecipar o professor dedica-se a: (i) prever a interpretação e o envolvimento dos estudantes na tarefa; (ii) elencar uma diversidade de estratégias, corretas e incorretas, que os estudantes poderão usar; (iii) relacionar essas estratégias com os conceitos, representações, ou procedimentos que quer que os estudantes aprendam e/ou com as capacidades que quer que eles desenvolvam.

> Ao antecipar, o professor fica mais apto a explorar todo o potencial da tarefa para as aprendizagens matemáticas dos alunos e a tomar decisões acerca de

> como estruturar as apresentações e gerir as discussões com base em critérios relacionados com a aprendizagem matemática (CANAVARRO, 2011, p. 13).

Na ação monitorar, realizada durante a fase de desenvolvimento da tarefa, o professor circula pela sala com a intenção de verificar os tipos e formas de resoluções da atividade, as representações, possíveis erros, e se necessário, realiza intervenções.

> Ao monitorar o processo de resolução dos alunos, é fundamental que o professor identifique as resoluções que são diferentes, as possíveis conexões entre elas, e avalie o potencial para a discussão e a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa, de modo que possa selecionar e sequenciar aquelas que serão apresentadas visando a discussão coletiva com a turma (CYRINO, 2016, p. 94).

A ação selecionar ocorre no final da prática de monitorar. De acordo com Canavarro (2011, p. 14), "selecionar corresponde à identificação das resoluções importantes para partilhar com toda a turma, de modo a proporcionar uma diversidade de ideias matemáticas adequadas ao propósito matemático da aula". Ainda segundo a autora, para selecionar, o professor pode adotar diversos critérios, por exemplo, escolher uma resolução que apresenta um erro recorrente para esclarecer; ou uma resolução particular que se distingue e acrescenta compreensão e/ou ajuda a atingir o propósito matemático da aula; ou resoluções com diferentes estratégias matemáticas, sobretudo as mais produtivas; ou ainda, resoluções com representações matemáticas diversas, sobretudo as mais eficazes.

A ação sequenciar também ocorre durante a prática de monitorar. Nessa ação, o professor determina a ordem (sequência) da apresentação das resoluções.

> A importância dessa ação é que as resoluções partilhadas e discutidas, além de serem intencionais, seguem uma ordem estabelecida pelo professor. Por isso, também têm sua complexidade, pois o professor precisa estabelecer critérios para o sequenciamento pautado nos objetivos de ensino, visando às aprendizagens e à sistematização dos conceitos (CYRINO, 2016, p.162).

Para sequenciar o professor pode optar por diversos critérios. Canavarro (2011) destaca que o professor pode partir de uma resolução mais simples para uma mais complexa; ou partir de resoluções que foram utilizadas pela maioria dos estudantes, sendo corretas ou não; ou ainda, partir de uma resolução mais informal para a mais formal no que diz respeito às representações matemáticas utilizadas.

Após as ações de selecionar e sequenciar, o professor convida os estudantes a participar da discussão coletiva das resoluções da tarefa. Nesse momento o professor desenvolverá estratégias para estabelecer conexões entre as respostas dos estudantes.

> [...] Ao desenvolver o papel de gestor da discussão, o professor precisa solicitar justificativas para as resoluções e representações dos alunos, oportunizar que evidenciem e discutam (caso haja) equívocos comuns, incentivar os alunos a questionarem a si mesmos e aos colegas, bem como buscarem possíveis respostas e estabelecer conexões entre as resoluções discutidas (CYRINO, 2016, p. 96).

Apresentadas as quatro fases do Ensino Exploratório em conjunto com as cinco ações que visam promover as discussões produtivas em sala de aula, a seguir será apresentada uma proposta de Trajetória Hipotética de Aprendizagem para introduzir o conceito de integral definida a partir do cálculo da área de uma região sob uma curva.

4 Proposta de uma THA para o cálculo da área de uma região sob uma curva

A THA foi elaborada para estudantes de Engenharia que cursam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, partindo da ideia que os estudantes tenham alguns conhecimentos matemáticos elementares para o desenvolvimento das duas tarefas, como o cálculo de áreas de figuras planas e a noção de limite de uma função.

Objetivos do professor:

Os principais objetivos do planejamento do professor que pretende trabalhar com essa THA são: (a) Compreender, interpretar e resolver situações problemas envolvendo áreas de regiões sob curvas; (b) Estimar a área de uma região sob curvas utilizando estratégias diversas; (c) Confrontar as diferentes resoluções e analisar o potencial matemático de cada uma delas; (d) Estimar a área de uma região sob curvas utilizando a soma de retângulos; (e) Atribuir significado ao conceito de integral definida a partir de uma situação realística (com referência na realidade).

Para que esses objetivos sejam cumpridos, esta THA será composta de duas tarefas. A tarefa 1 tem como finalidade cumprir os objetivos (a), (b) e (c) e a tarefa 2, os objetivos (d) e (e). O Quadro 1 apresenta e descreve as duas tarefas da THA e o tempo previsto para o seu desenvolvimento.

Tarefas	Descrição	Tempo
Tarefa 1	Criando estratégias para calcular a área de uma região sob uma curva.	2 aulas de 50 min cada
Tarefa 2	Estimando a área de uma região sob uma curva utilizando retângulos.	2 aulas de 50 min cada

Quadro 1: Tarefas e tempo previsto para o desenvolvimento da THA
Fonte: Autores (2022).

Na THA proposta cada tarefa foi elaborada para ser desenvolvida em aulas na perspectiva do Ensino Exploratório, então, durante a sua execução, o professor deverá desenvolver as quatro fases - introdução da tarefa, desenvolvimento da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas – de uma aula exploratória. Além disso, antes e durante a execução da THA, o professor deverá desenvolver as cinco ações - antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre as respostas dos estudantes - visando manter/promover discussões produtivas em sala de aula.

Como a ação antecipar é realizada antes da aula, é importante ressaltar que antes da aplicação das tarefas o professor deverá as resolver, fazendo previsões de possíveis resoluções, dúvidas e erros dos estudantes, e em possíveis questionamentos e orientações. Ao desenvolver a ação antecipar do Ensino Exploratório o professor estará elaborando o processamento hipotético de aprendizagem (3ª componente da THA).

Atividades de Ensino: Tarefa 1

O Quadro 2 apresenta o enunciado da tarefa 1.

Tarefa 1: Criando estratégias para calcular a área de uma região sob uma curva

Um estudante do 1º ano do curso de graduação em Engenharia Civil da Universidade XXXXXXXXXX precisa fazer um projeto de construção de uma quadra poliesportiva com cobertura para uma cidade do estado do Paraná, cujo modelo deverá ser semelhante ao da Figura 2.

Figura 2: Modelo da quadra poliesportiva com cobertura
Fonte: Autores (2022).

Entre as especificações do projeto, consta a construção de um mosaico artístico na parede do fundo da quadra, esta etapa será desenvolvida por um artista local. De acordo com o projeto, a parede terá as seguintes medidas, conforme a Figura 3.

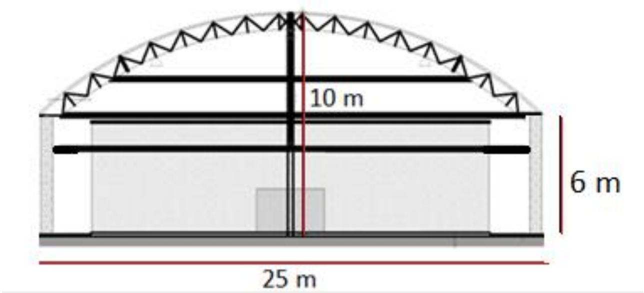


Figura 3: Vista da parede do fundo da quadra
Fonte: Autores (2022).

Para finalizar o projeto, o estudante precisa calcular a área dessa parede. Ajude-o a calcular essa área a partir dos conhecimentos que você tem da Geometria. Discuta com seus colegas estratégias para calcular essa área e dê uma estimativa do cálculo.

Quadro 2: Enunciado da Tarefa 1
Fonte: Autores (2022).

Para a aplicação da tarefa 1, o professor chegará na sala de aula e conversará com os estudantes explicando como será o desenvolvimento da aula. A tarefa 1 deverá ser desenvolvida em grupos. Enquanto os estudantes se organizam na formação dos grupos, o professor ligará o computador e projetará o enunciado da tarefa 1 no quadro e em seguida, distribuirá pelas mesas o mesmo enunciado impresso, de modo que cada grupo tenha um enunciado. Esta etapa deverá ter duração máxima de 10 minutos. O Quadro 3 apresenta a descrição das quatro fases e o tempo previsto para a realização da tarefa 1.

Fases	Descrição	Tempo previsto
1	Introdução da tarefa 1	10 min
2	Desenvolvimento da tarefa 1	25 min
3	Discussão da tarefa 1	45 min
4	Síntese da tarefa 1	10 min

Quadro 3: As quatro fases para a realização da tarefa 1 e tempo previsto para o seu desenvolvimento.
Fonte: Autores (2022).

Processamento hipotético de aprendizagem:

Introdução da tarefa 1

O professor pedirá para um estudante ler o enunciado da tarefa 1 em voz alta, em seguida, pedirá para os demais explicar o que eles entenderam a respeito dessa tarefa. Considerando o enunciado da tarefa 1 (Quadro 2), é muito importante que os estudantes o compreendam e entendam qual a relação entre as informações fornecidas e o que se pretende alcançar (objetivos da tarefa – 1ª componente da THA). O Quadro 4 apresenta algumas dúvidas que podem surgir após a leitura e interpretação da tarefa 1 e algumas ações do professor.

Possíveis dúvidas dos estudantes	Ações do professor
O que é área?	O professor pode propor uma pequena discussão com os grupos sobre o que eles entendem por área de uma figura plana.
É possível decompor a parede da quadra em qualquer figura geométrica?	O professor pode responder que sim, é possível decompor a parede da quadra em qualquer figura geométrica plana desde que esta ação lhe permita calcular a sua área.
O que significa “dar” uma estimativa do cálculo da área?	O professor pode propor aos estudantes relacionar as diferenças e/ou semelhanças entre as figuras geométricas planas estudadas no Ensino Básico e a Figura 3 da parede do fundo da quadra. A partir das relações encontradas, pode-se concluir que não é possível encontrar a área exata da parede utilizando os conceitos básicos da Geometria, o valor encontrado será uma boa estimativa do cálculo da área.

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

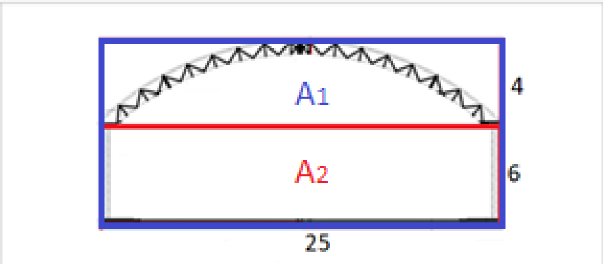
Quadro 4: Ações previstas na leitura e interpretação da tarefa 1
Fonte: Autores (2022).

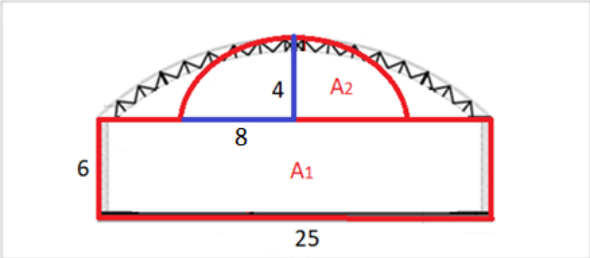
Apresentadas hipoteticamente as possíveis dúvidas que possam surgir durante a leitura e interpretação da tarefa 1, os grupos darão início à sua resolução.

Desenvolvimento da tarefa 1

Os grupos terão até 25 minutos para criar estratégias para calcular a área da parede do fundo da quadra e apresentar uma estimativa para o cálculo. Durante a resolução da tarefa 1, o professor iniciará a ação de monitorar os grupos, circulando entre os estudantes com o intuito de analisar como eles estão trabalhando e quais são as estratégias adotadas para resolver a tarefa.

É importante destacar que quando o professor identificar algum grupo cujo trabalho não está evoluindo de forma produtiva na resolução da tarefa ou identifique algum erro cometido, ele deve questionar os estudantes com a intenção de propor uma reflexão para corrigir os erros. O Quadro 5 apresenta duas situações hipotéticas que podem surgir durante o processo de monitoramento da tarefa 1.

Situação hipotética 1:	**Ações do professor**
Antes que estimar o valor da área da parede do fundo da quadra, um grupo decide calcular o intervalo no qual se encontra essa área. Para isto, decide representar a região da parede inscrita em um retângulo de 25 m de comprimento e 10 m de largura.  Como a área do retângulo é definida pelo produto do comprimento pela largura, então a área A_1 da figura é: $A_1 = 25 \,.\, 10 = 250\, m^2$ isto é, a área da parede da quadra (A) deve ser menor do que $250\, m^2$. Como a região inferior da parede forma um retângulo de 25 m de comprimento por 6 m de largura, então a área A_2 é: $A_2 = 25 \,.\, 6 = 150\, m^2$ ou seja, a área mínima da parede da quadra (A) é de $150\, m^2$. Portanto, $150\, m^2 < A < 250\, m^2$	O professor pode apresentar ao grupo os seguintes questionamentos: - Quais as motivações para calcular o intervalo da área da parede do fundo da quadra? - Por que representar a região da parede do fundo da quadra inscrita em um retângulo? É possível inserir essa região em outro polígono? - A partir do intervalo encontrado, quais serão as próximas estratégias utilizadas para calcular a área da parede do fundo da quadra?
Situação hipotética 2:	**Ações do professor**
Um grupo decide decompor a área da parede em um retângulo e um semicírculo.	Ao observar o erro cometido pelo grupo e a estratégia utilizada por eles, o professor pode fazer os seguintes questionamentos: - O que é o raio de um semicírculo?

 O professor observa que o grupo cometeu um erro no raio do semicírculo.	- O que significa o número 4? E o 8? - Como se calcula a área do semicírculo? - O semicírculo é uma boa figura geométrica para cobrir a região superior da parede da quadra?

Quadro 5: Situações hipotéticas durante o monitoramento da tarefa 1
Fonte: Autores (2022).

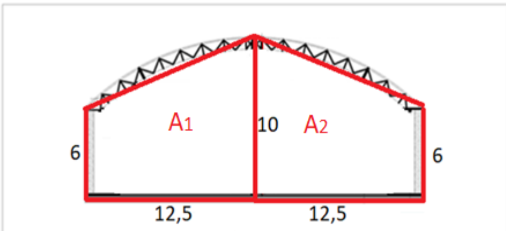
Antes do término do desenvolvimento da tarefa 1, o professor deverá decidir se todos os grupos irão apresentar as resoluções no quadro ou deverá selecionar quais os grupos que apresentarão as suas resoluções no momento da discussão (ação selecionar), em seguida, definirá a sequência de apresentação das resoluções dos estudantes (ação sequenciar).

Discussão da tarefa 1

Neste momento, inicia-se a discussão das resoluções da tarefa 1. Cada grupo terá um tempo disponível para apresentar a resolução e discutir com a turma quais as ideias matemáticas utilizadas na resolução. Esta fase terá duração máxima de 45 minutos. O Quadro 6 apresenta cinco possíveis estratégias de resolução da tarefa 1.

Resolução hipotética 1:

Decompor a área da parede em dois trapézios.



Como a área do trapézio é definida como o produto entre a soma das medidas das bases pela altura, e dividindo o resultado por 2, logo:

$$A_1 = A_2 = \frac{(10+6).12{,}5}{2} = \frac{16\,.\,12{,}5}{2} = \frac{200}{2} = 100\ m^2$$

Portanto, a estimativa da área da parede será:

$$A_T = A_1 + A_2 = 100 + 100 = 200m^2$$

Resolução hipotética 2:

Decompor a área da parede em três figuras geométricas conhecidas: um retângulo e dois triângulos.

Como a área do retângulo é definida como o produto do comprimento pela largura, assim:

$$A_1 = 25\,.\,6 = 150\ m^2$$

Como os dois triângulos são iguais e a área de um triângulo é definida como a metade do produto do comprimento da base pela altura, logo:

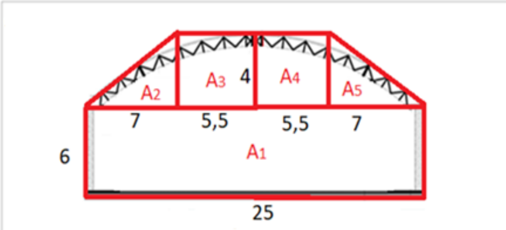
$$A_2 = A_3 = \frac{b.h}{2} = \frac{12{,}5\,.\,4}{2} = \frac{50}{2} = 25\ m^2$$

Portanto, uma estimativa para a área da parede será:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 150 + 25 + 25 = 200\ m^2$$

Resolução hipotética 3:

Decompor a área da parede em cinco partes: três retângulos e dois triângulos.



As áreas calculadas são:

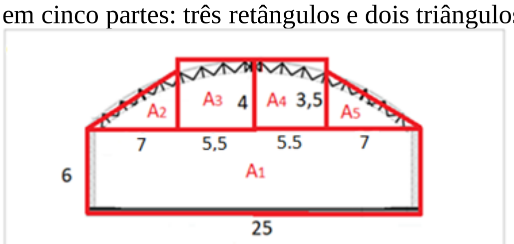
$$A_1 = 25\,.\,6 = 150m^2; \quad A_2 = A_5 = \frac{7\,.\,4}{2} = 14m^2; \quad A_3 = A_4 = 5{,}5\,.\,4 = 22m^2$$

Portanto, uma estimativa da área será:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 150 + 14 + 22 + 22 + 14 = 222m^2$$

Resolução hipotética 4:

Decompor a área da parede em cinco partes: três retângulos e dois triângulos.



As áreas calculadas são:

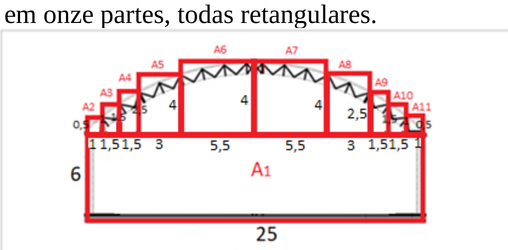
$$A_1 = 25\,.\,6 = 150\ m^2; \quad A_2 = A_5 = \frac{7\ .\ 3{,}5}{2} = 12{,}25\ m^2; \quad A_3 = A_4 = 5{,}5\,.\,4 = 22\ m^2$$

Portanto, uma estimativa da área será:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 150 + 12{,}25 + 22 + 22 + 12{,}25 = 218{,}5\ m^2$$

Resolução hipotética 5:

Decompor a área da parede em onze partes, todas retangulares.



As áreas calculadas são:

$$A_1 = 25\,.\,6 = 150\ m^2; \quad A_2 = A_{11} = 1\,.\,0{,}5 = 0{,}5\ m^2; \quad A_3 = A_{10} = 1{,}5\,.\,1 = 1{,}5\ m^2$$

$$A_4 = A_9 = 1{,}5.1{,}5 = 2{,}25\ m^2; A_5 = A_8 = 3.2{,}5 = 7{,}5\ m^2; A_6 = A_7 = 5{,}5\,.\,4 = 22\ m^2$$

Portanto, uma estimativa da área será:

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} + A_{11}$ $= 150 + 0{,}5 + 1{,}5 + 2{,}25 + 7{,}5 + 22 + 22 + 7{,}5 + 2{,}25 + 1{,}5 + 0{,}5 = 217{,}5\ m^2$

Quadro 6: Possíveis resoluções da tarefa 1
Fonte: Autores (2022).

Durante a apresentação das resoluções, o professor, como gestor da discussão, precisa incentivar os estudantes a questionarem a si mesmos e aos colegas sobre as resoluções apresentadas, além disso, é importante que ele faça comentários e/ou questionamentos aos grupos solicitando justificativas para as resoluções, com a intenção de relacionar o conhecimento matemático presente nas resoluções com seus conhecimentos prévios, estabelecer conexões entre as resoluções apresentadas para atingir os objetivos da aula e preparar os estudantes para o momento da sistematização. Através das resoluções hipotéticas apresentadas no Quadro 6, o professor poderá fazer comentários e/ou questionamentos durante a fase de discussão, conforme o Quadro 7.

Possíveis comentários e/ou questionamentos	Intenções do professor
O valor da estimativa apresentada nas resoluções 1 e 2 são iguais. O que essas resoluções têm em comum?	Mostrar para os estudantes que a região formada pelos dois trapézios é exatamente igual a região formada pelo retângulo e os dois triângulos. Uma mesma região pode ser decomposta de forma diferente.
Observem que nas resoluções 3 e 4 a área da parede do fundo da quadra foi decomposta de forma semelhante: em três retângulos e dois triângulos. Na resolução 4, a diferença está na diminuição das alturas dos triângulos, essa pequena alteração gerou uma diferença de 3,5 m^2 na estimativa da área. Essa diferença é significativa? Justifique.	Essa pergunta pode ser realizada com o objetivo de mostrar para os estudantes que a diminuição das alturas dos triângulos cobriu de forma mais precisa a parte superior da parede, evitando "excessos". Essa diferença de 3,5 m^2 foi significativa, pois está mais próxima do valor real da área.
Nas resoluções apresentadas, os grupos utilizaram triângulos, retângulos e trapézios para decompor a área da parede do fundo da quadra. Entretanto, somente em uma resolução foi utilizada trapézios e nas demais, em sua maioria, a área foi decomposta em retângulos. Há alguma justificativa para a escolha de retângulos?	As figuras geométricas de três ou quatro lados possuem fórmulas específicas para calcular a sua área, no entanto, a fórmula para calcular a área do trapézio não é tão conhecida pelos estudantes. Uma das justificativas da escolha de retângulos é que o cálculo da área desta figura geométrica é mais comum, basta calcular o produto do comprimento pela largura.
Na resolução 1 o grupo dividiu a região da parede do fundo da quadra em duas partes, já na resolução 5 o grupo utilizou onze retângulos para decompor a área. Há alguma relação entre a quantidade de figuras que se decompõe a região e o valor da estimativa da área? Argumente.	O professor pode comentar que uma boa estratégia para decompor a área é utilizar figuras geométricas cada vez menores, preenchendo melhor a região da parede do fundo da quadra. Assim, serão utilizadas mais figuras na decomposição e consequentemente, o valor do cálculo da área estará mais próximo do valor real.

Quadro 7: Possíveis comentários e/ou questionamentos que podem ser feitos pelo professor durante a fase de discussão da tarefa 1
Fonte: Autores (2022).

Sistematização das ideias matemáticas envolvidas na tarefa 1

O professor poderá concluir a tarefa 1 escrevendo no quadro as principais ideias discutidas nas resoluções apresentadas pelos estudantes durante a fase 3, conforme a Figura 4.

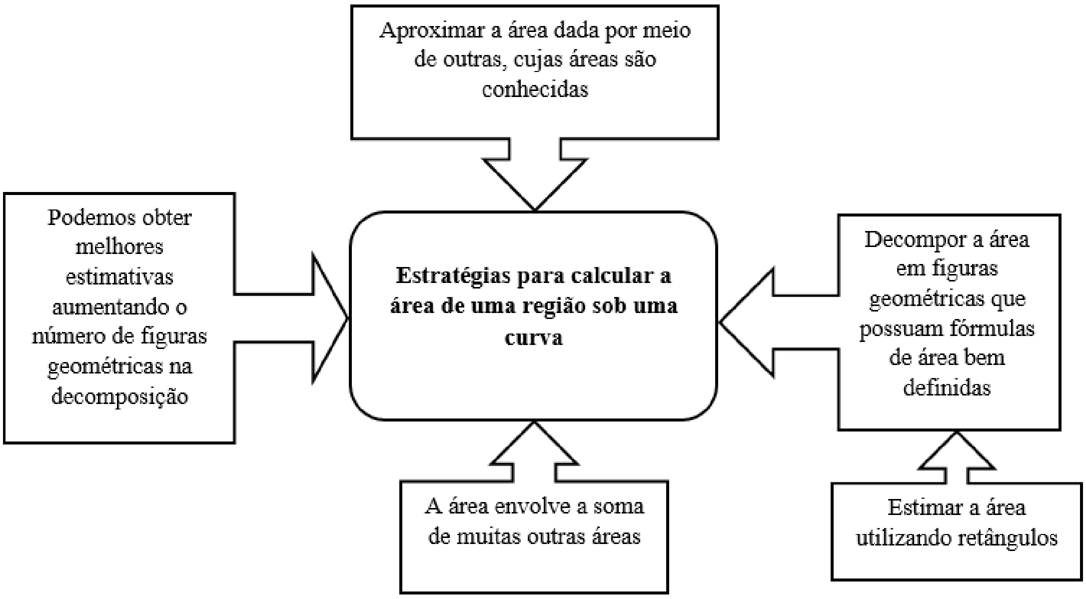


Figura 4: Síntese da tarefa produzida a partir dos quadros 6 e 7
Fonte: Autores (2022).

Antes do término da aula, o professor avisará aos estudantes que na próxima aula será proposta a tarefa 2, aliada a esta primeira tarefa, onde eles irão estudar um método para determinar a área mais precisa da parede da quadra utilizando os conceitos do Cálculo I.

Atividades de Ensino: Tarefa 2

O Quadro 8 apresenta o enunciado da tarefa 2.

Tarefa 2: Estimando a área de uma região sob uma curva utilizando retângulos
O estudante precisa finalizar o seu projeto, mas ainda não conseguiu calcular a área exata da parede do fundo da quadra. Para tentar resolver esse problema, ele teve a ideia de desenhar a parede do fundo da quadra num plano cartesiano. A Figura 5 ilustra o gráfico que o estudante fez utilizando o *software GeoGebra* (as unidades de medidas indicadas estão em metros).

Figura 5: Vista da parede do fundo da quadra no plano cartesiano
Fonte: Os autores (2022).

Observe que a região compreendida entre a função $f(x) = -0{,}0256x^2 + 0{,}64x + 6$, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 25$, forma a região da parede do fundo da quadra. Com essas informações, use retângulos para estimar a área da parede indicada na Figura 5. Faça estimativas superiores e inferiores, depois compare os resultados com os seus colegas. Compare os resultados obtidos nessa tarefa com os resultados discutidos na tarefa 1.

Quadro 8: Enunciado da Tarefa 2
Fonte: Autores (2022).

A aplicação da tarefa 2 deverá ser feita de maneira análoga a da tarefa 1, a principal diferença está no tempo previsto das fases para o desenvolvimento da aula na perspectiva do Ensino Exploratório. O Quadro 9 apresenta a descrição das quatro fases para a realização da tarefa 2 e o tempo previsto para o seu desenvolvimento.

Fases	Descrição	Tempo previsto
1	Introdução da tarefa 2	10 min
2	Desenvolvimento da tarefa 2	20 min
3	Discussão da tarefa 2	30 min
4	Síntese da tarefa 2	30 min

Quadro 9: As quatro fases para a realização da tarefa 2 e o tempo previsto para o seu desenvolvimento
Fonte: Autores (2022).

Processamento hipotético de aprendizagem:

Introdução da tarefa 2

Durante a leitura e interpretação da tarefa 2, poderão surgir algumas dúvidas, como por exemplo, as apresentadas no Quadro 10.

Possíveis dúvidas dos estudantes	Ações do professor
O que significa fazer estimativas superiores e inferiores?	O professor pode comentar que fazer estimativas superiores e inferiores é encontrar o intervalo onde se localiza a área da parede do fundo da quadra, destacando que, para obter uma estimativa inferior todos os retângulos devem estar “dentro” ou sobre a região da parede e analogamente, para obter uma estimativa superior todos os retângulos devem estar “fora” ou sobre a região da parede da quadra.

Os retângulos utilizados na estimativa da área poderão estar na vertical ou na horizontal?	O professor pode propor uma pequena discussão com os grupos sobre quais são as melhores posições dos retângulos (vertical ou horizontal) utilizados na decomposição, a partir da análise da Figura 5.

Quadro 10: Ações previstas na leitura e interpretação da tarefa 2
Fonte: Autores (2022).

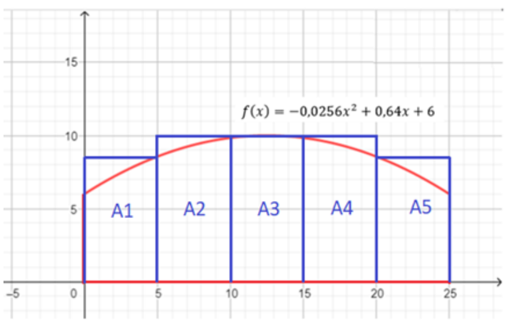
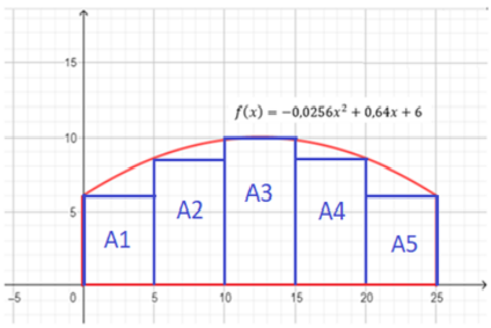
Após a leitura e a interpretação do enunciado da tarefa 2, os grupos darão início à sua resolução.

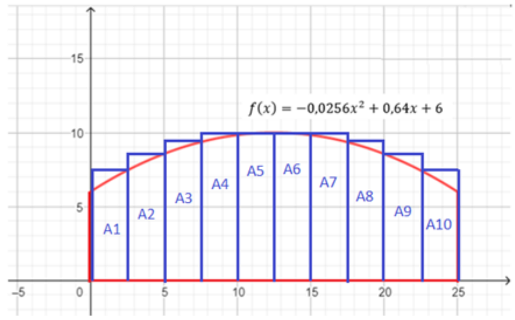
Desenvolvimento da tarefa 2

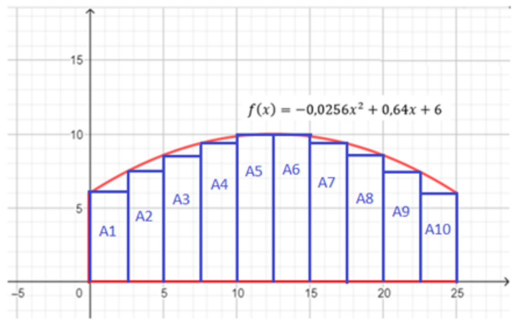
Durante a fase de resolução da tarefa 2, o professor realizará o monitoramento dos estudantes. Através das observações feitas, o professor selecionará as resoluções que serão apresentadas no quadro durante a discussão. Antes da conclusão dessa fase, o professor definirá a ordem de apresentação.

Discussão da tarefa 2

No Quadro 11 são apresentadas três possíveis resoluções da tarefa 2.

Resolução hipotética 1:
Dividir a região da área da parede da quadra (A) em cinco retângulos, todos de base 5 metros.   Para a estimativa superior: $A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 5\,.\,8{,}5 + 5\,.\,10 + 5.\,10 + 5\,.\,10 + 5\,.\,8{,}5 = 235\ m^2$ Essa estimativa é maior do que A, isto é, $A < 235$. Para a estimativa inferior: $A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 5\,.\,6 + 5\,.\,8{,}5 + 5.\,10 + 5\,.\,8{,}5 + 5\,.\,6 = 195\ m^2$ Essa estimativa é menor do que A, isto é, $A > 195$. Portanto: $195 < A < 235$
Resolução hipotética 2:
Dividir a região da área da parede da quadra (A) em dez retângulos, todos de base 2,5 metros.





Para a estimativa superior:

$$A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10}$$
$$= 2{,}5.7{,}5 + 2{,}5.8{,}5 + 2{,}5.9{,}5 + 2{,}5.10 + 2{,}5.10 + 2{,}5.10 + 2{,}5.10 + 2{,}5.9{,}5 + 2{,}5.8{,}5 + 2{,}5.7{,}5 = 227{,}5\ m^2$$

Essa estimativa é maior do que A, isto é, $A < 227{,}5$. Para a estimativa inferior:

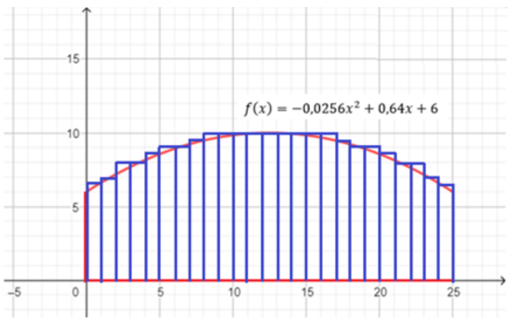
$$A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10}$$
$$= 2{,}5.6 + 2{,}5.7{,}5 + 2{,}5.8{,}5 + 2{,}5.9{,}5 + 2{,}5.10 + 2{,}5.10 + 2{,}5.9{,}5 + 2{,}5.8{,}5 + 2{,}5.7{,}5 + 2{,}5.6 = 207{,}5\ m^2$$

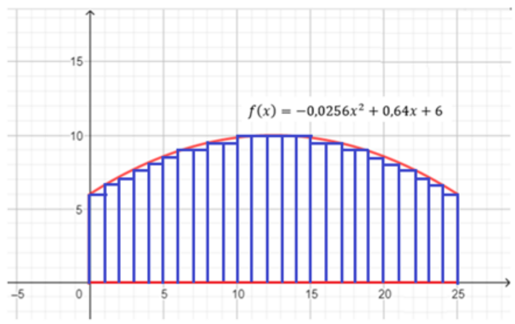
Essa estimativa é menor do que A, isto é, $A > 207{,}5$. Portanto:

$$207{,}5 < A < 227{,}5$$

Resolução hipotética 3:

Dividir a região da área da parede da quadra (A) em vinte e cinco retângulos, todos de base 1 metro.





Para a estimativa superior:

$$A \approx 1.6{,}5 + 1.7 + 1.8 + 1.8 + 1.8{,}5 + 1.9 + 1.9 + 1.9{,}5 + 1.10 + 1.10 + 1.10 + 1.10 + 1.10 + 1.10 + 1.10 + 1.10 + 1.10 + 1.9{,}5 + 1.9 + 1.9 + 1.8{,}5 + 1.8 + 1.8 + 1.7 + 1.6{,}5 = 221 m^2$$

Essa estimativa é maior do que A, isto é, $A < 221$. Para a estimativa inferior:

$$A \approx 1.6 + 1.6{,}5 + 1.7 + 1.7{,}5 + 1.8 + 1.8{,}5 + 1.9 + 1.9 + 1.9{,}5 + 1.9{,}5 + 1.10 + 1.10 + 1.10 + 1.10 + 1.10 + 1.9{,}5 + 1.9{,}5 + 1.9 + 1.9 + 1.8{,}5 + 1.8 + 1.7{,}5 + 1.7 + 1.6{,}5 + 1.6 = 211 m^2$$

Essa estimativa é menor do que A, isto é, $A > 211$. Portanto:

$$211 < A < 221$$

Quadro 11: Possíveis resoluções da tarefa 2
Fonte: Autores (2022).

Após a apresentação de cada resolução selecionada ou após a apresentação de todas as resoluções, o professor e os estudantes poderão fazer comentários e/ou questionamentos a partir das resoluções apresentadas. O Quadro 12 apresenta os possíveis comentários e/ou questionamentos que podem ser feitos pelo professor durante a fase de discussão da tarefa 2.

Possíveis comentários e/ou questionamentos	Intenções do professor

Notem que em todas as resoluções foram utilizados retângulos de mesma largura para calcular as estimativas, porquê isso foi feito?	Essa pergunta pode ser feita com a intenção de mostrar para os estudantes que escolher retângulos de mesma largura é uma forma de facilitar e padronizar o cálculo das estimativas, além de criar um modelo matemático que resolva a situação proposta.
Qual(is) da(s) estimativa(s) apresentada(s) na tarefa 1 pertence(m) aos intervalos apresentados nas resoluções 1, 2 e 3?	Essa pergunta pode ser realizada com a intenção de comparar os resultados obtidos na tarefa 1 com os resultados apresentados nessa tarefa.
Observem que houve uma diminuição da amplitude (diferença entre o limite superior e o limite inferior) do intervalo das estimativas das resoluções 1 e 2, isto é, a amplitude do intervalo da resolução 1 foi 40 (235 – 195), já a amplitude do intervalo da resolução 2 foi 20 (227,5 – 207,5). Por que isso ocorreu?	Essa pergunta pode ser feita com a intenção de mostrar para os estudantes que o valor da amplitude dos intervalos está relacionado com o número de retângulos utilizados na decomposição da área. Quanto maior o número de retângulos utilizados na decomposição, menor será a amplitude do intervalo.
As estimativas superior e inferior serão melhores se a área for decomposta em 50 retângulos? Há alguma relação entre a quantidade de retângulos que decompõe a área da parede da quadra e o valor da sua estimativa?	Essa pergunta tem a intenção de sintetizar toda a discussão, pois se a área for decomposta em 50 retângulos, obteremos uma melhor estimativa se comparado, por exemplo, com a resolução 3 que dividiu a área em 25 retângulos. Quanto mais retângulos forem utilizados na decomposição, melhor será a estimativa da área.
Como podemos obter melhores estimativas para o cálculo da área da parede da quadra?	A intenção dessa pergunta é preparar os estudantes para a fase de sintetização das ideias matemáticas envolvidas na tarefa 2. Os estudantes poderão responder: - Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de retângulos na decomposição da área; - Podemos obter melhores estimativas diminuindo a largura dos retângulos; - Podemos obter melhores estimativas decompondo a área em retângulos cada vez menores, tendendo ao infinito.

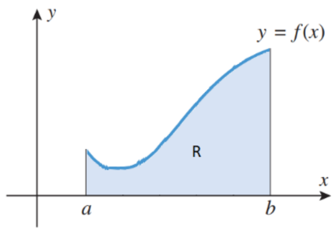
Quadro 12: Possíveis comentários e/ou questionamentos que podem ser feitos pelo professor durante a fase de discussão da tarefa 2
Fonte: Autores (2022).

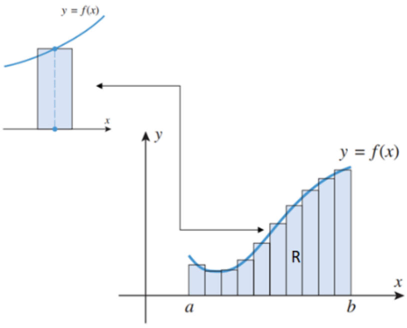
Sistematização das ideias matemáticas envolvidas na tarefa 2

Ao término da fase de discussão inicia-se a síntese da tarefa 2. Essa fase terá duração de aproximadamente 30 minutos, na qual o professor relacionará todo o conhecimento matemático que estava presente nas resoluções das duas tarefas, formalizando o método dos retângulos, o conceito de soma de Riemann e introduzindo o conceito de integral definida para calcular a área sob uma curva, conforme o Quadro 13.

Consideremos agora o problema de calcular (definir) a área de uma região plana R, delimitada pelo gráfico de uma função f contínua e não negativa, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

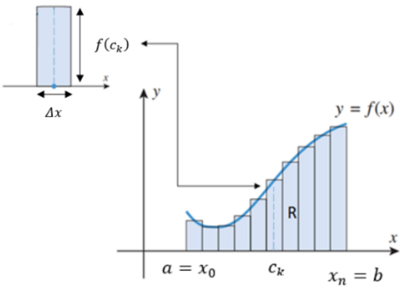
Podemos calcular a área da região R, da seguinte forma:





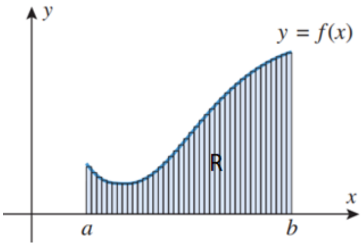
- Divida o intervalo [a, b] em n subintervalos iguais e, em cada um deles, construa um retângulo que se estende desde o eixo x até algum ponto na curva $y = f(x)$ acima do subintervalo;
- Para cada n, a área total dos retângulos pode ser vista como uma aproximação à área exata sob a curva acima do intervalo [a, b]. Além disso, fica intuitivamente evidente que, quando n cresce, essas aproximações irão se tornar cada vez melhores e tender à área exata como um limite.

Assim, se A é a área exata da região R e R_n a aproximação de A usando n retângulos, então: $A = \lim_{n \to +\infty} R_n$. Diremos que esse é o **método dos retângulos** para calcular a área da região R.



A partir de agora, vamos utilizar o método dos retângulos para obtermos uma definição matematicamente precisa para calcular a área sob uma curva. Para isso, seja $f(x)$ uma função contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$ e R a região delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Fazemos a partição do intervalo $[a, b]$, isto é, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais, escolhendo os pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Cada um desses subintervalos fechados $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$ tem comprimento $\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, $k = 1,2, \dots, n$. Em cada subintervalo escolhemos um ponto qualquer c_k. Acima de cada subintervalo, construímos retângulos cuja altura é o valor de $f(c_k)$ e a base mede Δx. Assim, a área de cada retângulo formado é $f(c_k).\Delta x$.

A soma das áreas dos n retângulos (que denotamos por S_n) formam uma região R_n, cuja área pode ser considerada como uma aproximação da área A da região R, isto é, $A \approx S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k).\Delta x = f(c_1).\Delta x + f(c_2).\Delta x + \cdots + f(c_n).\Delta x$. Essa soma é chamada **soma de Riemann** da função f.



Repetimos o processo usando cada vez mais subintervalos e definimos a área A da região R como o "limite" das aproximações dadas pelas áreas das regiões R_n quando n cresce muito. Assim, definimos a área A por $A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k).\Delta x$. O limite que aparece na expressão anterior é um dos conceitos fundamentais do cálculo integral. Portanto, segue a definição:

Definição (integral definida): Seja f uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ as extremidades desses subintervalos e sejam $c_1, c_2, \dots, c_n$ pontos arbitrários nesses subintervalos, de forma que c_k esteja no k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Então, a **integral definida de f de a até b** é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k).\Delta x$$

desde que o limite exista, e nesse caso, dizemos que f é integrável no intervalo $[a, b]$.

Da definição anterior, podemos definir a área sob o gráfico de uma função integrável não negativa como o valor dessa integral definida, ou seja:

Definição (Área sob uma curva): Seja f uma função não negativa e integrável em um intervalo $[a, b]$, então a área sob a curva f em $[a, b]$ será a integral de f de a até b:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Quadro 13: Definição de integral definida e cálculo da área sob uma curva
Fonte: Adaptado de Anton; Bivens; Davis (2014, p. 317-318 e 353-355).

Após a formalização e explicação do conteúdo matemático, o professor pedirá para um estudante ir até o quadro para explicitar e resolver a integral definida que soluciona a tarefa 2. O Quadro 14 apresenta uma solução da tarefa 2.

Integral definida que resolve a tarefa 2:
$$A = \int_0^{25} (-0{,}0256x^2 + 0{,}64x + 6)\, dx$$
Solução:
$$A = \int_0^{25} (-0{,}0256x^2 + 0{,}64x + 6)\, dx = -0{,}0256.\frac{x^3}{3} + 0{,}64.\frac{x^2}{2} + 6x \Big|_0^{25}$$ $$= \left(-0{,}0256.\frac{25^3}{3} + 0{,}64.\frac{25^2}{2} + 6.25\right) - \left(-0{,}0256.\frac{0^3}{3} + 0{,}64.\frac{0^2}{2} + 6.0\right)$$ $$= -\frac{400}{3} + 200 + 150 = \frac{650}{3} = 216{,}67 \approx 217\ m^2$$ Portanto a área da parede da quadra é, de aproximadamente, $217\ m^2$.

Quadro 14: Resolução da tarefa 2 utilizando a integral definida
Fonte: Autores (2022).

5 Reflexões sobre a elaboração da THA

Durante a elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem o professor tem a oportunidade de propor tarefas matemáticas significativas em suas aulas, com contextos ricos e diversos, com referência à realidade, para que os estudantes possam lidar com o conhecimento matemático em situações realísticas, isto é, situações que possam ser imagináveis por eles e que proporcione produzir a sua própria Matemática (oportunizar a matematização).

Compreendemos que na elaboração de uma THA o professor não enxerga uma tarefa matemática de maneira linear (escolhe uma tarefa e a resolve no quadro), ele passa a ter uma visão ampla e de diversos ângulos dessa mesma tarefa, analisando desde as dificuldades de interpretação e entendimento do enunciado que os estudantes possam ter, até as diversas formas de resolução da mesma.

Elaborar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem é uma excelente atividade de reflexão para o professor, pois permite que professores e futuros professores possam planejar e refletir sobre a sua prática de sala de aula. A elaboração de uma THA é um processo contínuo e repleto de modificações, pois ao utilizá-la em sala de aula, o professor pode se deparar com dúvidas, questionamentos e resoluções que não estavam previstas no seu processamento hipotético, gerando novas hipóteses e novos objetivos.

A partir da experiência realizada de elaborar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, observamos que o Ensino Exploratório foi uma excelente estratégia metodológica a ser utilizada na THA, pois ao propor as quatro fases e as cinco ações que visam manter/promover as discussões produtivas em sala de aula, o professor estará elaborando automaticamente um processamento hipotético de aprendizagem. Assim, apresentamos na Figura 7 as componentes essenciais que devem ser consideradas na elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem associada à perspectiva do Ensino Exploratório.

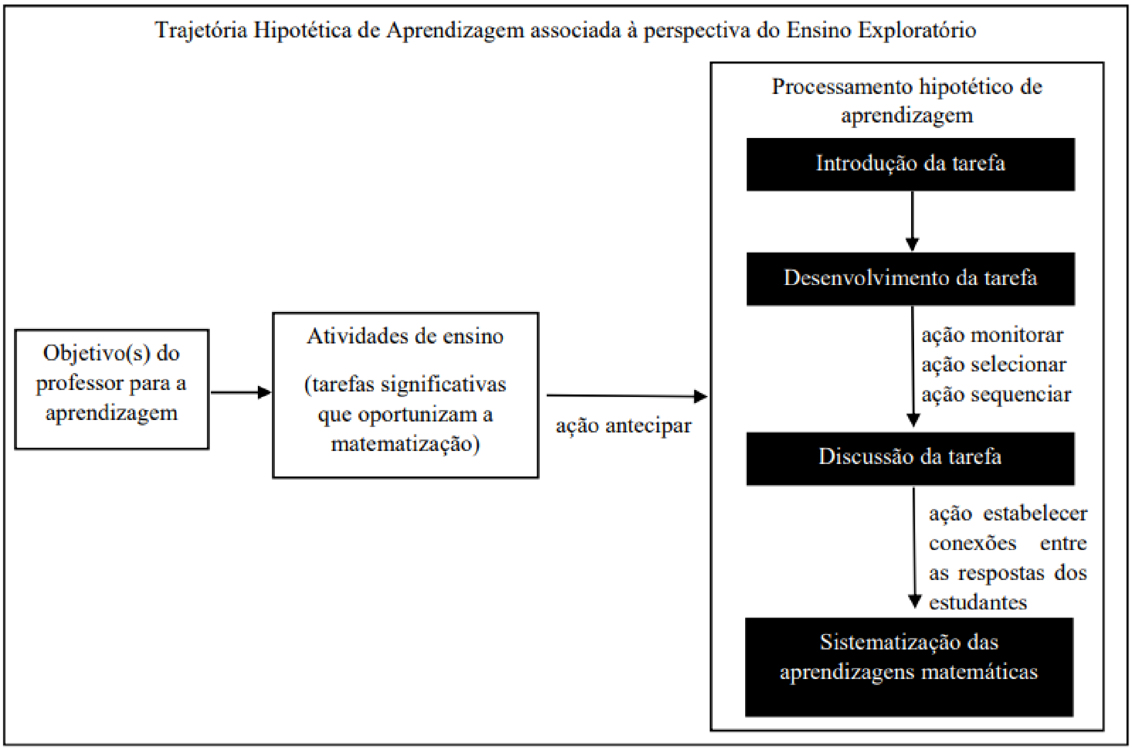


Figura 7: Componentes de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem associados à perspectiva do Ensino Exploratório
Fonte: Autores (2022).

O modelo apresentado na Figura 7 foi elaborado utilizando parte do Ciclo de Ensino de Matemática abreviado apresentado por Simon (Figura 1) e a estrutura de uma aula exploratória apresentada por Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) juntamente com as cinco ações propostas por Canavarro (2011). Ele retrata uma visão das tomadas de decisões e ações do professor que deseja elaborar uma THA na perspectiva do Ensino Exploratório.

6 Considerações Finais

A elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem na perspectiva do Ensino Exploratório proporciona ao professor muitas aprendizagens e desafios, tanto na preparação da aula, que é o momento de antecipar as possíveis resoluções e hipotetizar os questionamentos que poderão surgir durante a resolução das tarefas, quanto em criar um ambiente propício para promover discussões produtivas em sala de aula. Ao elaborar uma THA, podemos construir nossa compreensão da Matemática dos estudantes, e analisar, de que forma, nós professores podemos influenciar nessa Matemática.

Por meio da exploração da THA proposta neste artigo, podemos dar sentido ao ensino de integrais definidas a partir da discussão de diferentes estratégias utilizadas pelos estudantes para calcular a área da parede do fundo de uma quadra poliesportiva. Assim, os estudantes poderão relacionar o conceito de integral definida com o cálculo da área sob uma curva.

Diante do exposto, entendemos que a elaboração e exploração dessa THA por meio do Ensino Exploratório tem potencial para as aulas de Cálculo Diferencial e Integral I e podem proporcionar um ensino de Matemática significativo para os estudantes de Engenharia. Espera-se através da sua aplicação em sala de aula, que a atividade matemática dos estudantes seja produtiva, em um contexto que possa atribuir sentido e significado ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva das duas tarefas propostas.

Por fim, acreditamos que a THA proposta possa servir de modelo/inspiração para que professores que lecionam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I para cursos de Engenharia possam utilizá-la e modificá-la em sala de aula, além de servir de alento para que outras trajetórias sejam elaboradas e propostas, contribuindo para um ensino de Matemática mais significativo.

Referências

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo.** v. 1**.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

CARVALHO, A. C. B. D.; PORTO, A. J. V.; BELHOT, R.V. Aprendizagem significativa no Ensino de Engenharia. **Revista Produção**, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 81-90, nov. 2001.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, n.115, p. 11-17, 2011.

CANAVARRO, A.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. **Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia**. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 2012: Práticas de ensino da Matemática, 2012, Castelo de Vide. Actas. Porto Alegre: SPIEM, p. 255-266, 2012.

CYRINO, M. C. C. T. **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática**. Londrina: Eduel, 2016.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FERREIRA, P. E. A.; SILVA, K. A. P. Modelagem Matemática e uma Proposta de Trajetória Hipotética de Aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 65, p. 1233-1254, dez. 2019.

PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145 – 166, 1. Quadrimestre, 2009.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, *[s.l]*, vol. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Assessment and Realistic Mathematics Education.** Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

Recebido em: 28 de abril de 2023

Aceito em: 12 de junho de 2023