ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

DOI: https://doi.org/ 10.48075/ReBECEM.2025.v.9.n.2.33722

# MANIPULÁVEIS NO ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL EM LIVROS DIDÁTICOS: UM OLHAR PELA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

# MANIPULABLES IN THE TEACHING OF THE DECIMAL NUMBERING SYSTEM IN TEXTBOOKS: A LOOK AT THE THEORY OF SEMIOTIC REPRESENTATION REGISTERS

Eduardo Sabel[1]

Everaldo Silveira[2]

**Resumo**: O uso de materiais manipuláveis para ensinar o Sistema de Numeração Decimal (SND) tem sido recomendado por vários pesquisadores da Educação Matemática, sendo fortemente indicado em livros didáticos (LD) dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Neste artigo, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, discutimos os aspectos semióticos desempenhados por alguns manipuláveis. Discutimos as contribuições dos materiais manipuláveis indicados em uma coleção de LD dos Anos Iniciais para o ensino do SND. Para isso, analisamos os livros da 'Coleção Bem Me Quer Matemática' e neles identificamos os três tipos de manipuláveis mais indicados: os blocos base dez, o ábaco e o dinheirinho de papel, e analisamos extratos representativos com a utilização desses materiais. Como resultado, destacamos que esses materiais contribuem como representações auxiliares para o ensino do SND, sobretudo no estímulo de atividades cognitivas de tratamento e conversão, e ainda, apresentamos também algumas situações de uso inadequadas.

**Palavras-chave**: Materiais Manipuláveis; Registros de Representação Semiótica; Análise de livro didático; Sistema de Numeração Decimal.

**Abstract**: The use of manipulable materials to teach the Decimal Numbering System (DNS) has been recommended by several researchers in Mathematics Education and is strongly indicated in textbooks for the early years of elementary school. In this article, in the light of the Theory of Semiotic Representation Registers, we discuss the semiotic aspects played by some manipulatives. We discuss the contributions of the manipulable materials indicated in a collection of primary school textbooks for teaching the DNS. To do this, we analyzed the books in the 'Bem Me Quer Matemática Collection' and identified the three most commonly indicated types of manipulatives: base ten blocks, the abacus and paper money, and analyzed representative extracts using these manipulatives. As a result, we highlighted that these materials contribute as auxiliary representations for teaching DNS, especially in stimulating cognitive processing and conversion activities, and then, we also present some inappropriate situations.

**Keywords**: Manipulatives; Semiotic Representation Registers; Textbook Analysis; Decimal Numbering System.

[1]Doutorando em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT/UFSC). Professor efetivo na Prefeitura Municipal de Gaspar/SC. Vice-diretor da Diretoria Regional da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM/SC). E-mail: eduardosabelmatematica@gmail.com
[2]Doutor em Educação Científica e Tecnológica (UFSC). Professor do Centro de Ciências da Educação e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (UFSC), Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. E-mail: evederelst@gmail.com

## 1 Introdução

O domínio do Sistema de Numeração Decimal (SND) é essencial para o desenvolvimento de habilidades matemáticas. Os materiais manipuláveis, quando usados corretamente, podem contribuir significativamente na elaboração desse conhecimento (Silveira, 2016, 2018; Lorenzato, 2006; Gifford*; Rockliffe, 2012*; Kilpatrick; Swafford; Findel, 2001).

Vários autores defendem que utilizar manipuláveis auxilia no ensino da matemática, pois oferece meios de visualização de conceitos matemáticos abstratos (Fiorentini, 1995; Bjorklund, 2014; Uttal, 2003). Outros estudos também apontam a importância do uso de materiais manipuláveis como recursos educacionais em aulas de matemática para crianças, desde muito cedo (Dienes, 1970; Piaget, 1995; Glasersfeld, 1990). É possível também, por meio desses materiais, proporcionar uma prática colaborativa entre as crianças em atividades cooperativas, para que trabalhem juntas, compartilhem ideias e construam conhecimento, através da interação social no processo de aprendizagem (Vygotsky, 2007).

Vale alertar que o uso de manipuláveis pode ser uma estratégia eficaz no ensino do SND, desde que esteja acompanhado de uma abordagem pedagógica que considere todos os significados envolvidos nesse processo. Por isso, é fundamental que se lance um olhar mais criterioso sobre os manipuláveis[3], conforme observa Silveira (2016, 2018). Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, existe uma forte cultura do uso de manipuláveis que pode ser percebida, inclusive, pelas indicações de uso em livros didáticos dessa etapa escolar (Silveira; Powell, 2019). Neste sentido, o livro didático (LD) exerce um papel fundamental na promoção de uma abordagem integrada e acessível às representações desses materiais. A importância da pesquisa com o uso do LD reside no fato de ser uma ferramenta amplamente utilizada em salas de aula, especialmente de matemática (Fan; Zhu; Miao, 2013).

A reconhecida influência do LD escolar nos processos de ensino e aprendizagem tem levado pesquisadores em Educação Matemática a considerá-lo um objeto de investigação importante, que auxilia a compreendermos como os conhecimentos matemáticos chegam na escola (Burgos; Castillo; Montes, 2020; Fan, 2013). No entanto,

[3]Neste texto usaremos os termos manipulativos, manipuláveis e materiais manipulativos como sinônimos.

alguns professores têm dificuldade em analisar o LD e identificar fragilidades matemáticas (didáticas e metodológicas) presentes nesses materiais (Braga, 2016). Portanto, no intuito de contribuir na discussão dessa e outras dificuldade acerca dos LD, utilizaremos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval, como lente de análise.

A TRRS oferece um arcabouço conceitual para discutirmos o papel das representações na aprendizagem matemática. Dentre a variedade possível de representações, os manipulativos constituem-se como uma forma de visualização capaz de contribuir para a compreensão de determinados conceitos matemáticos. No caso dos manipulativos que são indicados e representados nos LD para auxiliar no ensino do SND, essa teoria pode ajudar a pensar no seu papel semiótico na construção dos conceitos (Sabel; Silveira, 2023). Segundo a TRRS, os manipulativos são categorizados como registros de representação auxiliares, conforme delineado por Duval (2001). A complexidade semiótica que um material manipulativo possui (seja ele físico, pictórico ou virtual) nos lança no movimento de estudá-los sobre as lentes da TRRS.

Desta forma, por meio de uma pesquisa de abordagem qualitativa e caráter teórico-descritivo (Ludke; Andre, 1986), delineamos o objetivo deste estudo: **discutir, à luz da TRRS, os aspectos semióticos desempenhados pelos manipuláveis blocos base dez, o ábaco e o dinheirinho, indicados em LD para auxiliar no ensino do SND.** Nos próximos tópicos, portanto, apresentaremos alguns estudos sobre a caracterização do que estamos chamando de materiais manipulativos. Em seguida, dispomos os principais conceitos da TRRS, os procedimentos metodológicos deste estudo e os dados produzidos para a análise e discussão.

## 2 Materiais manipuláveis

Ao longo do tempo, diversos educadores contribuíram com novos recursos didáticos e abordagens inovadoras para o ensino e aprendizagem da matemática. Em geral, o uso de materiais manipuláveis e outros recursos pedagógicos durante as aulas da disciplina tem sido requerido por seus defensores (Lorezanto, 2006). Segundo Nacarato (2005), pelo menos ao que se tem notícia, “o uso de materiais manipuláveis no ensino foi destacado pela primeira vez por Pestalozzi, no século XIX, ao defender que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações” (p. 1). No contexto brasileiro, as primeiras recomendações para a utilização de recursos didáticos[4] na matemática ocorreram na década de 1920, influenciadas pelas novas tendências de então, como a empírico-ativista, a Escola Nova e o Movimento da Matemática Moderna. Essas correntes buscaram popularizar o uso de materiais manipuláveis no país (Murari, 2011). Destacamos ainda, por exemplo, Maria Montessori (1870-1952) e Zoltan Dienes (1916-2014) como nomes importantes que influenciaram (e ainda influenciam) o uso de manipuláveis.

Considerando, portanto, que o uso e a pesquisa de materiais manipuláveis já existem desde Pestalozzi, é compreensível que exista uma vasta quantidade de estudos sobre o tema, e que apresentam diversas perspectivas, conforme mencionado por Fiorentini e Miorim (1990). Vale ressaltar também que diferentes termos têm sido empregados para designar os manipuláveis (Sabel; Pires; Silveira, 2022). Para esses autores "não há consenso por parte da comunidade científica sobre como definir, caracterizar e classificar esses materiais de acordo com suas formas de construção e uso" (Sabel; Pires; Silveira, 2022, p. 9).

No caso deste estudo, baseamo-nos nas definições propostas por Silveira, Powell e Grando (2024, no prelo), que conceituam os materiais manipulativos como sendo "quaisquer objetos físicos, pictóricos ou virtuais utilizados como recurso para o ensino de um determinado conhecimento". Os autores propõem classificá-los em três grandes categorias. Os *materiais didaticamente construídos*, que incluem todo material criado artificialmente para simular relações matemáticas. Estes materiais podem ser físicos (como os Blocos de Dienes), pictóricos (como figuras recortadas do livro) ou virtuais (habilitados por tecnologia digital). Os *instrumentos culturais herdados da tradição*, que acompanharam e auxiliaram o desenvolvimento teórico da matemática, como por exemplo o ábaco, soroban, régua, compasso, etc. E os *objetos extraídos da vida cotidiana*, que atestam, de certa forma, algum fragmento do conhecimento matemático, como barbante, moedas, brinquedos, entre outros.

De um lado, Björklund (2014) sustenta que os materiais manipulativos operam como instrumentos que representam explicitamente conceitos matemáticos abstratos. Já Uttal (2003) considera esses materiais como um conjunto de objetos físicos que auxiliam as crianças a aprender matemática sem depender exclusivamente da representação escrita do conceito. Fiorentini (1995) ressalta a importância dos manipulativos na promoção de

[4]Ao falarmos em 'recursos didáticos' nos referimos a diferentes instrumentos, objetos ou ferramentas utilizadas principalmente como suporte experimental para as práticas em Educação Matemática. Dentre eles, estão incluídos os manipulativos.

processos de abstração reflexiva, que ocorrem por meio da reflexão dos sujeitos acerca de suas atividades, levando-os a uma maior conscientização. Para Lorenzato (2006), manipulativos constituem uma ferramenta crucial para auxiliar os estudantes na construção de seu conhecimento matemático, desde que se considere o contexto social em que o material é empregado.

Por outro lado, alguns estudos adotam uma abordagem mais crítica em relação a esses recursos. Por exemplo, Silveira, em sua análise, destaca que “muitos investigadores apresentam ressalvas e alertas quanto aos limites do uso de manipulativos” (Silveira, 2018, p. 4). Nacarato (2005), por sua vez, observa que o material pode funcionar tanto como um facilitador quanto como um complicador, dependendo de como é empregado. Nesse contexto, Carraher, Carraher e Schliemann (1988) sugerem que o professor reflita profundamente sobre o material e busque suas orientações educacionais, estabelecendo uma conexão com o mundo do estudante. Da mesma forma, Laski *et al.* (2015) argumentam que os manipulativos devem se assemelhar o máximo possível ao conceito que representam. Os autores acrescentam que quanto mais básicos esses materiais forem, evitando características perceptivas irrelevantes ou referências ao mundo real, maiores serão as chances de auxiliarem no processo de aprendizado. Brown, McNeil e Glenberg (2009) também enfatizam que os estudantes devem entender que ao manipularem um determinado material, não estão adentrando um novo campo isolado da matemática.

## 3 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica foi desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval na década de 1980[5], com o propósito de explorar a aprendizagem matemática por meio da análise dos processos cognitivos que a promovem. De acordo com essa perspectiva, os objetos matemáticos são abstratos e conceituais, o que justifica a necessidade de representá-los para que sejam trabalhados. Diferentemente de um objeto de estudo em Biologia (como uma planta, por exemplo), que pode ser transportado fisicamente para a sala de aula, permitindo que os alunos tenham contato direto com ele, a compreensão de um conceito matemático, como uma função afim, por

[5]Para um estudo mais profundo da teoria de Duval, sugerimos a leitura de Moretti e Sabel (2023), que organizaram um conjunto de pesquisas que utilizaram a TRRS em diferentes níveis e contextos escolares. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/251609

exemplo, que não pode ser alcançada diretamente por meio de observação física, já que não pertence ao mundo cotidiano.

Desta forma, Duval (2004) sustenta que todo o processo de ensino e aprendizagem da matemática ocorre somente através do trabalho com as representações semióticas de seus conceitos. Os conceitos matemáticos não são considerados "diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata" (Duval, 2012, p. 268), por se tratarem de ideais e de não serem plausíveis na realidade física. Segundo Duval (2011), esses conceitos são abstratos e mentais, o que torna essencial o uso de representações semióticas para torná-los perceptíveis e, assim, facilitar seu estudo. Cumpre enfatizar que, conforme observado por Duval (2004), a representação externa dos conceitos matemáticos só é viável por meio de um sistema semiótico apropriado.

Quanto aos sistemas semióticos específicos voltados ao ensino de matemática, Duval os define como Registros de Representação Semióticos, os quais cumprem três atividades cognitivas: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. A explicação a seguir de cada uma dessas atividades é fundamentada em Duval (2004):

A <u>formação de uma representação identificável</u> é a possibilidade de identificar o objeto dentro de um sistema semiótico[6], por meio de características e regras específicas daquela representação, que permite que o reconheçamos. Isso ocorre, por exemplo, quando um sujeito olha para uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ e identifica se tratar de uma representação algébrica de uma função quadrática. Já o <u>tratamento</u> é uma atividade que consiste em mudar o conteúdo da representação, por meio de operações específicas do registro em que se está trabalhando. Um exemplo é pensarmos na expressão $(x + 3)^2$, que pode ser tratada algebricamente para se tornar $x^2 + 6x + 9$. Por fim, a atividade cognitiva de <u>conversão</u> consiste em trabalhar com um objeto dentro de um registro de representação inicial, e depois obter outro registro de chegada. Pensamos, por exemplo, nas expressões: um terço e $\frac{1}{3}$. Primeiro, temos a fração em sua representação em língua natural, e logo, sua representação simbólica (numérica).

Na TRRS, esse trânsito, que configura a atividade de conversão, é essencial, pois, para Duval (2004), só ela permite a coordenação entre os registros de representação

[6] Um sistema semiótico é, de acordo com Duval (2011), um conjunto de signos, organizado segundo regras próprias de formação e convenções que apresentam relações internas, as quais permitem identificar os objetos representados.

semiótica. E essa coordenação é uma condição para entender sua hipótese de aprendizagem, conforme podemos observar na figura a seguir:

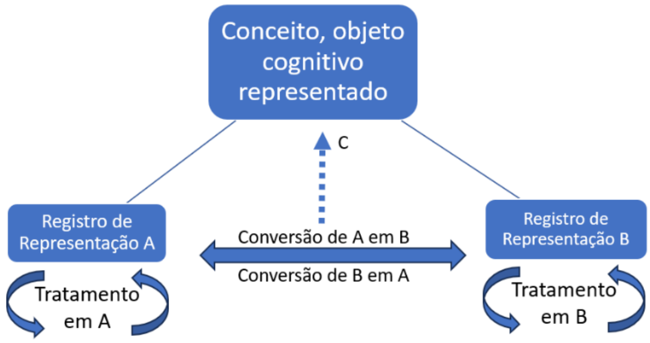



**Figura 1:** Esquema da hipótese fundamental da aprendizagem de Duval
**Fonte:** Elaborado pelos autores a partir de Duval (2004, p. 282).

Na Figura 1, constam os processos cognitivos fundamentais para a aprendizagem que sustentam a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Ao possuir dois registros distintos (A e B), é por meio do processo de transição entre eles que nos aproximamos do conceito matemático (C). Consequentemente, ao trabalharmos com mais registros, promovemos discussões mais amplas acerca de diferentes representações nos processos de ensino.

Essa hipótese de aprendizagem também repercute para o caso dos conceitos do SND e os manipulativos, que discutiremos adiante. Para compreender, por exemplo, como funcionam os agrupamentos e trocas de dez, podemos pensar em uma articulação entre o registro simbólico (algarismos) com os blocos base dez[7]. É preciso que essas representações sejam trabalhadas de forma coordenada para que o uso do material seja eficiente. Uttal, Scudder e Deloache (1997, p.47) explicam que "usar manipulações em uma sala de aula sem garantir que os alunos compreendam completamente sua relação com os conceitos matemáticos que estão sendo ensinados pode ser contraproducente." Ou seja, o êxito de um material didático depende, portanto, dos estudantes conseguirem estabelecer conexões com as outras representações que representam o mesmo objeto matemático, a fim de cumprir a coordenação entre registros presente na Figura 1.

A TRRS justifica a utilização de diversos registros de representação na aprendizagem de matemática, pois a compreensão desse conhecimento está intimamente ligada à relação entre *noesis* e *semiose*. Segundo o autor, a *semiose* refere-se à apreensão

[7] Optamos pelo uso da expressão "blocos base dez" ao invés de "material dourado", segundo tendência na literatura internacional específica sobre o tema.

do registro de representação semiótica, enquanto a *noesis* está voltada à apreensão conceitual do objeto. Em outras palavras, na matemática, a compreensão conceitual não é alcançável sem o uso de representações semióticas (Duval, 2012). Sendo assim, ao ensinar um conceito matemático sob a perspectiva dessa teoria, é imperativo empregar vários registros de representação de um objeto e realizar as três atividades cognitivas relevantes, enfatizando a importância das iniciativas nesse processo.

E qual o lugar dos materiais manipulativos na TRRS? Esse tipo de representação é considerado por Duval (2001) como uma Representação Auxiliar. Tais representações cumprem, ao menos, uma das sete funções[8] a seguir: (1) elaborar informações adicionais; (2) oferecer interpretação heurística; (3) oferecer interpretação explicativa; (4) selecionar elementos relevantes; (5) produzir exemplos contextuais; (6) ilustrar uma situação; e (7) assumir uma função material, substituindo um objeto fisicamente. No contexto dos materiais manipulativos, a função material é a que os torna representações auxiliares.

Sobre as representações auxiliares que cumprem a função material, Duval (2001) comenta que:

> O recurso a representações que podem cumprir a função de material é frequentemente feito em tarefas que se pretende ir de um material constituído por objetos fisicamente manipuláveis para uma simples codificação desses objetos. [...] Mas tais representações não têm nem o poder semântico nem o poder combinatório que os sistemas semióticos fornecem. Tal recurso, pois, não é mais do que um esboço de semiotização que não preenche o abismo entre os objetos reais e as representações semióticas (Duval, 2001, p. 62, tradução nossa).

No fragmento, o autor nos alerta para o fato de termos ciência das limitações que os materiais físicos possuem na aprendizagem da matemática. Se podemos manipular as anilhas nas hastes de um ábaco, isso não significa dizer que o objeto número se torna concreto, mas sim, que mobilizamos um tipo de representação para nos aproximar da noção de cardinalidade do SND. Logo, neste caso, "a representação auxiliar serve de material para as operações cuja execução é necessária para compreender o que a representação principal representa" (Duval, 2001, p. 61, tradução nossa). Isso indica que o uso de manipuláveis pode contribuir potencialmente na aprendizagem, desde que saibamos estabelecer a relação entre os aspectos conceituais abstratos.

## 4 Procedimentos metodológicos

[8] No texto de Moretti e Baerle (2022), há mais detalhes sobre cada um desses tipos.

Esta pesquisa se caracteriza como um estudo qualitativo e descritivo, pois os dados construídos são predominantemente descritivos. Por meio da análise de dados textuais busca promover reflexões e discussões sobre uma determinada temática, a fim de aportar novos conhecimentos para o campo (Ludke; André, 1986). O tipo de dado que trabalhamos, trata-se de extratos de tarefas presentes em LD de Anos Iniciais, que contém representações de manipulativos para ensinar aspectos do SND. A coleção de LD analisada foi a "Bem-me-quer Mais Matemática", da Editora do Brasil (PNLD 2023-2026), na versão do professor. Essa coleção é voltada aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e é utilizada atualmente pela rede municipal de Florianópolis, motivo pelo qual foi tomada como objeto de estudo.

Considerando o nosso modo de olhar para os livros, entendemos que esta pesquisa se configura como uma análise vertical de LD. Para Charalambous *et al*. (2010, p. 5), trata-se de um tipo de investigação que se propõe a "identificar elementos nos quais o livro didático dá sentido a quem o utiliza, apontando elementos específicos de interesse do autor" (Charalambous *et al*., 2010, p. 5). Neste caso, os elementos específicos que buscamos são as indicações e o uso de manipulativos nos livros escolhidos.

Primeiramente, fizemos uma primeira leitura geral dos cinco livros da coleção, nos capítulos que abordavam o SND, em busca de indicações de manipulativos. Essa etapa permitiu identificar os diferentes tipos de materiais representados na série, dos quais escolhemos os três mais presentes para a análise. Em seguida, após essa análise inicial, retomamos os capítulos e examinamos cuidadosamente como os materiais eram abordados. Com isso, percebemos as regularidades sobre as indicações de uso de cada um deles categorizando-as. Escolhemos situações que os representem, de maneira geral na coleção, cada uma das categorias, evitando uma análise repetitiva e saturada. O ábaco, por exemplo, foi indicado várias vezes ao longo de tarefas propostas para trabalhar a questão posicional e, portanto, trazemos na análise um caso representativo deste uso. Essa etapa produziu os dados finais (extratos textuais dos livros) que foram analisados à luz da TRRS e seus principais aspectos semióticos, conforme objetivado.

## 5 Apresentação e análise dos dados

Nos cinco livros da coleção, identificamos os três materiais manipulativos mais indicados para o ensino do SND. São eles os blocos base dez, o ábaco e o dinheirinho; no geral, pensados para serem utilizados fisicamente na escola (inclusive nas orientações ao professor). A seguir, no Quadro 1, apresentamos a presença dos manipulativos indicados nos diferentes livros e quais suas relações com o SND:

| Material | Série escolar | Relações conceituais com o SND |
|---|---|---|
| Blocos base dez | 2º ano, 3º ano, 4º ano e 5º ano | Representar e comparar números; explicar trocas e agrupamentos de dez; auxiliar na resolução das operações básicas. |
| Ábaco | 4º ano e 5º ano | Representar e comparar números; valor posicional no SND; função do zero; operações de adição e subtração. |
| Dinheirinho | 1º ano, 2º ano, 3º ano, 4º ano e 5º ano | Representar e comparar números; explicar trocas e agrupamentos de dez; auxiliar na resolução das operações básicas. |

**Quadro 1:** Relação dos três materiais mais presentes na coleção e suas relações com o ensino do Sistema de Numeração Decimal.
**Fonte:** Elaborado pelos autores (2023).

Blocos base dez (BBD)

O primeiro material que vamos discutir são os blocos base dez (BBD). A seguir, apresentamos alguns exemplos que representam a maneira como a referida coleção os utiliza e indica:

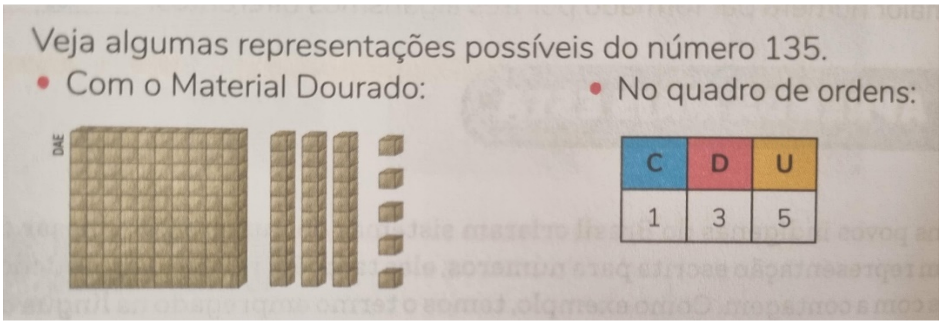



**Figura 2:** Blocos base dez utilizados em conjunto com o QVL
**Fonte:** Rubinstein *et. al.* (2021d, p. 60).

Na Figura 2 as representações do BBD são utilizadas para auxiliar os estudantes a representar e organizar a quantidade no QVL (Quadro Valor de Lugar). O QVL é um espaço organizacional que evidencia o valor agregado às posições em um sistema posicional, que sintetiza os aspectos multiplicativo e aditivo do sistema. Nesse tipo de situação, o livro mobiliza, ao menos, três diferentes representações: as peças do BBD, os algarismos indo-arábicos e a língua materna presente no enunciado e também nas letras C, D e U no QVL. O manipulativo, neste caso, é uma representação auxiliar que age como um modelo semiótico para visualizar a composição de um número, por meio de suas ordens (SABEL; SILVEIRA, 2023). A placa da centena é convertida para o QVL como o algarismo 1 na coluna C, assim como as três barras de dezenas tornam-se o 3 na coluna

D e, por último, os cinco cubinhos de unidades são representados pelo algarismo 5 na coluna U.

Apesar dos BBD se constituírem de blocos com valor agregado e evidente, não dependentes de posição, neste caso, contribuem para a visualização do valor relativo de cada algarismo quando organizamos os algarismos referentes a eles em um QVL. Por exemplo, o algarismo 1 tem valor absoluto menor que o algarismo 3, mas no exemplo, fica evidente que a 1 conta uma potência de maior expoente (dez elevado ao quadrado), ou seja, uma centena, enquanto o algarismo 3 conta dezenas, ou seja, uma potência de expoente menor. Desta forma, este tipo de uso dos BBD auxilia na atividade de conversão do registro simbólico a representação auxiliar oferecida pelos modelos visuais do material manipulativo nos livros e também, permite o inverso.

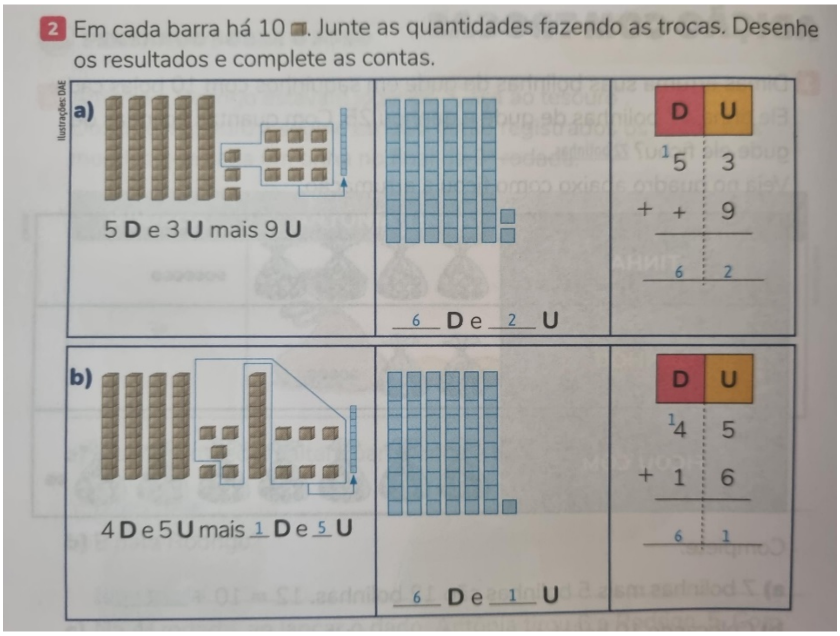



**Figura 3:** Bloco base dez utilizados para auxiliar em operações básicas
**Fonte:** Rubinstein *et. al.* (2021b, p. 210).

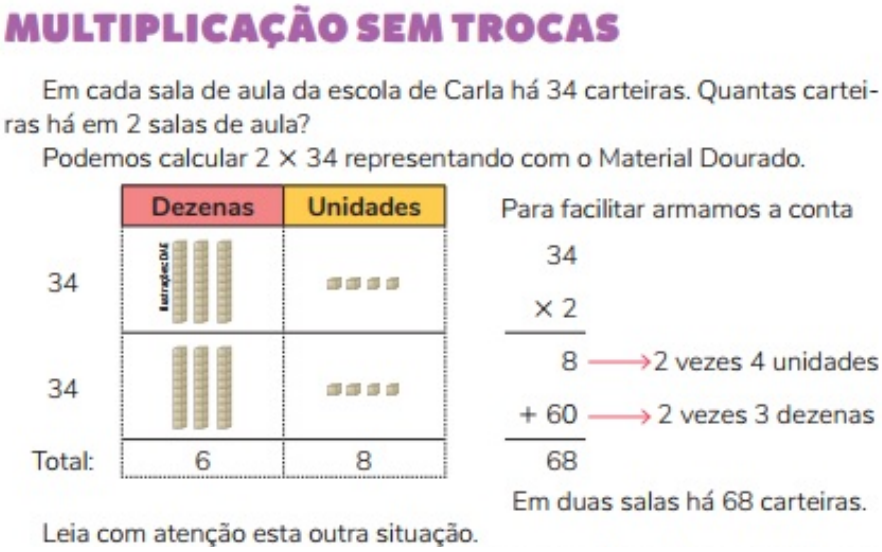
Na análise dos livros do 3º, 4º e 5º ano, a principal indicação de uso dos BBD limita-se a empregá-los como uma representação auxiliar para a realização das quatro operações básicas. Na Figura 3, temos o exemplo para o caso da adição, em que os BBD são usados para representar o funcionamento das trocas e dos agrupamentos no SND, a fim de resolver uma adição. De um lado, temos a representação auxiliar (as peças do BBD) evidenciando os reagrupamentos necessários para as somas presentes na atividade, e do outro, o livro traz a apresentação simbólica do algoritmo.

Nesse tipo de uso, os BBD vão além da atividade cognitiva de conversão e contribuem para os tratamentos ocorridos dentro das operações do SND. Se o estudante

ISSN 2594-9179

manipular as peças do BBD em sala de aula, seja na forma física ou pictórica, esse processo de tratamento da representação material oferece uma visualização das operações aritméticas presentes numa determina tarefa do livro. Em outras palavras, essa manipulação é uma conversão das operações usando as representações dos manipulativos, para a representação com símbolos indo-arábicos. Vale ressaltar, que toda representação semiótica se constituiu por uma forma e cada forma releva certo conteúdo matemático, argumenta Duval (2017). A forma concreta das representações auxiliares contém um certo conteúdo semiótico que é representado, e neste caso, volta-se ao valor agregado já embutido em cada peça, possibilitando ao estudante manipular (realizar tratamentos) que representem as trocas e os agrupamentos do SND. Em outras palavras, os BBD atuam na esfera da *semiose* (apreensão das representações), pois são instrumentos ostensivos sobre o sistema de numeração que auxiliam na *noesis* (apreensão conceitual).

Na presente coleção, especificamente no livro do 3º ano, temos o uso do BBD sobreposto ao QVL, conforme mostra a Figura 4:


MULTIPLICAÇÃO SEM TROCAS

Em cada sala de aula da escola de Carla há 34 carteiras. Quantas carteiras há em 2 salas de aula?

Podemos calcular 2 × 34 representando com o Material Dourado.

| | Dezenas | Unidades |
|---|---|---|
| 34 | | |
| 34 | | |
| Total: | 6 | 8 |

Para facilitar armamos a conta

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 2 \\ \hline 8 \\ +\ 60 \\ \hline 68 \end{array}$$

8 → 2 vezes 4 unidades

\+ 60 → 2 vezes 3 dezenas

Em duas salas há 68 carteiras.

Leia com atenção esta outra situação.

**Figura 4:** Bloco base dez utilizados para auxiliar em operações básicas
**Fonte:** Rubinstein *et. al.* (2021c, p. 171).

No exemplo anterior, o LD apresenta sobreposto ao QVL as barrinhas na ordem das dezenas e os cubinhos na ordem das unidades. O objetivo pretendido pelo LD é representar duas parcelas de 34 unidades, contudo, as pesquisas de Silveira (2014, 2016, 2018, 2021) têm alertado sobre esse tipo de uso do BBD. Para o autor, esta forma de utilização dos blocos pode gerar dúvidas sobre qual valor está, de fato, representado. O Quadro Valor de Lugar (QVL) é uma máquina de cálculo que funciona colocando em evidência os princípios multiplicativos e aditivo regentes no SND. Dessa forma, quando

ReBECEM
Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179

blocos são introduzidos no seu interior, cria-se um conflito, como por exemplo, quando na imagem anterior temos três barrinhas sobrepostas na posição da dezena do QVL. Esse modo de representar um número pode levar a dois significados. O primeiro, passa-se a considerar que seu valor absoluto de uma barrinha agora é 1 unidade, e por tanto, temos 30. Mas isso seria incoerente, dado que os alunos sabem que a barrinha vale 10; O segundo significado, é considerar seu valor relativo, obtendo 300 unidades, pois 30 (valor das três barrinhas) vezes 10 (fator multiplicativo da ordem das dezenas) é igual a 300.

Portanto, tal forma de utilização pode produzir um conflito de natureza semiótica, já que a representação feita pelo LD é pensada para um número, mas o estudante pode considerar outro. Duval (2004) comenta que cada sistema semiótico tem características específicas de funcionamento, e suas regras internas devem ser respeitadas. Neste caso, o QVL possui um funcionamento semiótico que objetiva colocar em seu interior, elementos que tenham valor de 1 unidade cada, o que não ocorre ao colocarmos as peças que já valem uma dezena ou uma centena, por exemplo. Por consequência, também consideramos esse modo de utilizar representações do BBD sobrepostos ao QVL como algo que deve ser evitado nos LD.

<u>Ábaco</u>

Em relação ao uso do ábaco na coleção, nas Figuras 5, 6 e 7 apresentamos os casos mais representativos de suas indicações de uso:

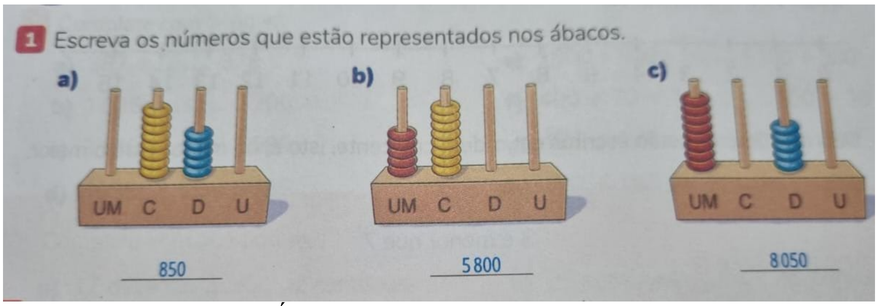



**Figura 5:** Ábaco utilizado para representar números
**Fonte:** Rubinstein *et. al.* (2021d, p. 210).

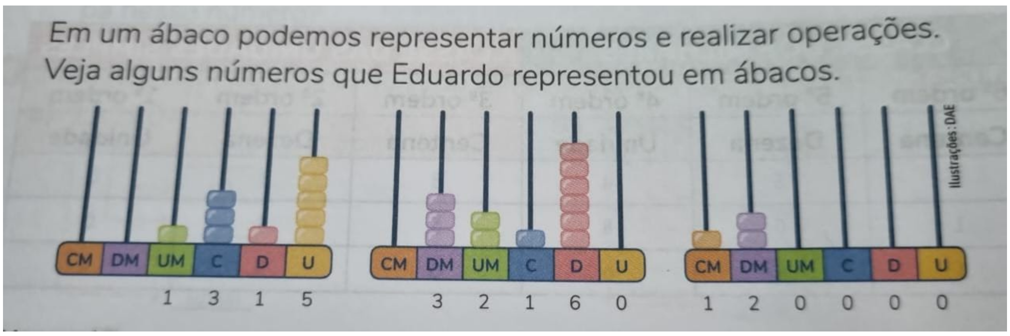


**Figura 6:** Ábaco utilizado para representar números
**Fonte:** Rubinstein *et. al.* (2021d, p. 210).

As duas figuras acima apresentam a forma como a coleção indica o uso do ábaco para representar quantidades. A finalidade desse tipo de representação é evidenciar o valor posicional no SND. O foco nestes casos é a conversão de um número organizado com anilhas e hastes do ábaco para sua respectiva representação simbólica. Em alguns casos, o livro mostra que, ao atingir dez anilhas em uma haste do ábaco, elas devem ser trocadas por um uma anilha na ordem seguinte, imediatamente à sua esquerda, (potência de dez maior), em um movimento conhecido como 'vai um', o que exige uma atividade de tratamento. Mas na maior parte das situações o uso desse material envolve a conversão do registro simbólico (algarismos) à representação auxiliar (ábaco). Além disso, o Ábaco consegue explicitar visualmente a função do zero no SND, já que uma haste vazia representa um algarismo 0 na forma simbólica. A ausência de um determinado tipo de peça na representação numérica com BBD também denota o zero. Isso pode ser observado na representação de 102, por exemplo. Será usada uma placa e dois cubinhos, e não será necessário usar barrinhas, já que o número 102 não possui dezenas disponíveis na ordem das dezenas. No ábaco, porém, a ausência de representação de quantidade em uma haste qualquer é claramente notável e mais evidente que no caso dos BBD. Contudo, na coleção estudada, um dos elementos visuais do ábaco pode influenciar sua eficiência pedagógica: as diferentes cores das anilhas colocadas em diferentes hastes. Esta discussão encontra-se presente também em Silveira (2014, 2016) e Bussi (2011).

O ábaco tem como principal característica o fato de usar anilhas cujo valor absoluto é uma unidade cada, distribuídas em diferentes posições determinadas por diferentes potências de dez, ou seja, em hastes. No primeiro ábaco da Figura 6, temos um exemplo com o número 1315 representado em um ábaco. Para isso, a imagem mostra um ábaco com 1 anilha na posição das unidades de milhar, 3 anilhas na haste das centenas, 1 anilha nas dezenas e 5 nas unidades. Nas duas vezes que o algarismo 1 aparece no numeral 1315, esses algarismos são idênticos entre si. Dessa forma, espera-se que no ábaco, as anilhas que estão na ordem das unidades de milhar e nas dezenas também o sejam. Em contrário, corre-se o risco de que os alunos passem a atribuir valores às anilhas segundo suas cores, e passem a utilizá-las com valor agregado na "cor". Se ocorrer isso, "as anilhas passam a ter valores diferenciados e perdem o princípio posicional, já que não será mais necessário (nem correto) inserir as anilhas nas hastes do ábaco para saber o valor final" (SILVEIRA, 2016, p. 21).

Essa reflexão se alinha com os alertas de Laski et al. (2015) quanto à necessidade de os materiais manipulativos evitarem atributos físicos irrelevantes, buscando uma representação que se assemelhe ao máximo ao conceito que está representando. Moyer (2001) também discute sobre essa questão ao criticar os apelos físicos e táteis que manipulativos porventura possuam. A autora argumenta que "os fabricantes anunciam os manipuladores como materiais que tornarão o ensino e a aprendizagem da matemática 'divertidos'" (p. 2). Todavia, estes aspectos do material não devem retirar deles sua eficácia matemática, exatamente o que fazem as diferentes cores das anilhas em ábacos. Afinal, os manipulativos não devem ser pensados como simples brinquedos, do contrário, todo a matemática que o material possibilita ensinar, pode se perder (Furner; Worrell, 2017).

Desta maneira, a representação auxiliar do ábaco perde suas propriedades posicionais e começa a funcionar baseada em um critério equivocado, em que diferentes potências de dez são vinculadas a diferentes cores de anilhas. Portanto, os ábacos precisam ser pensados para representar a ideia do valor posicional, o que implica, que o foco deve estar na posição do algarismo ou objeto convencionado como uma unidade, e não em outro elemento visual desnecessariamente presente no material. Assim, mesmo se forem usados outros objetos como tracinhos, feijões, palitos de picolé, ou as próprias anilhas, a coleção de objetos usados deve possuir as mesmas características visuais.

Duval (2001) argumenta que, ao utilizarmos as representações auxiliares materiais, devemos ser cautelosos para garantir que sua eficácia não se confunda no contexto matemático com o contexto cognitivo. Isso implica avaliar o material sob ambas as perspectivas para garantir que ele seja realmente útil e eficaz, preservando a referência aos objetos matemáticos.

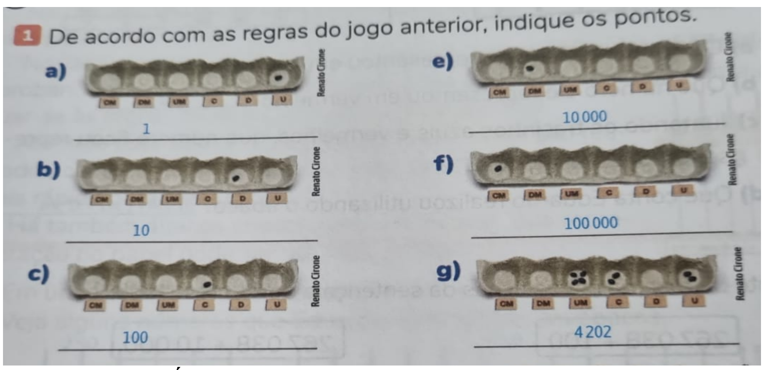



**Figura 7:** Ábaco utilizado para representar números
**Fonte:** Rubinstein *et. al.* (2021d, p. 210).

Na Figura 7 temos um exemplo de ábaco construído por um material do cotidiano (caixa de ovo), cujos espaços cumprem a função das ordens, enquanto os feijões, a função das anilhas. O LD apresenta esse formato de ábaco como uma alternativa para as escolas que não dispõem de outro disponível. Ele ainda possuiu a vantagem de, pelo baixo custo, poder ser construído para cada estudante. É usado para os mesmos fins apresentados nas Figuras 5 e 6, contribuindo para a atividade cognitiva de conversão que possibilita visualizar o valor posicional, bem como a função do zero. Contudo, é preciso considerar que o material também possui limitações, como por exemplo, a dificuldade de identificar rapidamente quantos feijões tem no interior de cada posição, já que ficam amontoados. E os feijões precisam ser todos do mesmo tipo (branco, preto, vermelho), pois do contrário, repete-se o mesmo problema do ábaco com as anilhas coloridas. Desse modo, ainda é mais vantajoso usar um ábaco cujas anilhas não sejam coloridas, mas caso não seja possível, pode-se usar esse tipo de ábaco com feijões, tomando os devidos cuidados mencionados.

<u>Dinheirinho</u>

O material conhecido como dinheirinho, está disponível para recorte ao final de cada livro da coleção. Nas Figuras 8, 9 e 10, constam os usos recorrentes desse material nos livros analisados:


**Figura 8:** Dinheirinho para representar quantidades
**Fonte:** Rubinstein *et. al.* (2021a, p. 171).

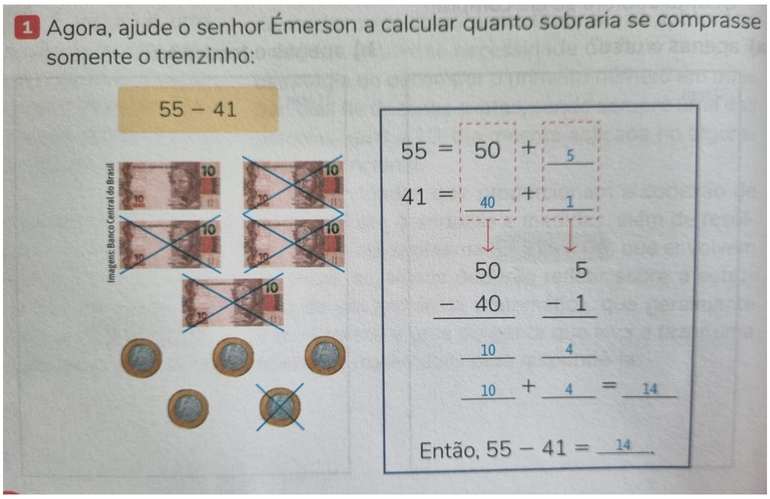



**Figura 9:** Dinheirinho para auxiliar nas operações
**Fonte:** Rubinstein *et. al.* (2021b, p. 164).

Este tipo de material manipulativo não se configura como posicional, pois os valores das cédulas ou notas não dependem de uma posição. Seu valor foi agregado por meio de alguma convenção, ou seja, os modelos das notas, excetuando-se pelos numerais impressos, não possuem em si atributos físicos que identifiquem o número que representam a não ser que o indivíduo já conheça a convenção (*ex*. ao chegar em um país estrangeiro pela primeira vez, não necessariamente uma pessoa saberá o valor de uma cédula vendo apenas sua cor. Será necessário que veja o numeral impresso na cédula para que saiba o valor que ela representa) (Silveira, 2021). O valor de cada cédula foi convencionado pelo sistema monetário do país ao qual os modelos de cédulas pertencem. Já BBD, por exemplo, possui valor evidente, ou seja, cada peça ou bloco possui um valor "gravado" em si ou dedutível com alguma operação simples (*ex*. as mil unidades de um cubo dos BBD podem ser deduzidas empilhando dez placas de cem).

Seu uso volta-se, tanto para a atividade de tratamento quanto conversão. No caso da Figura 8, primeiro devemos realizar um tratamento que envolve a soma dos valores das cédulas, para depois efetuar a conversão e conectar a representação do dinheirinho com o registro simbólico. Outra função indicada pelo livro é trabalhar principalmente com problemas que envolvem as operações básicas do SND, conforme consta na Figura 9. Neste exemplo, o dinheirinho é utilizado como uma representação auxiliar, servindo não apenas na atividade de tratamento, mas também na atividade de conversão para a representação simbólica indo-arábica.

Apesar de ser mais um recurso semiótico que contribui para representar objetos do SND, na Figura 10, a seguir, evidenciamos um tipo de uso que precisa ser problematizado:

ISSN 2594-9179

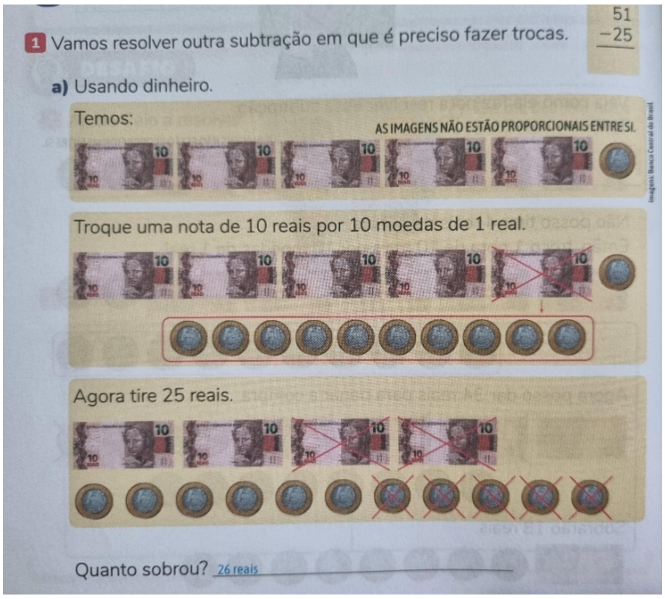


**Figura 10:** Dinheirinho de papel para ensinar agrupamentos e trocas
**Fonte:** Rubinstein *et. al.* (2021b, p. 174).

Para que um material manipulativo seja eficaz no ensino da matemática, é fundamental compreender, conforme a argumentação de Duval (2004), qual objeto matemático o manipulativo é capaz de representar. No caso da Figura 10, apresentamos um exemplo recorrente nos livros analisados, em que o dinheirinho é usado para ensinar os agrupamentos e trocas de dez do SND. Porém, diferentemente dos BBD, cujas peças são constituídas somente por agrupamentos de potências de dez, as cédulas do dinheirinho possuem valores que não se enquadram diretamente nesse tipo de organização. Diferentemente dos BBD, que são um tipo de material construído intencionalmente para fins didáticos, o dinheiro, inspiração para a construção do dinheirinho, não tem como objetivo servir ao ensino de matemática.

Um problema decorrente desse uso para o dinheirinho é que, segundo Silveira (2021, p.10), “a criança precisa ‘esquecer’ a existência de algumas cédulas ou notas, pois elas não podem existir na hora de uma troca. As trocas precisam, necessariamente, ser feitas apenas entre as três quantidades que se encaixam como potências de dez”. Nesse caso, apenas notas de R$ 100,00; R$ 10,00 e R$ 1,00. Percebemos que é muito difícil esquecer que as demais notas existem e, por isso, as crianças “podem deixar de entender o que o professor quer ensinar baseadas em conhecimentos prévios acerca do manuseio de dinheiro, em que cinco notas de R$ 10,00 podem sim, ser trocadas por uma nota de R$ 50,00 ou duas moedas de R$ 1,00 podem ser trocadas por uma nota de R$ 2,00” (Silveira, 2021. p. 10). Neste contexto, o conflito reside nos tratamentos semióticos internos associados a esse tipo de material. O funcionamento operatório do dinheirinho, ou seja, suas variadas possibilidades de transformação das informações (mediante a troca de cédulas), não é equivalente ao funcionamento do SND, que se volta a realizar trocas de dez em dez.

O livro oferece exemplos sobre as transações que os estudantes podem realizar, exemplificando a troca de uma nota de dez por dez moedas de um real. Contudo, é um conhecimento social que em nosso sistema monetário também é possível fazer essa troca por duas notas de cinco ou até mesmo cinco notas de dois. Considerando que provavelmente todos os estudantes já possuem conhecimentos acerca das diferentes notas (cédulas) e moedas correntes no nosso sistema monetário, eles poderiam optar por realizar agrupamentos diferentes, de acordo com as possibilidades de cada nota. Podemos dizer, portanto, que o dinheirinho (baseado nas cédulas correntes do sistema monetário do país de origem dos estudantes), enquanto manipulativo, e o SND, não são funcionalmente equivalentes. Duval (2017, p. 90, tradução nossa) afirma que "duas representações que pertencem a dois registros diferentes, são 'funcionalmente equivalentes' se toda informação de uma pode ser inferida a partir da outra". Contudo, a partir do exposto, verificamos que isso não acontece no caso do uso do dinheirinho (representação auxiliar) para ensinar o valor posicional dos algarismos (registro simbólico).

A utilização de dinheirinho para ensinar base dez seria adequada a partir de "uma moeda fictícia que só tivesse notas para as quantias 1, 10, 100 e, quem sabe, 1000. Sendo um dinheirinho fictício, ficaria mais simples para entender que não há como trocar cinco notas de 1 por uma de cinco, pois não há notas de cinco naquela moeda" (Silveira, 2021, p. 10).

## 6 Algumas considerações

A partir da análise realizada na coleção "Bem-me-quer Mais Matemática" (Rubinstein *et. al*., 2021a, 2021b, 2021c, 2021d), aprovada no PNLD 2023-2026 para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, investigamos os aspectos semióticos dos três manipulativos mais indicados na coleção para auxiliar no ensino do SND. Tomamos como referencial a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (TRRS), cujos conceitos de registro, tratamento e conversão, foram os principais aspectos semióticos analisados.

Os resultados obtidos revelaram que as representações dos BBD são exploradas em livros como um material para auxiliar principalmente no entendimento dos agrupamentos de dez no SND. Já as representações do ábaco desempenham um papel fundamental na introdução do conceito de valor posicional nos números, enquanto a representação do dinheirinho mostrou-se um recurso eficiente no auxílio da resolução de atividades acerca das diferentes operações aritméticas básicas.

A TRRS foi empregada como uma lente de análise e mostrou-se um referencial importante que pode ajudar professores e pesquisadores em análises de livros didáticos. Por meio da teoria, percebemos o potencial dos manipulativos como representações auxiliares para números naturais e sua aritmética, contribuindo, assim, para que os estudantes possam dispor de elementos semióticos na busca por compreender atividades de tratamento e conversão no registro simbólico indo-arábico, o principal registro em relação ao SND. Todavia, é preciso que esses manipulativos sejam trabalhados em conjunto ao longo dos anos iniciais, priorizando a atividade cognitiva de conversão entre as representações, alinhando assim, o trabalho didático à perspectiva de Duval (2004).

Um ponto a destacar é que os livros dispõem de diferentes modos de representar os números, incluindo os manipulativos. No caso do número quinze, por exemplo, para além da representação em língua natural, temos a representação simbólica (15), o dinheirinho (uma nota de dez e uma de cinco), o ábaco (cinco anilhas da posição das unidades e uma anilha na dezena), o BBD (uma barra e cinco cubinhos), dentre outras representações possíveis. Todavia, amparados pela TRRS, podemos considerar que uma condição para essas representações serem eficientes na compreensão do SND é não as utilizar uma a uma, isoladamente. A partir dessa variedade de representações, devemos trabalhar as atividades de tratamento e conversão entre todas elas, sempre buscando estabelecer como cada uma delas auxilia na compreensão do objeto (relação *noésis x semiose*).

A pesquisa também elenca alguns usos de alguns dos manipulativos apresentados que deveriam ser evitados, considerando sua potencialidade para a promoção de algumas confusões e equívocos. No caso do BBD, seu uso sobreposto ao QVL deixa espaço para ambiguidades em relação ao número que está sendo representado, uma vez que o modo correto de usar o QVL é utilizando somente elementos que possuem valor absoluto de uma unidade cada. Outra situação é o uso do ábaco colorido. As multicores se apresentam, não apenas como uma característica irrelevante, mas podem prejudicar na compreensão do valor absoluto das anilhas, dado que os valores das diferentes potências de dez podem ser atribuídos às cores inseridas em cada haste. Outra situação que destacamos é o uso do dinheirinho como recurso para ensinar agrupamentos e trocas no SND. O sistema monetário possui cédulas de valores que não se constituem como potências de dez, e mesmo que não estejam à vista, ou sendo indicadas ao uso na atividade apresentada nos livros, já são conhecidas das crianças. Isso cria possibilidades para que as quantias possam ser formadas com notas "não desejadas", de forma adversa àquela que o professor espera, criando possibilidades para confusões na compreensão do SND.

De forma geral, acreditamos que materiais manipuláveis são representações auxiliares potencialmente versáteis e didáticas, e que devem ser utilizados. Contudo, na escolha de um material, convém analisar se é funcionalmente equivalente ao objeto matemático que se objetiva ensinar com ele. Em outras palavras, é preciso utilizar materiais que contenham características visuais e instrumentais que estabelecem relações com os objetos matemáticos, cujas possibilidades de tratamento e conversão sejam interessantes para o objeto a ser ensinado.

Esperamos que os resultados e as discussões apresentadas neste artigo possam contribuir para a compreensão do papel dos manipuláveis nas aulas de matemática, em especial, para o ensino do SND.  A análise dos LD's mostrou que existem aspectos a serem melhorados na forma como os mesmos indicam o uso dos manipuláveis em suas tarefas, principalmente quando consideramos que são obras aprovadas no PNLD. Além disso, esperamos ter fomentado novas reflexões sobre a utilização de livros didáticos e possibilidades para analisá-lo.

## Referências

BJÖRKLUND, C. Less is more – mathematical manipulatives in early childhood education. **Early Child Development and Care**, London, v. 18, n. 3, 469-485, 2014.

BURGOS, N. T.; CASTILLO, A. I. C.; MONTES, A. M. L. Metodologías para reforzar la literacidad y el respeto por los libros. **Tercio creciente**, Jaén, v. 7, n. 2, p. 89-102, 2020.

BRAGA, Gloria María. El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. **Revista complutense de educación**, Madri, v. 27, n. 1, p. 199-218, 2016.

BROWN, M. C.; McNEIL, M. M.; GLENBERG, A. M. Concretude na educação: problemas reais, soluções potenciais. **Perspectivas do Desenvolvimento Infantil**, v. 3, n. 3, p. 160-164, 2009.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez Editora, 1988.

CHARALAMBOUS, C. Y. *et al*. A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. **Mathematical thinking and learning**, v. 12, n. 2, p. 117-151, 2010.

DIENES, Z. P. **Aprendizado moderno da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

DUVAL, R. **Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Traducción de M. V. Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 2001.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción de M. V. Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (2.ª ed.). Traducción de M. V. Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 2007.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar, os registros de representações semióticas. Trad. de M. A. Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. de Méricles T. Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 1-42, 2012.

FAN, L. Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. **ZDM Mathematics Education**, v. 45, n. 1, p. 765-777, 2013.

FAN, L.; ZHU, Y.; MIAO, Z. Textbook research in mathematics education: development status and directions. **ZDM Mathematics Education**, v. 45, n. 1, p. 633-646, set, 2013.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, v. 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM-SP**, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

FURNER, Joseph M.; WORRELL, Nancy L. The importance of using manipulatives in teaching math today. **Transformations**, v. 3, n. 1, p. 2-20, 2017.

GIFFORD, S.; ROCKLIFFE, F. Mathematics difficulties: does one approach fit all? **Research in Mathematics Education**, v. 14, n. 1, p. 1-15, 2012.

GLASERSFELD, E. An exposition of constructivism: why some like it radical. In. DAVIS, R. B. *et al.* (Eds.). **Monographs of the journal for research in mathematics education**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, v. 8, n. 2, p. 19-29, 1990.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. (Eds.). **Adding It Up:** Helping Children Learn Mathematics. Washington: National Academy Press, 2001.

LASKI, Elida V. et al. O que torna os manipulativos matemáticos eficazes? Lições de ciência cognitiva e educação Montessori. **SAGE Open**, v. 5, n. 2, 2015.

LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Vol. 1. Campinas: Autores Associados, 2006.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. **Em Aberto**, v. 5, n. 1, p. 1-31, 1986.

MORETTI, M. T.; BAERLE, L. M. O uso de Representações Auxiliares na Aprendizagem Matemática: um Olhar Semiocognitivo segundo Raymond Duval. **Educação Matemática em Pesquisa**, v. 24, n.1, p. 582-610, 2022.

MORETTI, M. T.; SABEL, E. **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval.** Vol 2. Florianópolis: GPEEM/UFSC, 2023. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/251609

MOYER, Patricia S. Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. **Educational Studies in mathematics**, v. 47, n. 2, p. 175-197, 2001.

MURARI, C. Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, 25(41), 187-211, 2011.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática,** v. 9, n. 1, p. 1-6, 2005.

PIAGET, J. *et al.* **Abstração reflexionante:** relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Trad. de F. Becker e P. G. da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

RUBINSTEIN, C. *et al*. **Bem-me-quer mais: matemática, 1º ano:** manual de práticas e acompanhamento de aprendizagem. São Paulo: Editora do Brasil, 2021a.

RUBINSTEIN, C. *et al*. **Bem-me-quer mais: matemática, 2º ano:** manual de práticas e acompanhamento de aprendizagem. São Paulo: Editora do Brasil, 2021b.

RUBINSTEIN, C. *et al*. **Bem-me-quer mais: matemática, 3º ano:** manual de práticas e acompanhamento de aprendizagem. São Paulo: Editora do Brasil, 2021c.

RUBINSTEIN, C. *et al*. **Bem-me-quer mais: matemática, 4º ano:** manual de práticas e acompanhamento de aprendizagem. São Paulo: Editora do Brasil, 2021d.

RUBINSTEIN, C. *et al*. **Bem-me-quer mais: matemática, 5º ano:** manual de práticas e acompanhamento de aprendizagem. São Paulo: Editora do Brasil, 2021e.

SABEL, E.; PIRES, E. M.; SILVEIRA, E. Materiais Manipulativos: uma análise de definição e caracterização no Ensino de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. In. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Brasília, 2022. **Anais...** Brasília: [s.n.], 2022.

SABEL, E; SILVEIRA, E. Representações auxiliares na aprendizagem matemática: o caso dos materiais manipulativos no ensino do sistema de numeração decimal. **Revemat**, Florianópolis, v. 18, n. 1, 2023. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2023.e93906

SILVEIRA, E.; POWELL, A. Representações e Indicações de Uso de Materiais Manipulativos em Livros Didáticos de Primeiro ao Quinto Ano: Serão Consistentes? In. XIII ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Cuiabá, 2019. **Anais...** Cuiabá: [s.n..], 2019.

SILVEIRA, E. Materiais manipuláveis e alguns riscos que envolvem sua utilização. In. E. SILVEIRA, E. *et al.* (Org.). **Alfabetização na perspectiva do letramento:** letras e números nas práticas sociais. Vol. 1. Florianópolis: NUP-CED-UFSC, p. 221-240, 2016.

SILVEIRA, E. Afinal, está certo ou errado? Um estudo sobre indicações de uso de blocos base dez em livros didáticos de matemática no Brasil. In. VII SIPEM - SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Foz do Iguaçu, 2018. **Anais...** Foz do Iguaçu: [s.n..], 2018.

SILVEIRA, E. A Study on the indications to the use of Base Ten Blocks and Green Chips in Mathematics textbooks in Brazil. **The Mathematics Enthusiast**, 18(3), 469-501, 2021

SILVEIRA, E.; POWELL, A. B.; GRANDO, R. C. Materiais manipulativos em educação matemática. In. SILVEIRA, E. *et al.* (Orgs.). **Glossário de Verbetes em Educação Matemática.** [s.l.]: [s.n.]. [2024, no prelo].

UTTAL, D. H. On the relation between play and symbolic thought: the case of mathematics manipulatives. In. SARACHO, O. N.; SPODEK, B. (Eds.)**. Contemporary perspectives on play in early childhood education**. Charlotte: Information Age Publishing, v. 7, n. 1, p. 97-114, 2003.

UTTAL, D. H.; SCUDDER, K. V.; DELOACHE, J. S. Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. **Journal of applied developmental psychology**, v. 18, n. 1, p. 37-54, 1997.

VYGOTSKY, L. S. O instrumento e o símbolo no desenvolvimento da criança. In. **A formação Social da mente.** 7ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007. p. 3-20.

**Recebido em:** 09 de julho de 2024

**Aceito em:** 18 de fevereiro de 2025