Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2024.v.8.n.3.32320

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM MÚLTIPLAS RESOLUÇÕES E REPRESENTAÇÕES

PROBLEM SOLVING WITH MULTIPLE SOLUTIONS AND REPRESENTATIONS

Isabel Vale[1]
Ana Barbosa[2]

Resumo: Para que os alunos, incluindo futuros professores, sejam competentes em resolução de problemas, devem utilizar diferentes representações matemáticas e as relações entre elas para escolher a mais conveniente em cada situação. O objetivo do estudo realizado é analisar os tipos de estratégias e representações utilizadas por futuros professores do ensino básico (alunos com idades entre 6-12 anos) na resolução de tarefas com múltiplas resoluções. O quadro teórico debruça-se sobre sistemas de representação relacionados com processos de pensamento usados durante a resolução de problemas, optando-se por uma metodologia qualitativa, e envolvendo 14 futuros professores. Os dados foram recolhidos através da observação participante e produções escritas. Os resultados mostram que os participantes privilegiaram estratégias analíticas e mistas, combinando representações visuais, verbais e simbólicas, bem como as suas duais. Globalmente, foi percepcionada a potencialidade de utilizar múltiplas representações e de as integrar, o que explica, em muitos casos, a escolha de estratégias mistas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Tarefas desafiantes; Representações; Resoluções visuais; Formação Inicial de professores.

Abstract: For students, including future teachers, to be competent in problem solving, they must know different mathematical representations and the relations between them, so they can choose the most convenient in each situation. The aim of this paper is to analyse the types of strategies and representations used by future teachers of elementary education (6-12 years old) when solving multiple-solution tasks. The theoretical framework focuses on representational systems related to thinking processes during problem solving, following a qualitative methodology that involved 14 pre-service teachers. Data was collected through participant observation and written productions. The results show that the participants privileged analytical and mixed strategies, combining visual, verbal and symbolic representations, as well as their duals. Overall, the potential of using multiple representations and integrating them was perceived, which explains, in many cases, the choice of mixed strategies.

Keywords: Problem solving; Multiple-solution tasks; Multiple representations; Visual solutions; Teacher education.

[1] Doutora em Didática pela Universidade de Aveiro. Professora coordenadora no Instituto Politécnico de Viana do Castelo; CIEC, Universidade do Minho, Portugal. E-mail isabel.vale@ese.ipvc.pt

[2] Doutora em Estudos da Criança pela Universidade do Minho. Professora adjunta no Instituto Politécnico de Viana do Castelo; inED, Instituto Politécnico do Porto, Portugal. E-mail anabarbosa@ese.ipvc.pt

1 Introdução

As tarefas selecionadas pelo professor constituem a base fundamental da aprendizagem e a sua natureza influencia o tipo de trabalho desenvolvido na sala de aula (Chapman, 2015; Doyle, 1988; Stein; Smith, 1998). Assim, devemos propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas, que permitam a utilização de várias abordagens e estratégias de resolução diversificadas, recorrendo a múltiplas representações. As representações são uma ferramenta essencial na resolução de problemas, pois apoiam a compreensão matemática, ajudam os alunos a comunicar as suas ideias e a clarificar o seu raciocínio. Neste sentido, espera-se que os alunos compreendam e apliquem fluentemente uma variedade de representações matemáticas.

No entanto, nem sempre são bem-sucedidos na resolução de problemas, não só por falta de conhecimentos básicos, mas muitas vezes por falta de conhecimento sobre a diversidade de estratégias e representações que podem ser utilizadas para resolver um problema, nomeadamente as resoluções visuais, que ainda são frequentemente desvalorizadas pelos professores em relação às mais analíticas. Muitas vezes, um problema é mais facilmente resolvido através de um desenho do que de um conjunto de fórmulas. Assim, pensamos que o professor deve estar consciente da importância das múltiplas representações, quer para explorar e comunicar um conceito, quer para resolver um problema.

Em particular, os futuros professores devem vivenciar situações em que se apercebam da utilidade de diferentes representações para a aprendizagem da Matemática, uma vez que estas correspondem à forma como os alunos compreendem o que lhes é ensinado. Esta é uma discussão importante, que se reveste de alguma complexidade, tendo em conta a multiplicidade de representações que podem ser utilizadas no ensino e na aprendizagem da Matemática. O objetivo deste estudo é identificar e compreender os tipos de estratégias e representações matemáticas utilizadas por futuros professores do ensino básico na resolução de tarefas com múltiplas resoluções.

2 Enquadramento teórico

2.1 As representações

As representações são uma componente importante do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, de acordo com o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2014), caracterizando-se como produções observáveis ou tangíveis, tais como números, diagramas, gráficos, modelos físicos, expressões matemáticas, fórmulas, equações, ou produções apresentadas no ecrã de um computador ou de uma calculadora (Goldin, 2018). As representações matemáticas e os sistemas de representação são frequentemente caracterizados de acordo com a natureza das configurações utilizadas e vários autores apresentam diferentes categorizações para as representações (Bruner, 1966; Matteson, 2006; NCTM, 2014; Tripathi, 2008). Para Bruner (1966) o objetivo da educação é facilitar o pensamento dos alunos e as suas capacidades de resolução de problemas, que podem depois ser transferidas para uma série de situações, contribuindo particularmente para o desenvolvimento do pensamento simbólico.

Com base nos diferentes modos de pensamento, Bruner (1966) estudou como o conhecimento é representado e organizado, tendo identificado três formas diferentes de representação: ativa (baseada na ação), em que o pensamento se baseia inteiramente em ações físicas (as crianças aprendem fazendo), recorrendo a materiais manipuláveis ou outro tipo de objetos; icônica (baseada em imagem visuais que simbolizam um conceito), o que pode explicar porque é que, quando estamos a aprender um novo assunto, é muitas vezes útil ter diagramas ou ilustrações para acompanhar a informação verbal; e simbólica (conjunto de proposições lógicas ou simbólicas), o conhecimento é armazenado principalmente sob a forma de linguagem, de símbolos matemáticos ou de outros sistemas de símbolos. Os símbolos são flexíveis na medida em que podem ser manipulados, ordenados, classificados, etc., pelo que o utilizador não está limitado por ações ou imagens (que têm uma relação fixa com aquilo que representam).

Existem na literatura outras propostas de categorização das representações que resultam maioritariamente de uma extensão do modelo apresentado por Bruner (1966). Por exemplo, alguns autores (NCTM, 2014; Tripathi, 2008) defendem um modelo constituído por cinco modos de representações associadas à aprendizagem da Matemática e à resolução de problemas: contextual (situações da vida real); concreta/física (materiais/objetos manipuláveis); semi-concreta/visual (pictórica); verbal (linguagem); e simbólica (notação matemática). Esta classificação ajuda a diferenciar as várias formas que uma ideia ou um conceito matemático podem assumir, mas também indica como desenvolver as competências necessárias para a sua compreensão.

Cada uma das representações é uma manifestação de um aspecto do conceito e envolve diferentes níveis cognitivos que devemos fomentar nos alunos. Deste modo, as representações não são estáticas. Enquanto Matteson (2006), em seus estudos, considera a seguinte categorização para as representações: numérica, referem-se ao uso de números, recorrendo a decimais, frações, percentagens ou outros, como uma lista numérica; gráfica, incluem uma variedade de diferentes representações visuais, tais como pictóricas, modelos, diagramas ou gráficos; verbal, requerem o uso da fala para compreender, descrever, analisar, explicar ou refletir sobre representações numéricas, algébricas ou gráficas, associadas ao uso da linguagem escrita ou oral; simbólica, centram-se no uso da notação simbólica e incluem o uso de variáveis em, por exemplo, equações, expressões algébricas ou fórmulas. Por fim, esta autora introduz o termo "representação dual" quando considera a possibilidade de lidar simultaneamente com duas categorias de representações na resolução de problemas, por exemplo, numérica e verbal. Assim, as representações duais não constituem uma categoria diferenciada, representam a articulação entre duas das quatro categorias representacionais referidas por Matteson (2006). Nestes casos, embora possa haver uma categoria dominante no ataque ao problema, nenhuma apresenta pormenores suficientes para ser considerada independente. Caso se utilizem mais do que duas categorias representacionais, referimos que se recorreu à combinação de diferentes representações, opção normalmente utilizada por vários alunos (Milinkovic; Mihajlovic; Dejic, 2020).

Tendo por base as categorizações apresentadas anteriormente, propomos a formulação de um sistema representacional que articula algumas dessas ideias e que se traduz no diagrama da Figura 1.

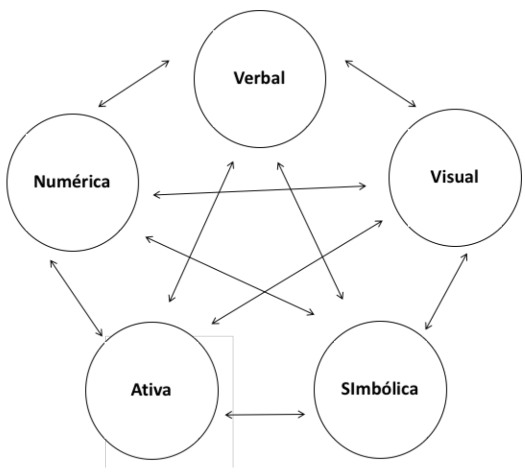


Figura 1: Múltiplas representações
Fonte: Autoras (2022)

Consideramos, no diagrama da Figura 1, cinco categorias principais de representações (ativa, verbal, visual, numérica e simbólica), de acordo com as definições propostas pelos autores referidos anteriormente (Bruner, 1966; NCTM, 2014; Tripathi, 2008), mas também as representações duais (Barbosa; Vale, 2022).

Os conceitos matemáticos surgem da interação entre o sistema de signo/símbolo e os contextos de referência/objetos. Esta simbologia está ligada ao que Dreyfus (1991) distingue na atividade matemática como sendo as representações simbólicas. Além destas, o autor ainda considera as representações mentais, que ocorrem quando falamos ou pensamos sobre qualquer objeto ou processo matemático e que cada um de nós relaciona com algo que tem em mente. É outra forma de utilizar os objetos matemáticos. Enquanto a representação simbólica é escrita ou falada, com a finalidade de facilitar a comunicação sobre um conceito, uma representação mental refere-se a esquemas internos que uma pessoa usa para interatuar com o mundo exterior e que pode diferir de pessoa para pessoa. O uso de múltiplas representações para a compreensão de um conceito matemático é fundamental. Uma representação matemática apenas ilustra, muitas vezes, um dos aspectos do conceito. Só temos uma imagem holística do conceito quando olharmos para essa ideia a partir de diferentes perspectivas. À medida que o número de perspectivas aumenta, desenvolvemos uma visão do conceito mais rica e profunda (Vale, 2009).

Há muito se defende (NCTM, 2014; Tripathi, 2008), no campo da Educação Matemática, a exploração de diferentes representações incentivando os alunos a observar semelhanças e diferenças entre tabelas, gráficos, equações e representações verbais, pelo que se considera como uma prática eficaz e central do ensino da Matemática. Esta prática, para o NCTM (2014), contribui para que os alunos aprendam a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, de variadas formas, contribuindo para aprofundar o conhecimento dos conceitos e procedimentos, a justificar e explicar os seus raciocínios, assim como aumentam as suas capacidades na resolução de problemas.

Para Tripathi (2008, p. 439) “(usar) diferentes representações é como examinar o conceito através de várias lentes, com cada lente a proporcionar uma perspectiva diferente que torna a imagem (conceito) mais rica e mais aprofundada”. Reforçando estas ideias, a investigação sobre a utilização de diferentes representações tem providenciado um conjunto de evidências dos benefícios da utilização de múltiplas representações. Uma abordagem assentada na utilização de representações de natureza diversa é bastante poderosa e potencializa o desenvolvimento da flexibilidade do pensamento, característica fundamental num bom resolvedor de problemas (NCTM, 2014). Esta flexibilidade é também importante nos (futuros) professores, uma vez que lhes permite sustentar a aprendizagem de uma forma mais aprofundada, conduzir as discussões de sala de aula perspectivando uma diversidade de caminhos e constitui uma via para facilitar a abstração e a generalização, à medida que os alunos desenvolvem a sua capacidade de matematizar as situações exploradas (Vale; Barbosa, 2020a).

2.2 Tarefas com múltiplas resoluções

Todos os alunos devem ter a oportunidade de se envolverem em atividades matemáticas significativas, e cabe ao professor libertar o seu potencial através da escolha de tarefas e estratégias de ensino adequadas. A aprendizagem da Matemática está fortemente dependente do professor e das tarefas propostas aos alunos, pelo que as escolhas do professor determinarão a qualidade da aprendizagem dos alunos, pois tarefas com diferentes níveis de exigência cognitiva induzem diferentes modos de aprendizagem (Chapman, 2015; Doyle, 1988; Stein; Smith, 1998; Sullivan; Clarke; Clarke, 2013; Vale; Barbosa, 2020b). Assim, para melhorar a compreensão conceitual das ideias matemáticas, os professores devem selecionar tarefas desafiantes que promovam o pensamento flexível e a capacidade de resolução de problemas. Em particular os professores em formação, precisam de oportunidades para analisar, explorar e resolvê-las da mesma forma que deverão ser exploradas com seus futuros alunos.

Uma tarefa é desafiante quando é proposta intencionalmente para atrair os alunos a descobrir uma resolução, envolvendo-os ativamente em diversas formas de pensar que exigem relacionar conceitos, representações e procedimentos, permitindo-lhes aumentar a sua compreensão e conhecimento, sendo normalmente interessante e agradável (Vale; Barbosa, 2023). Isto implica o uso de tarefas que vão ao encontro de diferentes modos de pensar utilizadas pelos alunos, confrontando-os com tarefas com múltiplas (re)soluções que os desafiem a pensar fora da caixa, motivando-os a aprender e a trabalhar uns com os outros (Vale; Barbosa, 2020b). Entre as diferentes tarefas que usamos nas aulas de Matemática, privilegiamos as que têm múltiplas (re)soluções porque desenvolvem o conhecimento matemático e incentivam a flexibilidade e a criatividade no pensamento matemático do aluno (Leikin, 2016; Polya, 1973). Consideramos que uma tarefa com múltiplas (re)soluções é aquela que convida a diferentes formas de resolução, recorrendo a diferentes estratégias, e que constitui um desafio para o resolvedor (Vale; Barbosa, 2023). No contexto da Educação Matemática, as tarefas de resolução de problemas são a escolha mais adequada, uma vez que favorecem o raciocínio e a comunicação, ajudando os alunos a atingir uma compreensão mais profunda.

Mais recentemente tem-se defendido as *thinking classrooms* ou “salas de aula pensantes” (Liljedahl, 2016), nas quais o objetivo do professor é fomentar um ambiente de sala de aula centrado na resolução de problemas, propondo aos alunos tarefas que incentivem o seu pensamento. Esta ideia é baseada na procura de contextos que permitam que os alunos tenham experiências *aha!* destacando os benefícios que acarretam nas concepções dos alunos e na eficácia da aprendizagem matemática (Liljedahl, 2016). Uma sala de aula pensante é “um espaço habitado por indivíduos que pensam bem individualmente, mas que também pensam coletivamente, aprendendo juntos e construindo conhecimento e compreensão através da atividade e da discussão” (Liljedahl, 2016, p. 362).

Este autor enumerou um conjunto de práticas que os professores devem atender ao planear este tipo de aulas, sendo o primeiro pressuposto o tipo de tarefas utilizadas. No caminho para a construção de uma sala de aula pensante, o modo mais óbvio será o professor ter um conjunto de tarefas problemas que possuam um grau adequado de desafio para que os alunos fiquem presos à sua resolução e encontrem uma solução, ou um caminho para a resolução, que possa surgir através de um *insight* ou de uma experiência *aha!*. As resoluções visuais são um campo privilegiado para proporcionar aos alunos este tipo de experiências (Presmeg, 2014; Vale; Pimentel; Barbosa, 2018).

Neste contexto, a resolução de problemas surge como uma abordagem instrucional na aula de Matemática que, em vez de treinar capacidades que já aprenderam anteriormente, se preocupa com o desenvolvimento das capacidades dos alunos em resolução de problemas para que possam persistir quando confrontados com situações novas que tenham de resolver. O foco está tanto no conteúdo matemático quanto no processo, com a intenção de produzir e interpretar diferentes abordagens e estratégias para resolver o mesmo problema.

2.3 As resoluções visuais

Numa sala de aula temos alunos que evidenciam diferentes modos de pensamento durante a aprendizagem, que vão influenciar a forma como compreendem e comunicam o seu raciocínio e as representações utilizadas. Tanto psicólogos como educadores matemáticos (Borromeo Ferri, 2012; Krutetskii, 1976; Presmeg, 2014; Pimentel; Barbosa, 2018), interessados nas estratégias de resolução de problemas de Matemática, distinguiram os resolvedores de acordo com as estratégias de resolução de problemas utilizadas: visuais ou geométricos - usam estratégias de solução visuais (figuras, diagramas) ou esquemas pictórico-visuais, mesmo quando os problemas poderiam ser mais facilmente resolvidos com ferramentas analíticas; verbais, não visuais ou analíticos - usam abordagens lógico-verbais ou estratégias de solução não visuais (representações algébricas, numéricas, verbais), mesmo quando os problemas poderiam ser mais facilmente resolvidos usando uma abordagem visual; e harmônicos, mistos ou integradores - não têm preferência específica pelo pensamento lógico-verbal ou visual-pictórico, e tendem a combinar estratégias analíticas e visuais, apresentando um modo de pensar integrado (Figura 2).

Figura 2: Tipos de preferências de pensamento durante a resolução de problemas
Fonte: Autoras (2022)

Estas questões têm fortes implicações para as práticas de sala de aula e, em particular, para a consciencialização dos professores da necessidade de promover a utilização de abordagens diferenciadas na sala de aula, analíticas e visuais e, se possível, de as integrar, a fim de ir ao encontro da compreensão dos conceitos matemáticos de cada um e todos os alunos e permitir alargar o repertório de estratégias.

Apesar das diferentes formas de pensar que um professor pode encontrar na sala de aula, os alunos devem experimentar o uso de diferentes abordagens para o mesmo problema, seja ele de natureza visual ou não visual. Acreditamos que as tarefas com múltiplas resoluções dão aos alunos a oportunidade de aplicar outros modos de pensar, qualquer que seja a sua natureza, e também de contactar com uma diversidade de estratégias e representações, que podem contribuir para o alargamento do seu repertório quando atacam um problema.

Neste contexto, e de acordo com a nossa própria experiência, acreditamos que a visualização pode ter um grande potencial, quer como contexto em que a tarefa é apresentada, quer como veículo para alcançar a solução (Pimentel; Barbosa, 2018; Vale; Barbosa, 2023). Não nos interessa classificar os alunos de acordo com a sua forma de aprender/pensar, mas sim sensibilizar os professores e futuros professores para o fato de que, numa sala de aula, teremos alunos que não aprendem ou compreendem todos da mesma forma, e que um ensino eficaz da Matemática deve envolver uma variedade de abordagens, de modo a ir ao encontro das necessidades de todos os alunos e mais facilmente ajudar a ultrapassar as suas dificuldades, daí a importância das representações múltiplas.

A aprendizagem é um processo complexo e multifacetado e é provável que o professor e os alunos recorram a uma variedade de estratégias e preferências em função da tarefa e do contexto. As potencialidades e limitações do raciocínio visual são reconhecidas como fazendo parte da cultura da sala de aula de Matemática (Presmeg, 1999; Zodik; Zaslavsky, 2007), relacionadas com as considerações e dilemas subjacentes à escolha das representações visuais.

As estratégias visuais não são novas na literatura, mas são frequentemente ignoradas em comparação com as estratégias analíticas. Esta situação não é benéfica para os alunos, uma vez que as abordagens visuais podem ser um excelente complemento ao pensamento analítico ou mesmo ajudar a gerar resoluções mais simples e mais significativas. É também claro que diferentes alunos, quando resolvem problemas, podem ter diferentes formas de pensar e, alguns preferem basear o seu raciocínio em características visuais (Presmeg, 1999), o que reforça a importância de não negligenciar esta capacidade. O recurso a representações visuais pode aliviar a carga cognitiva na resolução de problemas, permitindo que os alunos trabalhem numa parte do modelo sem que tenham de acompanhar mentalmente o modelo na íntegra, e também apoiar o raciocínio numérico. Ou seja, ajudam os alunos na compreensão dos conceitos e procedimentos e a dar sentido aos problemas que resolvem, mas também facilitam a discussão com os seus pares (Arcavi, 2003; NCTM, 2014; Vale; Barbosa, 2020b).

Vejamos a tarefa da Figura 3, que tenta ilustrar o que temos vindo a discutir. Este problema tem múltiplas resoluções e representações, em que a resolução visual pode ser uma alternativa mais compreensível para os alunos numa determinada fase da sua aprendizagem.

ISSN 2594-9179

Os lápis

Três lápis, A, B, C têm em conjunto 81 cm de comprimento.
A é mais comprido 7 cm do que B. C é mais curto 4 cm do que B.
Qual é o comprimento de A?

Figura 3: Problema "Os lápis"
Fonte: Autoras (2022).

Analisemos algumas resoluções expectáveis para a resolução deste problema, apresentando na Figura 4 possíveis resoluções.

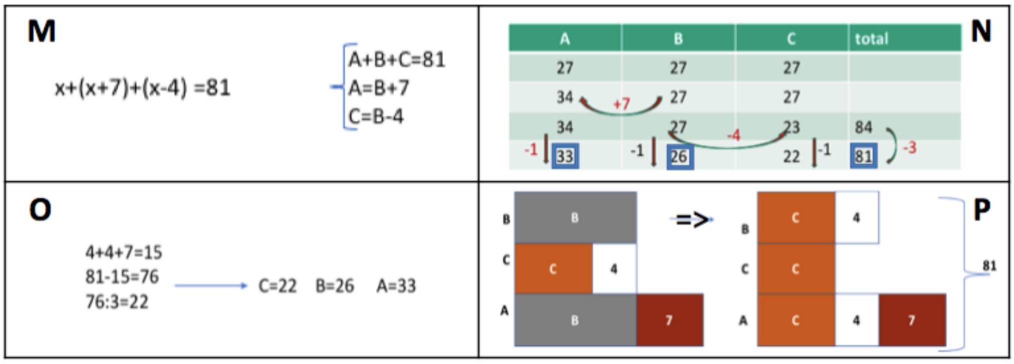


Figura 4: Algumas resoluções possíveis do problema "Os lápis"
Fonte: Autoras (2022)

A maioria dos alunos de níveis mais adiantados utilizará provavelmente uma abordagem analítica, pois têm maior probabilidade de recorrer a representações simbólicas (algébricas), como sejam, equações ou sistemas de equações (em M). Os alunos mais novos ou aqueles que ainda não tenham conhecimentos sobre álgebra, como de equações e sistemas de equações, ou mesmo que tenham e manifestem dificuldade em mobilizar esses conhecimentos, poderão recorrer a representações e relações numéricas, usando uma estratégia de tentativa e erro, com os dados organizados numa tabela (em N) ou a manipulação de expressões numéricas (aritméticas) (em O).

No entanto, existe outro tipo de resolução, a visual (em P). Nesta abordagem podemos recorrer ao modelo da barra, em que elas surgem da tradução das diferentes condições do problema, o que leva à construção de outro modelo de barras equivalente, que facilmente se traduz nas relações numéricas apresentadas em O e conduz à solução. A resolução numérica (em O) é frequentemente a que os alunos do ensino básico apresentam, mas nem todos chegam a esta resolução de forma compreensível. Todavia, o modelo da barra (em P) dá sentido aos símbolos da resolução numérica. O que acabamos de referir está em consonância com as ideias de Dreyfus e Eisenberg (1986) quando afirmam que muitos dos conceitos e processos devem estar ligados a representações visuais, ou seja, podem ser construídos modelos visuais que refletem (em grande parte) a estrutura matemática que lhes está subjacente.

3 Metodologia

Este artigo relata parte de um estudo mais amplo, realizado com 14 futuros professores em formação do ensino básico (futuros professores de alunos dos 6 aos 12 anos de idade, de uma instituição de formação de professores em Portugal), em que se pretendia compreender os tipos de estratégias e representações matemáticas utilizadas na resolução de tarefas com múltiplas resoluções. Adotou-se uma metodologia qualitativa e interpretativa numa abordagem exploratória (Erickson, 1986; Given, 2008). Os participantes estavam inscritos numa disciplina semestral de Didática da Matemática que serviu de contexto para este estudo e que, entre outros tópicos, incluía um módulo sobre visualização e resolução de problemas.

Com este módulo específico, pretendíamos conscientizar os participantes, enquanto futuros professores, para a existência de diferentes estilos de aprendizagem e, consequentemente, para a importância de explorar uma diversidade de abordagens, não só analíticas, para ir ao encontro das necessidades dos alunos. Os participantes resolveram individualmente várias tarefas problema com múltiplas resoluções, que permitem a utilização de diferentes estratégias e representações. Os dados foram produzidos de forma holística, descritiva e interpretativa, durante a unidade curricular, da qual os investigadores eram também professores, e incluíram: observação participante, registros das reações e interações dos futuros professores, e produções escritas dos participantes relativamente às tarefas propostas. Neste processo, identificamos as categorias de análise de forma indutiva nos dados recolhidos, com o apoio do problema em estudo e do quadro teórico, centrando-nos nomeadamente na categorização das estratégias (analíticas, visuais e mistas) e das representações utilizadas (ativas, numéricas, verbais, visuais, simbólicas).

4 Resultados e Discussão

Algumas tarefas, devido ao seu contexto e às práticas de ensino padronizadas, induzem os alunos (incluindo os futuros professores) a usar resoluções analíticas, no entanto muitas destas situações podem ser resolvidas recorrendo a outras estratégias e tipos de representações. As tarefas propostas aos participantes durante o módulo de ensino foram selecionadas com este princípio em mente, incluindo uma diversidade de conteúdos dos principais domínios matemáticos do currículo português do Ensino Básico (Números, Geometria, Álgebra). Optamos por apresentar neste artigo dois exemplos dessas tarefas, uma sobre frações e outra sobre sequências e padrões (Barbosa; Vale, 2022). Vejamos o 1.º exemplo (Figura 5).

Os livros

Resolve o seguinte problema por mais do que um processo A Joana emprestou 4/9 dos livros da sua estante ao Pedro e ainda ficou com 35 livros. Descubra quantos livros tem a Joana.

Figura 5: Problema "Os livros"
Fonte: Autoras (2022).

O problema apresentado na Figura 5 foi proposto após uma exploração didática específica do tema Números Racionais. Ao longo das aulas, estes alunos tomaram contato com o modelo da barra (modelo que nunca tinham utilizado), uma representação que, como referido anteriormente, facilita a resolução de certos problemas numéricos ou algébricos, pois permite dar significado às situações propostas. Esta abordagem teve um impacto positivo nestes futuros professores, que reconheceram o seu grande potencial em comparação com as estratégias analíticas, tradicionalmente utilizadas através de manipulações numéricas muitas vezes usadas sem sentido. Todos os participantes recorreram a estratégias mistas para resolver este problema, combinando abordagens visuais e analíticas. A componente visual, traduzida na utilização do modelo da barra, foi essencial para melhor compreenderem as condições do problema e darem significado aos procedimentos utilizados.

Na Figura 6 vemos dois exemplos de resoluções representativas apresentadas pelos alunos.

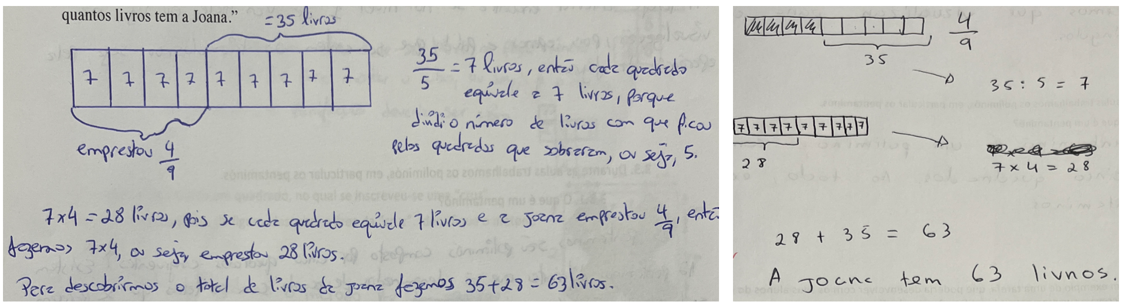


Figura 6: Resoluções visuais

Fonte: Autoras (2022).

As estratégias utilizadas nestas duas resoluções são semelhantes, ambas visuais, baseadas no desenho (modelo da barra), que atua como um passo crucial para a compreensão do problema, evidenciando claramente o significado parte-todo, o que facilita o estabelecimento das relações numéricas necessárias para chegar à solução. Verificamos que nesta tarefa as representações visuais foram a escolha predominante para este grupo de participantes (10 alunos), no entanto, na componente analítica, recorreram também a representações verbais e numéricas (na primeira), complementando a explicação do seu raciocínio através de palavras, ou apenas a representações numéricas (na segunda), complementando o esquema com os cálculos correspondentes.

Vejamos o 2.º exemplo (Figura 7):

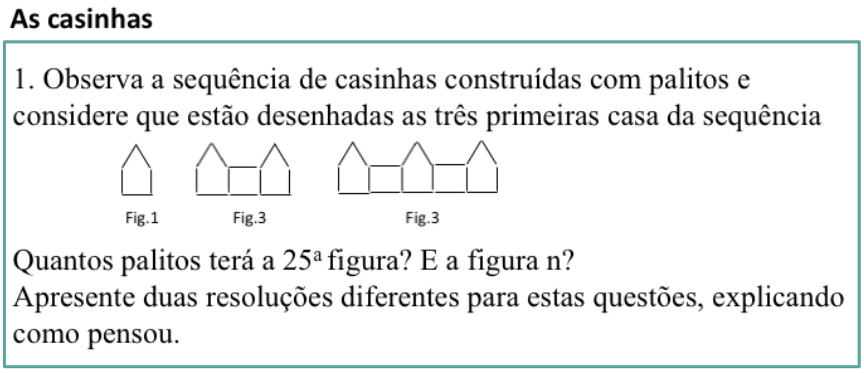


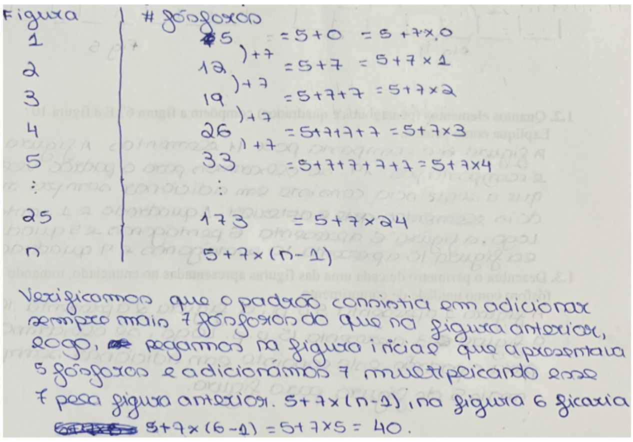
Figura 7: Problema "As casinhas"
Fonte: Autoras (2022).

A segunda tarefa foi proposta no contexto do pensamento algébrico, principalmente relacionado com o estudo de sequências e padrões. O interessante desta tarefa, e de um modo geral das tarefas de resolução de problemas que envolvem a procura de padrões, reside no fato de que não existe um caminho imediato sugerido pela tarefa, exigindo que os alunos descubram as estruturas matemáticas subjacentes a esse padrão.

Esta tarefa, apesar de ser apresentada através de um contexto visual (representações pictóricas das casas), permite ao resolvedor utilizar múltiplas abordagens, analíticas, visuais ou mistas, para estabelecer generalizações próximas e distantes. Neste caso, dez dos participantes recorreram a estratégias analíticas e quatro utilizaram estratégias mistas. Apesar de reconhecerem as potencialidades da visualização ao longo do módulo de ensino, no caso da Álgebra revelaram preferência por abordagens analíticas, mostrando que tinham procedimentos profundamente enraizados.

Apresentamos, na Figura 8, dois exemplos de resoluções representativas do trabalho destes futuros professores na resolução desta tarefa.

Resolução analítica



Resolução visual

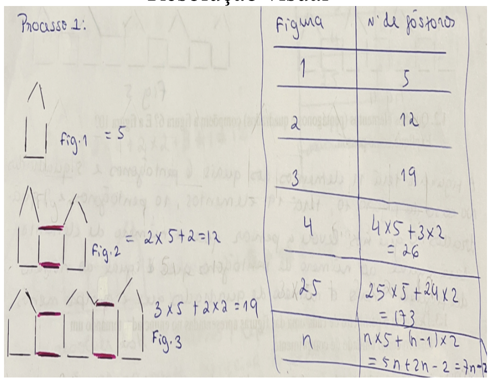


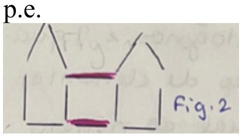
Figura 8: Duas resoluções do problema "As casinhas"
Fonte: Autoras (2022).

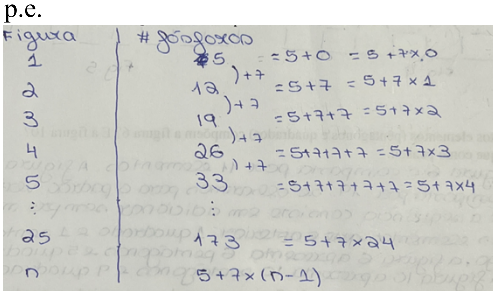
A primeira resolução apresentada na Figura 8, mostra uma estratégia analítica utilizada para determinar o número de correspondências na 25.ª e n.ª figuras. Nestes casos, estes alunos, futuros professores, começaram por transformar as figuras em números, aplicando um raciocínio recursivo para os termos mais próximos da sequência, identificando uma variação de sete unidades. De forma a generalizar para termos distantes, utilizaram as relações numéricas identificadas e expressaram-nas numa tabela. Como complemento às representações numéricas utilizadas, sete alunos recorreram também a representações verbais, explicando através de palavras como pensaram.

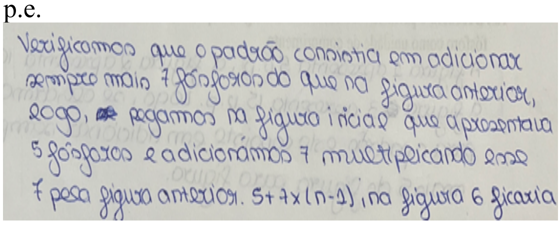
Após a construção da tabela com o número de correspondências em cada figura, a sequência figurativa deixou de ser analisada, recorrendo apenas à manipulação numérica. A segunda resolução observada na Figura 8 tem um caráter visual, sendo claro que os desenhos tiveram um papel fundamental na identificação da relação funcional, tanto para termos próximos como para termos distantes. Além dos desenhos, os participantes utilizaram expressões numéricas e simbólicas, organizando a informação numa tabela, recorrendo, assim, a representações visuais, bem como a representações numéricas e simbólicas.

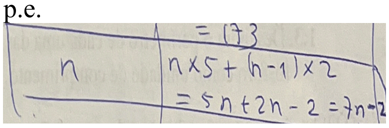
É interessante ver que, nas tarefas que envolvem padrões figurativos, para uma maior compreensão das representações algébricas, a representação pictórica é o primeiro passo para a compreensão da estrutura subjacente à construção do padrão.

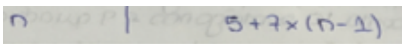
Vejamos no Quadro 1 uma síntese que ilustra as representações utilizadas nas duas resoluções apresentadas neste 2.º exemplo.

<table>
<tr><td>Representações</td><td>Ilustração e Pensamento do aluno</td></tr>
<tr><td>Visual
(representação pictórica)</td><td>p.e.


Identificaram duas “casinhas”, ou seja, dois pentágonos e dois palitos que formavam o quadrado entre elas, que é o modo principal de pensar que vai permitir passar para outras representações.</td></tr>
<tr><td>Numérica
(expressão aritmética)</td><td>p.e.


Nesta tabela as expressões numéricas que dão o número total de palitos resultam de um raciocínio recursivo em que cada termo resulta do anterior mais 7 (verbalizado posteriormente).</td></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>p.e.


O modo de pensar verbalizado foi baseado num raciocinio recursivo, obtido pela contagem.</td></tr>
<tr><td>Simbólica
(expressão algébrica)</td><td>p.e.




Os alunos chegaram à generalização do padrão de diferentes modos, obtendo expressões diferentes, mas equivalentes.</td></tr>
</table>

Quadro 1: Representações usadas até à generalização do padrão.
Fonte: Autoras (2024)

Nesta tarefa não surgem representações ativas, contudo se for proposta a alunos do ensino básico (alunos com 6-12 anos) deverá ter como suporte uma primeira fase de abordagem ativa ao problema utilizando material, como sejam, palitos, fósforos ou outro material equivalente, uma vez que permite concretizar a sequência e tem a vantagem de se “ver” a formação dos termos da sequência, além de que se pode “apagar” mais facilmente caso haja enganos.

Com base nestas duas tarefas, que permitem múltiplas resoluções, podemos dizer que contribuem para o uso de diferentes estratégias e diferentes representações, dando ao resolvedor a oportunidade de escolher o caminho a seguir com o qual mais se identifica. Globalmente, verificámos uma predominância de abordagens analíticas e mistas. As representações verbais, numéricas, simbólicas e visuais foram frequentemente mobilizadas e, na maioria dos casos, no sentido da aplicação de representações duais, complementando duas das categorias principais.

Embora não seja raro que os alunos utilizem mais do que uma representação na resolução de uma determinada tarefa, há normalmente um tipo que é dominante ou essencial para atacar o problema (como o uso do modelo da barra na tarefa 1 – Figura 6). De um modo geral, os alunos recorreram a múltiplas representações, de diferentes categorias representacionais, para complementar o seu raciocínio e chegar à solução, reconhecendo que podem existir limitações nas representações principais, que, usadas de forma isolada, podem não ser suficientes para resolver uma tarefa. Ou seja, uma representação, apesar de dominante no ataque à resolução, pode não ser suficiente, pelo que há necessidade de recorrer a outras representações que complementem a sua resolução ou explicação.

5 Principais conclusões

As tarefas apresentadas são problemas que geralmente envolvem o recurso a expressões matemáticas, fórmulas e conceitos típicos incluídos nos currículos escolares, no entanto permitem diferentes caminhos para a solução e incentivam o uso de múltiplas representações. Neste sentido, estas representações apoiam várias formas de pensar (Krutetskii, 1976; Vale; Pimentel; Barbosa, 2018) e de manipular objetos matemáticos, em consonância com o que preconiza o NCTM (2014). Para além disso, dão aos alunos a oportunidade de operar e raciocinar com base em diferentes representações e ideias de formas únicas. Os alunos que resolvem tarefas deste tipo serão motivados a procurar resoluções criativas e a pensar de forma mais flexível na resolução de outros problemas, a experimentar métodos e representações alternativas para chegar à solução. Estas tarefas desencadeiam a utilização de diferentes estratégias, majoritariamente analíticas e mistas, e também de representações múltiplas, majoritariamente numéricas, verbais, visuais e simbólicas, normalmente aplicadas através de duais. Tradicionalmente, os professores utilizam e confiam mais nas representações simbólicas e nas estratégias analíticas.

Consequentemente, os alunos tendem a fazer o mesmo. Por esta razão, demos especial importância às estratégias e representações visuais no módulo de ensino, devido à pouca visibilidade que têm e aos benefícios que trazem à aprendizagem, procurando assim abranger diferentes estilos de aprendizagem. O professor deve estar atento para quando não surjam durante uma aula, chamar a atenção para outras formas de "ver" convidando os alunos a pensar de outro modo e caso não surjam deve explicitamente mostrar essa forma de pensar. Pretendemos também realçar a vantagem de utilizar múltiplas representações na resolução de tarefas e, sobretudo, de as integrar, recorrendo a representações duais, o que conduz muitas vezes a abordagens mistas.

Este trabalho segue recomendações internacionais (NCTM, 2014) que sugerem que uma abordagem de ensino eficaz envolve dar aos alunos oportunidades para resolver problemas e pensar criticamente, comunicar, ser criativo, tomar decisões em colaboração para compreender e aplicar ideias matemáticas. Neste sentido, o professor deve ter um repertório alargado de tarefas para propor aos alunos que ponham em evidência algumas das ideias que foram discutidas ao longo deste texto. Desafiar alunos e (futuros) professores a pensar em diferentes abordagens para a mesma situação problemática aumenta a probabilidade de usar ideias e representações de natureza diferente. Nesta perspectiva estamos em consonância com Polya (1973) quando refere que é melhor resolver um problema de cinco modos diferentes, do que cinco problemas diferentes do mesmo modo.

Para concluir, os programas de formação de professores devem incluir experiências que estimulem o conhecimento dos professores em formação, especialmente resolvendo as mesmas tarefas e usando os mesmos princípios de ensino e aprendizagem que se espera que eles usem com os seus futuros alunos (Cooney; Krainer, 1996; Sullivan; Clarke; Clarke, 2013). O trabalho que temos vindo a realizar ao nível da formação inicial de professores aponta no sentido de que os futuros professores adquirem eles próprios fluência e flexibilidade na resolução de problemas, ao mesmo tempo que ficam com mais um recurso para interpretar e resolver muitas outras situações com que sejam confrontados, além de aumentarem o conhecimento didático, essencial para o seu futuro.

Referências

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Cham, v. 52, p. 215–241, 2003.

BARBOSA, A; VALE, I. As representações: escolhas eficazes na resolução de problemas. **Educação & Matemática**, APM, v. 166, p. 19-24, 2022.

BORROMEO FERRI, R. Mathematical Thinking styles and their influence on teaching and learning mathematics. Paper presented at the 12th International **Congress on Mathematical Education**, Seul, Korea. Retrieved in march 5, 2015. Disponível em: http://www.icme12.org/upload/submission/1905_F.pdf. 2012. Acesso em: 29 jan. 2023.

BRUNER, J. **The process of education**. NY: Harvard University Press,1966.

CHAPMAN, O. Mathematics teachers’ knowledge for teaching problem solving. **LUMAT**, Helsinki, v. 3, n. 1, 19–36, 2015.

COONEY, T.; KRAINER, K. Inservice teacher mathematics education: the importance of listening. In: BISHOP, A.; CLEMENTS, K.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LABORDE, C. (Eds.). **International Handbook of Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1996. p. 1155-1185.

DOYLE, W. Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. **Educational Psychologist**, London, v. 23, n. 2, p. 167–180, 1988.

DREYFUS, T. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In: FURINGHETTI, F. (Ed.). **Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (vol 1), Assis, PME, p. 33–48, 1991.

DREYFUS, T; EISENBERG, T. On the aesthetics of mathematical thoughts. **For the Learning of Mathematics**, New Westminster, v. 6, n. 1, p. 2–10, 1986.

ERICKSON, F. Qualitative Methods in Research on Teaching. In: WITTROCKK, M. (Ed.). **Handbook of Research on Teaching**. New York, NY, USA: MacMillan, p. 119–161, 1986.

GIVEN, L. M. (Ed.). **The SAGE Encyclopedia of Qualitative Research Methods**. Thousand Oaks, CA, USA: MacMillan, 2008.

GOLDIN, G. A. Mathematical representations. In: LERMAN, S. (Ed.). **Encyclopedia of mathematics education**. Cham, CH: Springer, 2018. p. 409-413.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.** Chicago: University of Chicago Press, 1976.

LEIKIN, R. Interplay between creativity and expertise in teaching and learning of mathematics. In: CSÍKOS, C; RAUSCH, A; SZITÁNYI, J. (Eds.). **Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (vol. 1). Szeged, PME, p. 19–34, 2016.

LILJEDAHL, P. Building thinking classrooms: conditions for problem-solving. In: FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Posing and Solving Mathematical Problems, Research in Mathematics Education**. Cham, CH: Springer, p. 361-386, 2016.

MATTESON, S. M. Mathematical literacy and standardized mathematical assessments. **Reading Psychology**, London, v. 27, n. 2-3, p. 205-233, 2016.

MILINKOVIC, J.; MIHAJLOVIC, A.; DEJIC, M. Effective choices of representations in problem solving. In: JANKVIST, U.T.; HEUVEL-PANHUIZEN, M.; VELDHUIS, M. (Eds.).

Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Utrecht, CERME, p.4606-4613, 2020.

NCTM. **Principles to actions: ensuring mathematical success for all.** Reston: NCTM, 2014.

POLYA, G. **How to solve it.** Princeton, NJ: Princeton University Press, 1973.
PRESMEG, N. Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas. Badalona, **Suma**, v. 32, p.17-22, 1999.

PRESMEG, N. Creative advantages of visual solutions to some non-routine mathematical problems. In: CARREIRA, S.; AMADO, N.; JONES, K.; JACINTO, H. (Eds.). **Proceedings of the Problem@Web International Conference:** Technology, Creativity and Affect in mathematical problem solving. Faro, Portugal, Universidade do Algarve, p. 156-167. 2014.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, Reston, v. 3, p. 268–275. 1998.

SULLIVAN, P.; CLARKE, D.; CLARKE, B. **Teaching with tasks for effective mathematics learning**. Cham, CH: Springer, 2013.

TRIPATHI, P. Developing mathematical understanding through multiple representations. **Mathematics Teaching in the Middle School***,* Reston, v. 13, p. 438-445, 2008.

VALE, I. Das tarefas com padrões visuais à generalização. In: FERNANDES, J.; MARTINHO, H.; VISEU, F., (Orgs.). **Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática.** Viana do Castelo, APM, p. 35-63. 2009.

VALE, I; BARBOSA, A. Mathematics & Movement: the gallery walk strategy. In: CARVALHO, S.; PALHARES, P.; AZEVEDO, F.; PARENTE, C. (Eds.). **Improving children's learning and well-being**, Centro de Investigação em Estudos da Criança (CIEC)/Instituto de Educação, p. 7-22, 2020a.

VALE, I; BARBOSA, A. Gallery Walk: uma estratégia ativa para resolver problemas com múltiplas soluções. **REMAT – Revista de Educação matemática**, v. 17, p. 1-19, 2020b.

VALE, I; BARBOSA, A. Visualization: A Pathway to Mathematical Challenging Tasks. In: LEIKIN, R. (Ed.). **Mathematical Challenges for All. Research in Mathematics Education**. Springer, Cham, p. 283-306, 2023.

VALE, I; PIMENTEL, T; BARBOSA, A. The power of seeing in problem solving and creativity: an issue under discussion. In: CARREIRA, S.; AMADO, N.; JONES, K. (Ed.). **Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technology, creativity and affect**. Springer, Cham, p. 243-272, 2018.

ZODIK, I.; ZASLAVSKY, O. Is a visual example in geometry always helpful? In: WOO, J. H., LEW, H. C, PARK, K. S.; SEO, D. Y. (Eds.). **Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, PME. v. 4, p. 265-272, 2007.

Recebido em: 27 de novembro de 2023

Aceito em: 15 de agosto de 2024