

Ano de Impressão 2010

Anderson R. T. Góes<sup>2</sup>  
Heliza Colaço<sup>3</sup>

---

**A GEOMETRIA DINÂMICA E O ENSINO  
DA TRIGONOMETRIA<sup>1</sup>**

**RESUMO:** Este artigo relata uma metodologia do ensino da Trigonometria por meio da Geometria Dinâmica. Com o desenrolar da metodologia comprovamos que a Geometria Dinâmica deve ser inserida na disciplina de Matemática como alternativa à metodologia tradicional. Com as análises dos resultados, foi possível que a melhoria da qualidade do ensino e, conseqüentemente, a melhoria da sua prática depende do envolvimento do corpo docente na busca por novas metodologias. Além disso, os educadores precisam ter clareza de suas obrigações e assumirem suas responsabilidades como cidadãos, proporcionando aos alunos metodologias sólidas na construção de conhecimento.

**PALAVRAS-CHAVE:** Trigonometria; metodologia de ensino; Geometria Dinâmica.

THE DYNAMIC GEOMETRY AND TRIGONOMETRY TEACHING

**SUMMARY:** This article is about a Trigonometry teaching methodology by using the Dynamic Geometry. With the development of the methodology it was confirmed that the Dynamic Geometry must be inserted into Mathematics as an alternative to the traditional methodology. With the analysis of the results, we have noticed that the improvement in teaching quality and, consequently, the improvement in teaching practice depends on the development of the teaching staff involvement in search of new methodologies. Besides, the educators need to be sure of their obligations and assume their responsibilities as citizens, providing students with solid methodologies in the construction of knowledge.

**KEYWORDS:** Trigonometry; teaching methodology; Dynamic Geometry.

---

Data de recebimento: 12/07/2009. Data de aceite para publicação: 29/09/2009.

<sup>1</sup>Artigo apresentado no I ENINED - Encontro Nacional de Informática e Educação – 2009 – UNIOESTE, Cascavel/Pr

<sup>2</sup>Mestre em Métodos Numérico em Engenharia, Professor Assistente, Departamento de Expressão Gráfica, Universidade Federal do Paraná, Centro Politécnico, CEP 81.531-970 - Curitiba/Pr; e Equipe de Tecnologia Educacional, Secretaria Municipal de Araucária, CEP 83.702-090 – Araucária/Pr. artgoes@ufpr.br

<sup>3</sup>Especialista em Ensino da Matemática, Professora, Centro Universitário FAE São José, CEP 83.030-730. São José dos Pinhais/Pr. helizacol@hotmail.com

## INTRODUÇÃO

Há milhares de anos foram feitas as primeiras tentativas de comunicação, pois o Homem tinha necessidade de se relacionar com seu semelhante. Os primeiros registros de linguagem escrita tinham a forma de desenhos, as chamadas pinturas rupestres, encontradas nas paredes de antigas cavernas que traziam a representação simbólica da forma de viver do homem primitivo, seus conhecimentos, seus medos e suas divindades. Ao longo dos anos, houve uma evolução no sentido da simplificação da linguagem, até chegarmos à escrita atual, mas nem por isso o desenho perdeu sua importância como meio de comunicação e de expressão, sendo sempre utilizado paralelamente à escrita. (GÓES, 2004)

O desenho como instrumento facilitador do aprendizado da Matemática no ensino fundamental e médio cria possibilidades reais de inserir o aluno em situações-problemas de seu cotidiano.

Assim, para garantir aos alunos uma formação em que o protagonista faça parte da construção do conhecimento, criamos e aplicamos na Escola Municipal Planalto dos Pinheiros, município de Araucária/PR, uma metodologia do ensino da Matemática por meio da Geometria Dinâmica.

A metodologia proposta é uma alternativa à metodologia de ensino tradicional, pois resgatamos nela a importância da Geometria como fonte de conhecimento, inspiração e a criação.

A geometria constitui a parte mais importante do currículo matemático do aluno, pois através do estudo, o aluno desenvolve um pensamento especial, que possibilitará a compreensão do mundo onde vivemos. São estas idéias as principais norteadoras da presente abordagem. (BRASIL, 1998, p. 57)

Equivocadamente muitos pensam que o desenho no ensino da Matemática é apenas o ensino da Geometria, esquecendo que muitas das situações-problemas propostas aos alunos são resolvidas através do auxílio da representação gráfica.

No entanto, o ensino da Geometria no ensino médio e fundamental, se bem direcionado, se comprova como um formador do pensamento, facilitando sua representação. Nele, conhecer um objeto ou determinado problema, é agir sobre ele e transformá-lo, aprendendo os mecanismos dessa transformação e vinculando-os às ações transformadoras. (LUZ, 2004)

Um trabalho possível de construção coletiva, de conhecimentos e atitudes, delineou-se de modo desafiador, gerando a criação de metodologias que propiciassem o desenvolvimento de trabalhos em que

a teoria e a prática caminhassem juntas e não somente se limitassem em problemas resolvidos em sala de aula. Adotou-se uma tomada de posição no que concerne à metodologia do ensino, diferente da didática tradicional.

A metodologia trabalhada cria elo entre a teoria e prática em sala de aula. Assim este trabalho propõe a utilização de software de Geometria Dinâmica oportunizando aos alunos a apropriação do conhecimento.

## REVISÃO

A maioria das dificuldades conceituais que se observam nos alunos em sala de aula está relacionada à maneira de organizarem o raciocínio e construir argumentações lógicas. (NASCIMENTO, 2004)

Desse modo, com o objetivo de contornar as dificuldades relatadas pelo autor acima, é possível sugerir a utilização da Geometria Dinâmica, pois essa possui forte desafio àqueles que a manipulam. Com esta metodologia os alunos se sentem mais envolvidos com as figuras e aprendem a pensar e desenvolver seu raciocínio lógico, além de aprender a identificar formas geométricas e seus elementos. (SOUZA et al., 1997)

A metodologia desenvolvida por Martins (2003) para o estudo de seno e cosseno, foi realizada em três etapas, nas quais iniciaram a construção do conhecimento por triângulos retângulos, passando para o ciclo trigonométrico e por fim utilizaram gráficos das funções correspondentes. A autora afirma que esta metodologia acrescentou aos alunos o conhecimento mais amplo de tais conceitos.

No desenvolvimento do trabalho foi necessária uma sequência didática repleta de atividades para a validação do proposto: verificar se os alunos utilizariam estes conhecimentos de Trigonometria no triângulo retângulo, ciclo trigonométrico e o software Cabri-Geomètre na construção de gráficos das funções seno e cosseno. Por meio desta sondagem foi possível diagnosticar que o software se mostrou muito eficaz, auxiliando os alunos a relacionarem os conceitos já vistos no triângulo retângulo e ciclo trigonométrico com as funções seno e cosseno.

O trabalho desenvolvido por Brito e Morey (2004) com professores da rede pública de ensino de Natal/RN teve como objetivo verificar as dificuldades que os mesmos possuíam com relação à Trigonometria. Para isto, as autoras buscaram evidências entre tais dificuldades e a formação inicial desses professores. Dessa forma, apesar da avaliação positiva realizada pelos participantes, as autoras consideram que a variedade de atividades foi insuficiente para a construção dos conceitos trigonométricos abordados. Assim sugerem que seja realizada uma

pesquisa para verificar como o conteúdo de Trigonometria é trabalho na formação inicial de professores e desta forma, indicar caminhos para uma aprendizagem significativa desses futuros profissionais da educação.

Segundo Lima Filho et al. (2005) a utilização do software LEMAT (Laboratório Virtual de Matemática) no estudo dos conceitos de Trigonometria contribui de forma positiva para a compreensão dos mesmos, visto também que há grande envolvimento e motivação por parte dos alunos ao realizarem as implementações e relatórios necessários durante as pesquisas. Assim, por ser apresentada uma prática de ensino e de descobertas matemáticas, o docente pode apresentar práticas novas aplicadas à Trigonometria, como também para outros assuntos inclusos na Matemática e Geometria.

O conhecimento sobre Trigonometria não deve ser baseado apenas nos livros didáticos, segundo Carneiro et al. (2006). Assim, os autores propõem uma visão mais ampla desta área, possibilitando ao docente e ao discente uma leitura crítica sobre os conceitos e assuntos no geral, que na maioria das vezes são apresentados por aglomerado de fórmulas e equações de difíceis compreensão. Para sanar as dificuldades encontradas pelos alunos quanto à compreensão das definições relacionadas à Trigonometria, os autores buscaram contribuir com material de apoio para professores, e assim amenizar as necessidades iniciais que os alunos apresentam com relação a este tópico. Concluem que o objetivo de oferecer um aprendizado significativo dos conceitos trigonométricos em soluções de situações-problemas e desenvolver o raciocínio crítico dos alunos é atingido com a metodologia proposta.

Para Leal e Rodríguez (2009), além de proporcionar ao aluno uma série de conceitos, é também necessário fornecer as ferramentas e estratégias para a exploração, relação, análise e demonstração para que ele aprenda com solidez os sentidos e propriedades trigonométricas. Assim, os autores propõem desenhar, desenvolver e avaliar as razões trigonométricas através da Geometria Dinâmica, analisar as demonstrações que surgiram com o uso do software Cabri e analisar os procedimentos, as estratégias, os erros e as dificuldades encontradas durante as atividades propostas. Com estas análises, concluem que as atividades promoveram novos procedimentos e estratégias de ensino que contribuíram de forma positiva ao ensino desse conteúdo, atingindo o objetivo da aprendizagem e a investigação da Trigonometria.

A utilização do software Cabri Géomètre II por Sicre e Munguía (2007) proporciona estruturar um projeto de investigação no uso da tecnologia no estudo da Matemática. Os resultados obtidos afirmam que a pesquisa da chamada transposição didática, que modifica a apresentação dos saberes trigonométricos através de uma didática diferente da tradicional, é possível com o uso do Cabri em sala de aula.

## METODOLOGIA PROPOSTA

Quando apresentado de forma tradicional, o conteúdo Relações Trigonômétricas é considerado pelos alunos algo abstrato e de difícil compreensão. As perguntas mais frequentes quando o assunto é Trigonometria são: Porque seno de  $30^\circ$  é  $0,5$ ? Porque tangente de  $45^\circ$  é  $1$ ?

Para sanar as dúvidas dos alunos propomos uma atividade de investigação e construção de conhecimento relatada a seguir, onde mostramos uma possibilidade real de tornar a Matemática significativa através da Geometria Dinâmica, a principal ferramenta desta construção do conhecimento.

## RELATO DA ATIVIDADE

O software utilizado nesta atividade é o CaR Metal disponível no site <http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal>, uma adaptação do Rêgua e Compasso (CaR - Compas and Ruler) que oferece as mesmas apresentações que o CaR, porém com mais agilidade, pois elimina alguns passos intermediários no processo de construção do desenho. Além disto, a versão do software utilizada nesta atividade permite realizar cálculos matemáticos e construção de funções.

A primeira construção realizada pelos alunos foi a circunferência (Figura 01) com a opção círculo e a nomeação dos pontos O (centro da circunferência) e Livre (ponto que define o raio da circunferência e que será livre para que o aluno possa explorar nas próximas atividades). Durante a construção da circunferência foi retomado o conteúdo sobre circunferência, seus elementos (raio, diâmetro, centro, curva) e a definição de círculo.

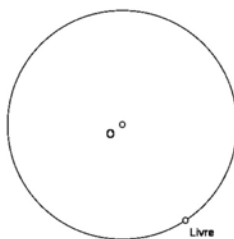


Figura 1 Circunferência.

Após esta construção os alunos traçaram dois diâmetros perpendiculares utilizando as ferramentas semi-reta, segmento,

perpendicular e ocultar objetos. Eles apresentaram certa dificuldade em lembrar a definição de retas perpendiculares, assim, neste momento, o professor fez a intervenção e solicitou que utilizassem a ferramenta ângulo para medir o ângulo entre os diâmetros e assim retomar o conceito de retas perpendiculares (Figura 02).

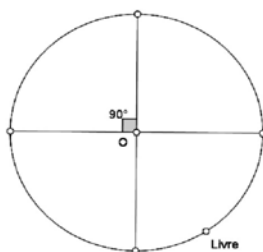


Figura 2 Diâmetros perpendiculares.

Com a ferramenta ângulo de amplitude fixa os alunos construíram o primeiro ângulo notável  $30^\circ$ , de vértice em O, lado OA e assim obtiveram o lado OB. Ao utilizar a ferramenta descrita acima, foi necessário ocultar a semi-reta OB, construir o segmento OB e ainda utilizar a ferramenta ângulo, obtendo assim a Figura 03.

A partir da Figura 03 foram traçadas duas retas, uma perpendicular a AO, contendo o ponto B, e a outra paralela a OA, obtendo o ponto C. Para uma melhor visualização utilizou-se a ferramenta polígono para construir o triângulo OBC.

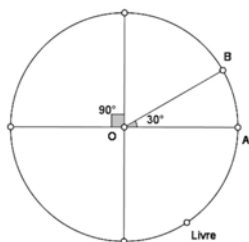


Figura 3 Ângulo de  $30^\circ$ .

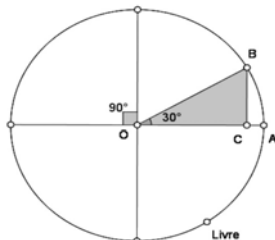


Figura 4 Ângulo de  $30^\circ$ .

Neste momento foi necessária à intervenção do professor para trabalhar o conteúdo sobre triângulo retângulo e seus elementos.

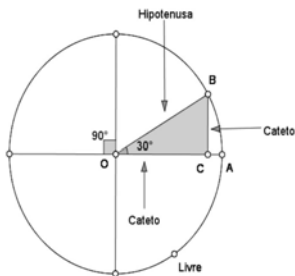


Figura 5 Elementos do triângulo retângulo OBC.

Com a utilização da ferramenta conhecida por mostrar valores dos objetos, os alunos elaboraram uma tabela (Tabela 01) na qual constava o raio da circunferência (mesmo valor da hipotenusa), a medida dos lados do triângulo e as razões entre cateto oposto e hipotenusa, cateto adjacente e hipotenusa, e ainda cateto oposto e cateto adjacente.

Esta tabela foi elaborada com três medidas diferentes de raio da circunferência (Figura 06 (a), (b), (c)), e para isto bastou o aluno mover o ponto Livre.

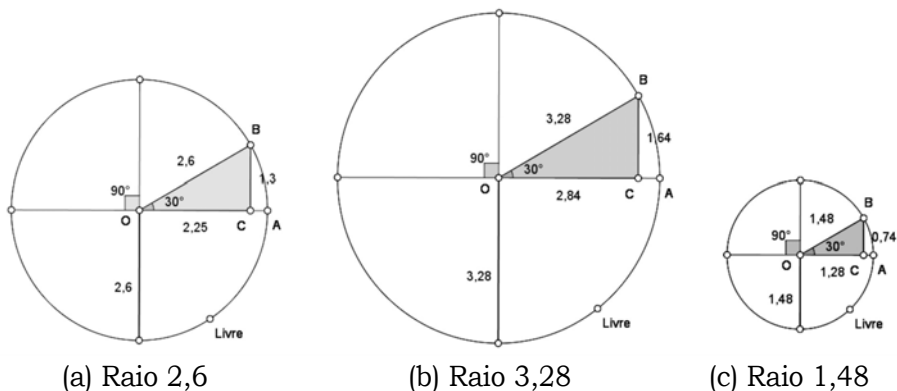


Figura 6 Exemplos de circunferências.

TABELA 1 - Dados da atividade para o ângulo de 30°

Medidas	Raio 2,6	Raio 3,28	Raio 1,48
Cateto Oposto	1,3	1,64	0,74
Cateto Adjacente	2,25	2,84	1,28
Hipotenusa	2,6	3,28	1,48
<u>Cateto Oposto</u> Hipotenusa	0,5	0,5	0,5
<u>Cateto Adjacente</u> Hipotenusa	0,87	0,87	0,86
<u>Cateto Oposto</u> Cateto Adjacente	0,57	0,58	0,58

Outras duas Tabelas semelhantes à Tabela 01 devem ser elaboradas uma para o ângulo de 45° e a outra para o ângulo de 60°.

Assim, foi possível notar que os valores, quando comparado o mesmo ângulo, são muito próximos, mesmo quando comparados com a atividade de outro aluno. Então, após a mediação do professor, os alunos concluíram que os valores deveriam ser iguais, mas devido à precisão dada pelo software há uma variação. O CaR Metal possui uma ferramenta que define a quantidade de casas decimais a serem trabalhadas. Na atividade apresentada acima foram utilizadas até duas casas decimais.

Neste momento as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo, bem como a tabela que apresentava os seus valores com precisão, foram expostos (Tabela 2).

TABELA 2 - Relações trigonométricas dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Em sala de aula o professor deve formalizar a obtenção dos valores da Tabela 2 realizando a demonstração a partir do triângulo equilátero para os ângulos de 30° e 60°, e a partir do quadrado para o ângulo de 45°. A utilização do teodolito é a sugestão para a aplicação do conhecimento apropriado pelos alunos (GÓES e COLAÇO, 2009).



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a aplicação do exercício, verificou-se a motivação dos alunos em realizar a atividade e ao mesmo tempo explorar a construção e compartilhar resultados.

A criatividade e a empolgação pela construção do conhecimento se manifestaram em todos os alunos, pois sem exceção todos participaram de todas as etapas do processo. Aqueles que não conseguiram concluir rapidamente uma etapa não foram desmotivados, pois sempre havia um aluno que o ajudava.

Com o desenrolar da metodologia comprovamos que o uso da Geometria Dinâmica pode, e deve, ser inserido na disciplina de Matemática, não só para o ensino de Geometria, mas para suporte de todos os conteúdos possíveis.

Aqui utilizamos o termo “pode, e deve”, pois apesar da maioria das escolas possuírem laboratório de informática, a vivência nos mostra que a maioria absoluta dos professores não usa esta tecnologia em suas aulas para que o conhecimento seja solidificado e tenha sentido. No caso específico do conteúdo abordado, a Trigonometria, percebemos que as dúvidas comuns aos alunos não surgiram, diferente do que é presenciado com o uso da forma tradicional de ensino na qual questões, como as apresentadas no início do relato desta metodologia, são frequentes.

Com as análises dos seus resultados, afirmamos que a melhoria da qualidade do ensino e, conseqüentemente, a melhoria da prática de ensino depende do envolvimento do corpo docente na busca de novas metodologias. Os educadores precisam ter clareza de suas obrigações e assumirem suas responsabilidades como cidadãos, enfrentando os desafios que certamente surgirão.

Concluimos que educar não é, e nunca foi, uma tarefa fácil, pois requer educadores dispostos a buscar novas metodologias em que seus alunos construam um conhecimento solidificado.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos. Brasília, MEC / SEF, 1998.

BRITO, A. J.; MOREY, B. B. Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. **Revista Horizontes**, v. 22, n.1, p. 65-70, jan./jun. 2004

CARNEIRO, J. M.; PARDIM, P. O. D.; CRUZ, J. H. C.; FERREIRA, D. M. C.; SANTOS, R. A.. Melhoria do ensino da trigonometria. In: X JORNADA DE MATEMÁTICA - UFG. Rialma, 2006

GÓES, A. R. T. **Desenho técnico – Engenharia civil – “Uma proposta metodológica”**. 2004. Monografia (Especialização em Desenho Aplicado ao Ensino da Expressão Gráfica) – Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2004.

GÓES, A. R. T.; COLAÇO, H. O ensino da trigonometria por meio do desenho geométrico. IN: VIII INTERNATIONAL CONFERENCE ON GRAPHICS ENGINEERING OF ARTS AND DESIGN. Bauru/SP, 2009

LEAL, J. E. F.; RODRÍGUEZ, A. G. Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. **Net**, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Disponível em: [www.uv.es/AngelGutierrez/apregeom/archivos2/FialloGutierrez06.pdf](http://www.uv.es/AngelGutierrez/apregeom/archivos2/FialloGutierrez06.pdf). Acesso em: 20 fev. 2009.

LIMA FILHO, J. M.; ROCHA, J. A.; CAVALCANTI, L. B.. Uso do LEMAT no Ensino de Trigonometria. In: IX ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Belo Horizonte, 2005.

LUZ, A. A. B. S. **A (re) significação da geometria descritiva na formação profissional do engenheiro agrônomo**. 2004. Tese (Doutorado em Agronomia) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2004.

MARTINS, V. L. de O. F. **Atribuindo significado ao seno e cosseno, utilizando o software Cabri-Géomètre**. 2003. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/PUC-SP, São Paulo, SP, 2003

NASCIMENTO, R. B. Investigações em Geometria Via Ambiente Logo. **Revista Ciência & Educação**, v. 10, n. 1, p. 1-21, 2004

SICRE, O. J. S. M.; MUNGUÍA, J. L. S.. Construcción de Significados para las Razones Trigonométricas Mediante un Aparato Virtual Diseñado con Cabri. In: XVII SEMANA REGIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA EN MATEMÁTICAS – UNIVERSIDAD DE SONORA. México, 2007.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S.; VIEIRA, R. M.; OCHI, F. H. **A matemática das sete peças do Tangram**. São Paulo, CAEM-IME-USP, 1997.

